

MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semana 4

Ecuación cuadrática

- Consideremos la ecuación general de segundo grado o cuadrática:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Según los valores de las constantes obtendremos diferentes lugares geométricos en el Plano Cartesiano. Para efectos del curso, consideraremos el caso $C = 0$, es decir, *no se mezclan x e y* .

- En nuestro caso ($C = 0$), A y B no pueden ser nulos simultáneamente (de otra forma se perdería lo *cuadrático* y se tendría una recta).
- Una expresión del tipo $ax^2 + bx$, con $a \neq 0$, siempre puede ser escrito como la suma de un cuadrado de binomio y un término libre por el método de *completar cuadrados*. Básicamente, la idea es comparar con la identidad:

$$(x \pm c)^2 = x^2 \pm 2cx + c^2$$

Agregando el término que falte. Ejemplos:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \\ &= x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 \\ &= (x - 3)^2 - 9 \\ 3x^2 + 30x &= 3(x^2 + 10x) \\ &= 3(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x) \\ &= 3(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 - 5^2) \\ &= 3((x + 5)^2 - 25) \\ &= 3(x + 5)^2 - 75 \end{aligned}$$

- Por medio del método de completar cuadrados, la ecuación $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, en los siguientes casos de interés, puede ser escrita como:

- $(A = 0) \wedge (B, D \neq 0) \implies a(y - k)^2 = x - h$
- $(B = 0) \wedge (A, E \neq 0) \implies y - k = a(x - h)^2$
- $(A, B \neq 0) \implies a(x - h)^2 + b(y - k)^2 = c$

Secciones Cónicas

- La **Parábola** es la solución a la ecuación $y = ax^2$. Se abre de manera vertical, posee simetría respecto al eje OY y posee un vértice ubicado en el origen $(0, 0)$.
- La **Elipse** es la solución a la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde $a > b$. Posee simetría respecto a ambos ejes y es una curva cerrada centrada en el origen dispuesta de manera horizontal. Los valores de x solo se pueden mover en $[-a, a]$, y los valores de y solo se pueden mover en $[-b, b]$. Esto es debido a que se tienen dos números al cuadrado que deben sumar 1, lo que solo es posible si ninguno es mayor a 1. Se dice que a y b son los *semiejes* de la elipse, donde a es el semieje mayor y b el semieje menor.

- La **Hipérbola** es la solución a la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Posee simetría respecto a ambos ejes y está 'centrada' en el origen, abriéndose de manera horizontal. Los valores de x solo se pueden mover en $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ y los de y en todos los reales. Esto es debido a que se tienen dos números al cuadrado que al restarse deben resultar 1, lo que solo es posible si el primero no es menor a 1.

- Al despejar y de la ecuación de la hipérbola se obtiene:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando x se hace muy negativo o muy grande, $y \approx \pm \frac{b}{a} x$. Es decir, cuando nos alejamos del origen, la hipérbola tiende a parecerse o acercarse mucho a las rectas $y = \pm \frac{b}{a} x$. Estas rectas se conocen como *asíntotas de la hipérbola*.

- Las variables x e y descritas anteriormente pueden intercambiar roles. Es decir, se puede tener una parábola $x = ay^2$ que se abre de manera horizontal; una elipse con $b > a$ vertical; o una hipérbola con el término y^2 positivo en lugar de x^2 dando lugar a una hipérbola que se abre de manera vertical. Las propiedades mencionadas anteriormente se comprueban en estos otros casos simplemente intercambiando los ejes.
- En el caso de la elipse, no puede ocurrir que $a = b$, puesto que en este caso se tendría:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff x^2 + y^2 = a^2$$

Lo que corresponde a la ecuación de una circunferencia de radio a , y no a una elipse.

- En el caso de la hipérbola, si $a = b$ decimos que la hipérbola es *equilátera*, puesto que sus asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes (las rectas $y = x$ e $y = -x$).
- También las cónicas pueden estar centradas en un punto distinto al origen. Cuando esto pasa decimos que estamos frente a una traslación paralela de los ejes. Podemos decir que:

$$\text{Parábola: } (y - k) = a(x - h)^2$$

$$\text{Elipse: } \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Hipérbola: } \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Son las mismas cónicas anteriores pero esta vez centradas en el punto (h, k) (correspondiente al nuevo punto en donde se anula el término en x y el término en y). Esta forma de las ecuaciones se conoce como la forma *canónica* de las ecuaciones de estas cónicas. Su ventaja radica en que, por ejemplo, la parábola $(y - k) = a(x - h)^2$ se dibuja exactamente igual que la parábola $y = ax^2$ pero con su vértice en (h, k) en lugar del origen. En la forma canónica, decimos que la cónica está *trasladada* h unidades hacia la derecha y k unidades hacia arriba. Note que, por ejemplo, si tuviésemos un término $(x + 2)$, este se puede escribir como $(x - (-2))$; es decir $h = -2$, un desplazamiento horizontal de (-2) unidades a la derecha (2 unidades a la izquierda). En resumen, a todos los lugares geométricos que ya conocíamos se le agrega (h, k) .

- Tomemos la elipse de ecuación $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$. Ella está centrada en (h, k) con $x \in [h - a, h + a]$ e $y \in [k - b, k + b]$.

10. Tomemos la hipérbola de ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Ella está centrada en (h, k) con $x \in (-\infty, h-a] \cup [h+a, \infty)$. Sus asíntotas son $(y-k) = \pm \frac{b}{a}(x-h)$.

Rectas tangentes

- Una recta L es tangente a una curva C cuando $L \cap C$ es igual a un único punto $P(x_0, y_0)$. En ese caso decimos que L es tangente en P a la curva C .
- En general, si la recta tangente L pasa por un punto $P(x_0, y_0)$, la recta toma la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$; donde P puede o no estar dentro de la curva C de ecuación $C(x, y) = 0$. El problema a resolver es encontrar el valor de m para el cual el sistema:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ C(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Tiene solución única.

- Para el caso de una cónica, sabemos que sus ecuaciones se pueden escribir de la forma $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ con constantes apropiadas. Por lo que el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor $y = m(x - x_0) + y_0$, dado por la recta, dentro de la ecuación de la cónica, buscamos imponer que la ecuación cuadrática:

$$Ax^2 + B(m(x - x_0) + y_0)^2 + Dx + E(m(x - x_0) + y_0) + F = 0$$

Tenga solución única. El discriminante de esta ecuación será una expresión que contiene a m , x_0 e y_0 , lo que resumimos como $\Delta = \Delta(m, x_0, y_0)$. Por lo tanto, en el caso de una cónica se busca resolver la ecuación $\Delta(m, x_0, y_0) = 0$, de donde se puede despejar el valor de m .

- Cuando tenemos la ecuación de la cónica podemos determinar fácilmente la ecuación de la recta tangente por un punto $P(x_0, y_0)$ perteneciente a la cónica recordando la siguiente regla mnemotécnica:

- Los términos $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ se reemplazan por $(x_0-h)(x-h)$ y $(y_0-k)(y-k)$.
- Los términos $(x-h)$ y $(y-k)$ se reemplazan por:

$$\frac{(x_0-h) + (x-h)}{2} \quad \frac{(y_0-k) + (y-k)}{2}$$

De esta manera se tiene, por ejemplo, que:

- La recta tangente por $P(x_0, y_0)$ a la parábola $(y-k) = a(x-h)^2$ es:

$$\frac{(y_0-k) + (y-k)}{2} = a(x_0-h)(x-h)$$

- La recta tangente por $P(x_0, y_0)$ a la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ es:

$$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} + \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$$

- La recta tangente por $P(x_0, y_0)$ a la hipérbola $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ es:

$$\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$$

- Cabe recalcar que lo anterior es un resultado obtenido al resolver $\Delta(m, x_0, y_0) = 0$. Si no lo recuerda, siempre lo puede calcular.