

Auxiliar 5

Solución

P1) 1.- $f(x) = \frac{8x-8}{x^2-8x+7}$

Dominio:

$$f(x) = \frac{8(x-1)}{(x-1)(x-7)} \Rightarrow x \neq 1 \text{ y } x \neq 7. \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1; 7\}.$$

Recorrido:

Si $x \in \text{Dom}(f)$; entonces $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x-1)(x-7)} = \frac{8}{x-7}$

Si $y = f(x)$, entonces

$$y = \frac{8}{x-7} \Leftrightarrow yx - 7y = 8 \Leftrightarrow yx = 8 + 7y \Leftrightarrow x = \frac{8+7y}{y} \Rightarrow y \neq 0.$$

Y esta es la única restricción que tiene "y", por lo que

$$\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ceros:

Puesto que $0 \notin \text{Rec}(f)$, la función no posee ceros (ie, no existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = 0$).

Acotamiento

Puesto que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f no es acotada, ya que f puede tomar valores altos y bajos sin ningún límite.

$$2: g(x) = \sqrt{4 - (x+3)(x-3)}$$

Dominio

$$4 - (x+3)(x-3) = 4 - (x^2 - 9) = 13 - x^2$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{13 - x^2}$$

$$\text{Necesitamos } (13 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{13} - x)(\sqrt{13} + x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$$

$$\text{Luego } \text{Dom}(g) = [-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$$

Recorrido

$$g(x) = \sqrt{13 - x^2}$$

$$y = \sqrt{13 - x^2} \Rightarrow \boxed{y \geq 0}$$

$$y^2 = 13 - x^2$$

$$x^2 = 13 - y^2; \text{ como } x^2 \geq 0, \text{ necesitamos } 13 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-\sqrt{13}, \sqrt{13}]$$

Estas son todas las restricciones de "y", por lo que juntando ambas

$$\text{Rec}(g) = [0, \sqrt{13}]$$

Acotamiento

Puesto que $\text{Rec}(g) = [0, \sqrt{13}]$, tenemos que g es acotada superiormente (por ejemplo por $\sqrt{13}$) e inferiormente (por ejemplo por 0).

Ceros

Resolvemos $g(x) = 0$ puesto que $0 \in \text{Rec}(g)$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{13 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 13 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{13} \vee x = -\sqrt{13}$$

Es decir, tenemos dos ceros (note que ambos están en $\text{Dom}(g)$).

P2] Debemos encontrar $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom} f$.
Es inmediato que no hay restricciones para x , por lo que $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

Debemos verificar que

$$(x+p) - a \left[\frac{x+p}{a} \right] = x - a \left[\frac{x}{a} \right] \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particular, tomando $x=0$, debe verificarse que:

$$p - a \left[\frac{p}{a} \right] = 0 - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = a \left[\frac{p}{a} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{a} = \left[\frac{p}{a} \right]$$

Es decir, los candidatos a período son aquellos $p \in \mathbb{R}^+$ que cumplen con que la parte entera de $\frac{p}{a}$ es el mismo número. Los únicos números que son iguales a su parte entera son los números enteros. Por lo tanto

$$\frac{p}{a} = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p = ka.$$

Es decir, p es algún múltiplo de " a ". Como $p \in \mathbb{R}^+$, solo pueden ser múltiplos positivos. Digamos entonces que $p = na$, $n \in \mathbb{N}$. Volvamos a la expresión original para ver si estos " p " sirven.

$$\begin{aligned} (x+p) - a \left[\frac{x+p}{a} \right] &= x + na - a \left[\frac{x+na}{a} \right] = x + na - a \left[\frac{x}{a} + n \right] = x + na - a \left(\left[\frac{x}{a} \right] + n \right) \\ &= x + \cancel{na} - a \left[\frac{x}{a} \right] - \cancel{an} = x - a \left[\frac{x}{a} \right] // \end{aligned}$$

Donde se usó $[x+k] = [x] + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$. Luego los períodos son $p = na$, $n \in \mathbb{N}$, y el período mínimo se obtiene con $n=1$, ie, $p^* = a$. //

P3)

$$1.- f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

Recorrido:

$$y = x^4 - 2x^2 - 8 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2)^2 - 2(x^2) - (8+y) = 0 \quad ; \quad u = x^2; \quad u \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u - (8+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad ; \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 + 4(8+y).$$

Para tener $u \geq 0$, siempre podemos elegir el signo "+" en el " $\pm$ ", por lo que lo único que debe cumplirse es que $\Delta \geq 0$, es decir,

$$4 + 4(8+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 8 + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq -9 \Rightarrow \text{Rec}(f) = [-9, \infty).$$

Paridad

Veamos que

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 8 = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x) \Rightarrow f \text{ es par.}$$

Crecimiento

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $x_2 > x_1$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^4 - 2x_2^2 - 8 - (x_1^4 - 2x_1^2 - 8) = (x_2^4 - x_1^4) - 2(x_2^2 - x_1^2) \\ &= (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2) - 2(x_2^2 - x_1^2) = (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2 - 2) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 - 2). \end{aligned}$$

Ahora que todo est factorizado, analizamos el signo. $x_2 > x_1 \Rightarrow (x_2 - x_1) > 0$.

Si $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 + x_2 < 0$; y si $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, $x_1 + x_2 \geq 0$

Si $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$, $x_1^2 > 1$, $x_2^2 > 1$ y $x_1^2 + x_2^2 - 2 > 0$

Si $x_1, x_2 \in (1, \infty)$, $x_1^2 > 1$, $x_2^2 > 1$, y $x_1^2 + x_2^2 - 2 > 0$

Si $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, $x_1^2 < 1$, $x_2^2 < 1$ y $x_1^2 + x_2^2 - 2 < 0$.

Combinando estos puntos críticos de separación, tenemos. (Recuerde que $x_2 > x_1$)

• $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underset{+}{(x_2 - x_1)} \underset{-}{(x_2 + x_1)} \underset{+}{(x_2^2 + x_1^2 - 2)} \leq 0 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \text{ decreciente.}$$

• $x_1, x_2 \in (-1, 0)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underset{+}{(x_2 - x_1)} \underset{-}{(x_2 + x_1)} \underset{-}{(x_2^2 + x_1^2 - 2)} \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \text{ creciente}$$

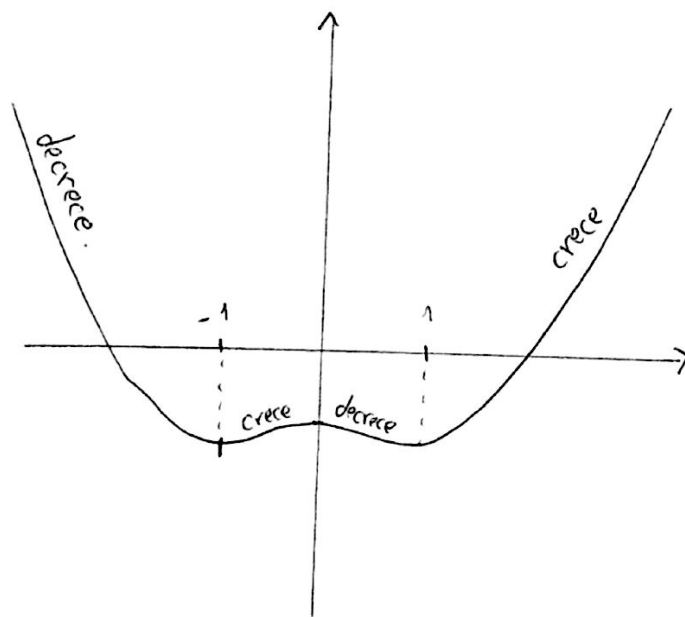
• $x_1, x_2 \in (0, 1)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underset{+}{(x_2 - x_1)} \underset{+}{(x_2 + x_1)} \underset{-}{(x_2^2 + x_1^2 - 2)} \leq 0 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \text{ decreciente}$$

• $x_1, x_2 \in (1, \infty)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underset{+}{(x_2 - x_1)} \underset{+}{(x_2 + x_1)} \underset{+}{(x_2^2 + x_1^2 - 2)} \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \text{ creciente}$$

La gráfica es algo como:



2: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Recorrido

$$y = \sqrt{|x^2 - 1|} \quad ; \quad \underline{y \geq 0}$$

$$y^2 = |x^2 - 1|$$

• Si $x \in [-1, 1]$, $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ y

$$y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \quad ; \quad \text{como } x^2 \geq 0, \quad 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y \in [-1, 1]$$

• Si $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ y

$$y^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 + y^2 \quad ; \quad \text{como } x^2 \geq 0 \text{ y } 1 + y^2 \geq 0, \text{ no hay restricciones para "y". Es decir, } y \in \mathbb{R}.$$

El recorrido es la unión de los casos $x \in [-1, 1]$ y $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, intersectado con la restricción de que $y \geq 0$. Luego $\text{Rec}(g) = [0, \infty)$.

Paridad

$$g(-x) = \sqrt{|(-x)^2 - 1|} = \sqrt{|x^2 - 1|} = g(x) \Rightarrow g \text{ es par.}$$

Crecimiento

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $x_2 > x_1$

$$g(x_2) - g(x_1) = (\sqrt{|x_2^2 - 1|} - \sqrt{|x_1^2 - 1|}) \cdot \frac{\sqrt{|x_2^2 - 1|} + \sqrt{|x_1^2 - 1|}}{\sqrt{|x_2^2 - 1|} + \sqrt{|x_1^2 - 1|}}$$

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{|x_2^2 - 1| - |x_1^2 - 1|}{\sqrt{|x_2^2 - 1|} + \sqrt{|x_1^2 - 1|}}$$

Notemos que el denominador es positivo siempre, por lo que solo analizamos el signo del numerador. Para quitarnos el módulo, nos separaremos en los casos $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

$$\underline{x_1, x_2 \in (-1, 1)}$$

$$|x_2^2 - 1| = 1 - x_2^2 \quad ; \quad |x_1^2 - 1| = 1 - x_1^2$$

$$\Rightarrow |x_2^2 - 1| - |x_1^2 - 1| = 1 - x_2^2 - (1 - x_1^2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

Como $x_2 > x_1$, $x_1 - x_2 < 0$. Además tenemos

$$x_1, x_2 \in (-1, 0) \Rightarrow x_1 + x_2 < 0$$

$$x_1, x_2 \in (0, 1) \Rightarrow x_1 + x_2 > 0$$

Por lo tanto:

$$x_1, x_2 \in (-1, 0) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{\overset{-}{(x_1 + x_2)} \overset{-}{(x_1 - x_2)}}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}} \geq 0 \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1) \text{ creciente.}$$

$$x_1, x_2 \in (0, 1) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{\overset{+}{(x_1 + x_2)} \overset{-}{(x_1 - x_2)}}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}} \leq 0 \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_1) \text{ decreciente.}$$

$$\underline{x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)}$$

$$|x_2^2 - 1| = x_2^2 - 1 \quad ; \quad |x_1^2 - 1| = x_1^2 - 1$$

$$\Rightarrow |x_2^2 - 1| - |x_1^2 - 1| = x_2^2 - 1 - (x_1^2 - 1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$. Además tenemos

$$x_1, x_2 \in (-\infty, -1] \Rightarrow x_1 + x_2 < 0$$

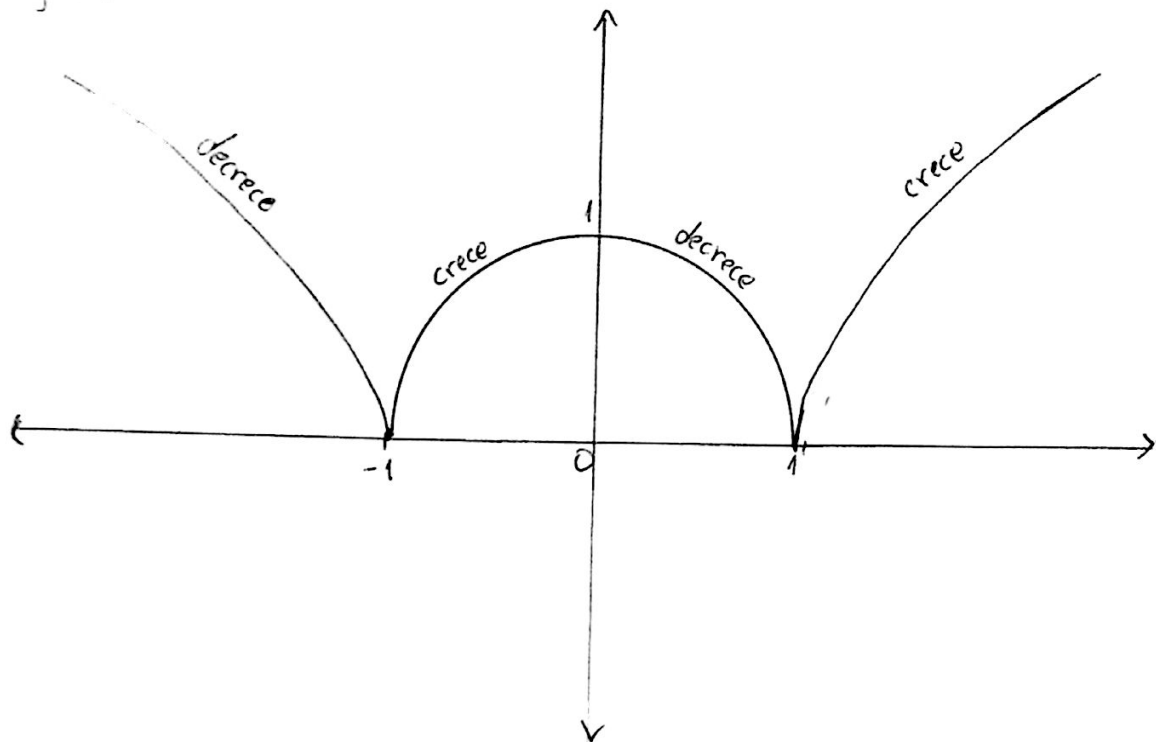
$$x_1, x_2 \in [1, \infty) \Rightarrow x_1 + x_2 > 0$$

Por lo tanto:

$$x_1, x_2 \in (-\infty, -1] \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{\overset{-}{(x_2 + x_1)} \overset{+}{(x_2 - x_1)}}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}} \leq 0 \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_1) \text{ decreciente}$$

$$x_1, x_2 \in [1, \infty) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) = \frac{\overset{+}{(x_2 + x_1)} \overset{+}{(x_2 - x_1)}}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}} \geq 0 \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1) \text{ creciente.}$$

La gráfica es algo como



3.- $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 2-4x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2-2x-1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Recorrido

Si $0 \leq x < 1$. $y = 2-4x \Leftrightarrow 4x = 2-y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{4}$

Como $0 \leq x < 1$, necesitamos $0 \leq \frac{2-y}{4} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2-y < 4 \quad / + -2$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -y < 2 \quad / \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq y > -2 \quad ; y \in [-2, 2]$$

Si $x \geq 1$ $y = x^2-2x-1$

$$\Leftrightarrow y = (x^2-2x+1)-2 \Leftrightarrow y+2 = (x-1)^2$$

puesto que $x \geq 1$, $(x-1) \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0$. Necesitamos $(y+2) \geq 0$

$$\Rightarrow y \geq -2, \quad y \in [-2, \infty)$$

El recorrido es la unión de los casos $0 \leq x < 1$ y $x \geq 1$, es decir, $\text{Rec}(h) = [-2, \infty)$.

Paridad

$h(x)$ no puede poseer paridad ya que si $x \in \text{Dom}(h) = [0, \infty)$, no se tiene que $-x \in \text{Dom}(h)$.

Crecimiento

Sea $x_1, x_2 \in \text{Dom}(h) = [0, \infty)$, $x_2 > x_1$

- x_1, x_2 en $[0, 1)$

$$h(x_2) - h(x_1) = (2 - 4x_2) - (2 - 4x_1) = 4x_1 - 4x_2 = 4(x_1 - x_2)$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow h(x_2) - h(x_1) = 4(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow h(x_2) < h(x_1) \text{ decreciente.}$$

- x_1, x_2 en $[1, \infty)$

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= (x_2^2 - 2x_2 - 1) - (x_1^2 - 2x_1 - 1) = (x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2). \end{aligned}$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$$

$$x_1, x_2 \in [1, \infty) \Rightarrow x_1 \geq 1, x_2 \geq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow h(x_2) - h(x_1) = \underset{+}{(x_2 - x_1)} \underset{+}{(x_2 + x_1 - 2)} \geq 0 \Rightarrow h(x_2) \geq h(x_1) \text{ creciente}$$

La gráfica es algo como

