MA1001-2 Introducción al Cálculo. Semestre 2014-2
Profesores: Natacha Astromujoff, Michal Kowalczyk
Profesores Auxiliares: Nicolás Tapia R., Nicolás Zalduendo V.

Tarea #1
Fecha de Entrega: 12 de Septiembre de 2014

Problemas

1. *a*) Demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a^3b + ab^3 \leq a^4 + b^4$

   b) (i) Si $a > b > 0$, demuestre que:
   $$a > \frac{(a+b)}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} > b$$
   (ii) Si $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 1$, demuestre que:
   $$ax + by \leq 1$$
   (iii) Muestre que $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, y úselo para demostrar que:
   $$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a + b + c,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

2. *a*) Sean $x, y \in [0, \infty)$ tales que $x + y = 1$. Argumentando cada paso, demuestre que:

   (i) $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{2}$

   (ii) $(x + x^{-1})^2 + (y + y^{-1})^2 \geq \dfrac{25}{2}$

   b) Resuelva las siguientes inecuaciones:

   (i) $\dfrac{|x-1|}{x+3} < 1$

   (ii) $\left|\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right| \leq 2$

   (iii) $|x - |x+1|| < 4$

   (iv) $||x+2| - 1| > |x|$

   (v) $x > ||x| + |x-1| + |x-2|| + 1$

   (vi) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} - |2x+1| < 1$

3. *a*) Muestre que la distancia de un punto $P = (\alpha, \beta)$ a la recta L de ecuación $y = mx + n$ está dada por:
   $$d(P, L) = \frac{|m\alpha + n - \beta|}{\sqrt{m^2+1}}$$

   b) Demostrar que para todo par de puntos P y Q, situados a un mismo lado de una recta L, la distancia del punto medio entre P y Q a la recta L, es el promedio de las distancias $d(P, L)$ y $d(Q, L)$.

   c) Consideremos la circunferencia de centro $C = (a, b)$ y radio r, y sea $P = (x_0, y_0)$ un punto cualquiera. Determine la(s) recta(s) tangente(s) a la circunferencia que pasan por P si:

   (i) P pertenece a la circunferencia.

   (ii) P es exterior a la circunferencia.

d) La distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $L : y = mx$ está dada por:

$$d(P, L) = \frac{|y_0 - mx_0|}{\sqrt{1 + m^2}} \text{ (no lo demuestre)}$$

Demuestre que el producto de las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola de ecuación $x^2 - k^2 y^2 = \alpha^2$ a sus asíntotas es constante y encuentre su valor.

Las asíntotas de una hipérbola de ecuación $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ son las rectas dadas por:

$$y - y_0 = \pm \tfrac{b}{a}(x - x_0)$$

4. *a*) (i) Clasificar los siguientes conjuntos del plano, decidir en cada caso si son o no cónicas, y de serlo, graficar:
   - $2x^2 + 3y^2 = 1$
   - $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -1$
   - $y^2 - 4y - x + 3 = 0$
   - Clasificar para cada $a \in \mathbb{R}$ el conjunto dado por la ecuación $x^2 + 4x + ay^2 + 1 = 0$

   (ii) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $x + 2y = 0$ y pasa por los puntos $P(4, 3)$ y $Q(0, 1)$

   (iii) Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 4 y concéntrica con $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$

   (iv) Considere la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Encontrar el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de la elipse tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) como vértice y sus lados son paralelos a los ejes cartesianos, tiene área máxima

   b) Considere la circunferencia C de ecuación $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ y el punto P de coordenadas $(5, 2)$. Determine (escriba la ecuación e identifique el conjunto) del lugar geométrico de los puntos medios de P y cada punto de C.

   c) Halle el valor de $b > 0$ para que la parábola de ecuación $y = x^2$ sea tangente a la elipse de ecuación

$$x^2 + \frac{(y - 2)^2}{b^2} = 1$$