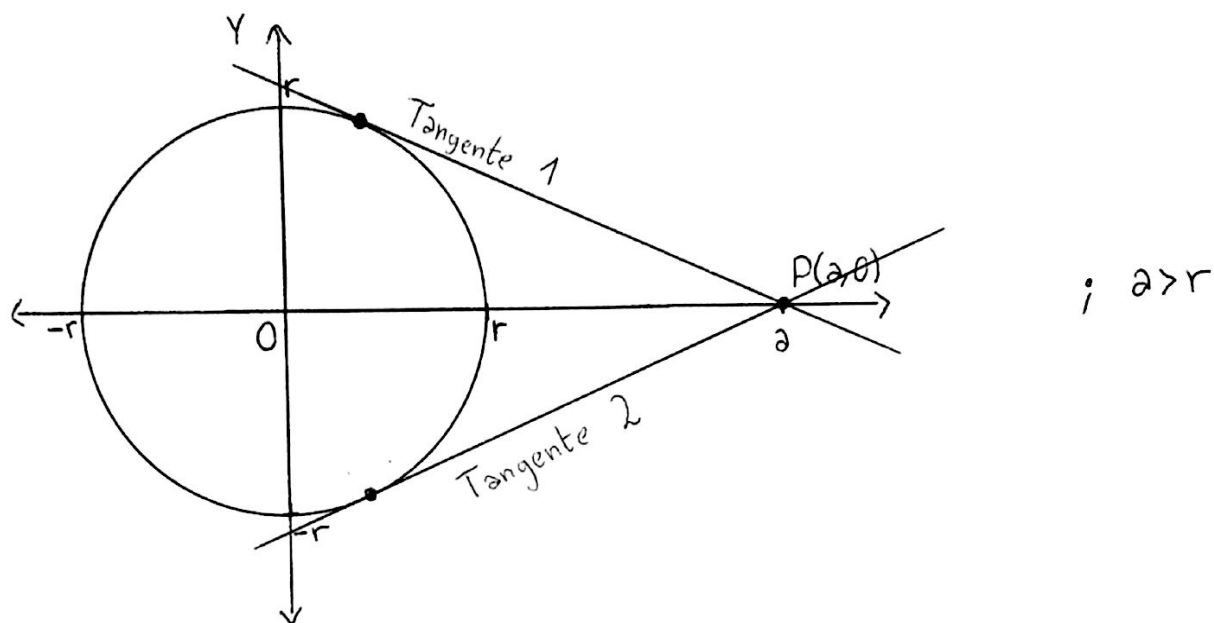


Auxiliar 3
Solución

P1) $C: x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$.

1.-



Ambas tangentes pueden modelarse como una recta que pasa por $P(a,0)$ con pendiente m_1 y m_2 respectivamente.

Tangente 1: $y - 0 = m_1(x - a)$

Tangente 2: $y - 0 = m_2(x - a)$

Note que por la orientación de las tangentes, $m_1 < 0$ y $m_2 > 0$.
(En el 1º caso la recta descende y en el 2º caso asciende).

Denotemos genéricamente por $y = m(x - a)$ a una recta tangente.
¿Qué ecuación cumple "m"? El valor de la pendiente debe ser tal que al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = m(x - a) \end{cases}$$

Se obtenga un único punto solución. (Note que resolver este sistema es intersectar la circunferencia con la recta tangente).

Podemos reemplazar el valor de "y" según la tangente en la ecuación de la circunferencia para obtener:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= r^2 \Leftrightarrow x^2 + (m(x-a))^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + m^2(x-a)^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + m^2(x^2 - 2ax + a^2) = r^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 - 2m^2ax + m^2a^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{(1+m^2)}_{\alpha} x^2 - \underbrace{2m^2a}_{\beta} x + \underbrace{(m^2a^2 - r^2)}_{\gamma} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0
 \end{aligned}$$

La solución única se tendrá si el discriminante es cero, es decir:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

Para que esto suceda, "m" debe satisfacer:

$$(2m^2a)^2 - 4(1+m^2)(m^2a^2 - r^2) = 0$$

De aquí podemos despejar "m".

$$\begin{aligned}
 (2m^2a)^2 - 4(1+m^2)(m^2a^2 - r^2) &= 0 \Leftrightarrow 4m^4a^2 - 4(m^2a^2 - r^2 + m^4a^2 - m^2r^2) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{4} \\
 &\Leftrightarrow m^4a^2 - m^2a^2 + r^2 - m^4a^2 + m^2r^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow r^2 = m^2a^2 - m^2r^2 = m^2(a^2 - r^2)
 \end{aligned}$$

Como $a > r$, en particular $a^2 - r^2 \neq 0$, por lo que despejando:

$$m^2 = \frac{r^2}{a^2 - r^2} \quad ; \text{ y como } a^2 - r^2 > 0,$$

$$m = \pm \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

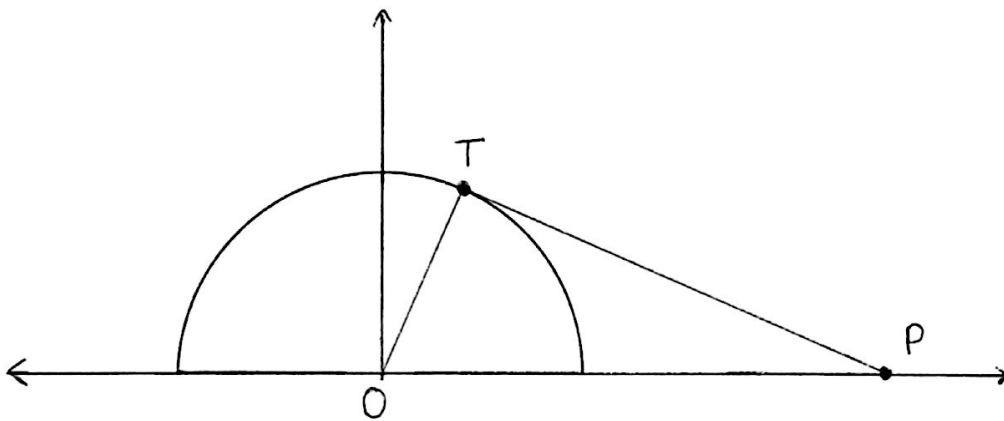
Aquí tenemos dos valores posibles de pendiente (uno + y otro -), lo que concuerda con nuestra observación de Tangente 1 y Tangente 2.

Finalmente las ecuaciones son:

$$\text{Tangente 1: } y = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a)$$

$$\text{Tangente 2: } y = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a)$$

2. Consideremos la Tangente 1: $y = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}(x - a)$.



Para demostrar que el $\triangle OTP$ es rectángulo en T , debemos mostrar que $OT \perp TP$, lo que es equivalente a:

$$m_{OT} \cdot m_{TP} = -1$$

Solo debemos conocer el valor de esas pendientes.

Ya sabemos que m_{TP} es la pendiente de la recta tangente:

$$m_{TP} = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad [\text{Note el signo "menos"}]$$

Y además calculando la pendiente entre $O(0,0)$ y $T(x_0, y_0)$

tenemos

$$m_{OT} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Pero ¿cuánto vale x_0 e y_0 ? Para ello terminemos de solucionar el sistema anterior:

Recordemos que teníamos

$$\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0 \quad ; \quad \Delta = 0 \quad ; \quad \begin{aligned} \alpha &= 1+m^2 \\ \beta &= 2m^2 a \\ \gamma &= m^2 a^2 - r^2 \end{aligned}$$

Puesto que $\Delta = 0$, la solución es $x_0 = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2m^2 a}{2(1+m^2)} = \frac{m^2 a}{1+m^2}$.

Recordando que estamos en el caso $m = \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ tenemos

$$x_0 = \frac{m^2 a}{1+m^2} = \frac{\frac{r^2}{a^2 - r^2} \cdot a}{1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}} \cdot \frac{\cancel{a^2 - r^2}}{\cancel{a^2 - r^2}} = \frac{ar^2}{a^2 - r^2 + r^2} = \frac{ar^2}{a^2} = \frac{r^2}{a}.$$

Y usando la ecuación de la tangente: $y_0 = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \left(\frac{r^2}{a} - a \right)$

$$\text{Luego } m_{OT} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{a}{r^2} \cdot \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \left(\frac{r^2}{a} - a \right) = \frac{-r}{r^2 \sqrt{a^2 - r^2}} (r^2 - a^2) = \frac{a^2 - r^2}{r \sqrt{a^2 - r^2}}$$

Finalmente:

$$m_{OT} \cdot m_{TP} = \frac{a^2 - r^2}{r \sqrt{a^2 - r^2}} \cdot \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{-\cancel{r}(a^2 - r^2)}{\cancel{r}(a^2 - r^2)} = -1 //$$

Por lo que $\triangle OTP$ es rectángulo en T .

A manera complementaria muestro un desarrollo alternativo:
Sabemos que la tangente tiene pendiente "m". Recordando la ecuación cuadrática $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$, la solución para el punto T es:

$$x_0 = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{m^2 a}{1+m^2}$$

Y usando la ecuación de la recta tangente

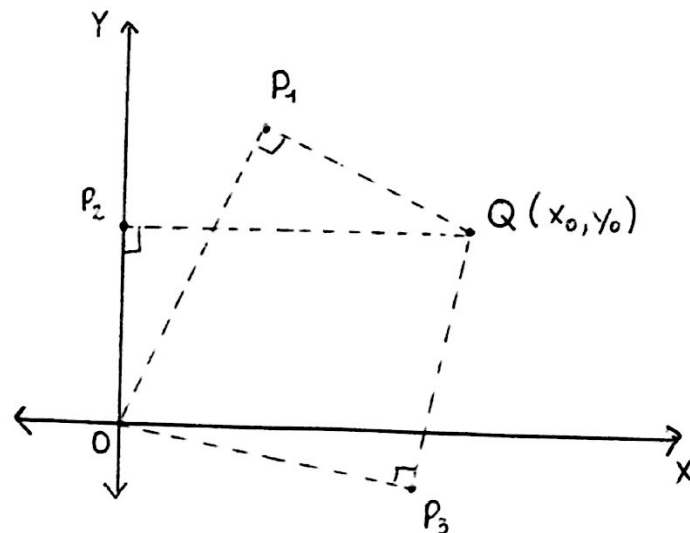
$$y_0 = m(x - a) = m\left(\frac{m^2 a}{1+m^2} - a\right) = m\left(\frac{\cancel{m^2 a} - a - \cancel{m^2 a}}{1+m^2}\right) = \frac{-am}{1+m^2}$$

Por lo que

$$m_{OT} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\frac{-am}{1+m^2}}{\frac{m^2 a}{1+m^2}} = \frac{-am}{m^2 a} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{m_{TP}}$$

Por lo que $m_{OT} = -\frac{1}{m_{TP}} \Leftrightarrow |m_{OT} m_{TP} = -1| //$

P2]



Q: Punto fijo
 P_1, P_2, P_3 : Posibles posiciones del punto P.

La condición que debe imponerse es que $OP \perp PQ$. Esto es equivalente a exigir

$$m_{OP} \cdot m_{PQ} = -1$$

Supongamos que Q es $Q(x_0, y_0)$, con x_0 e y_0 fijos, y que P es $P(x, y)$, con x e y variables.

$$m_{OP} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x} \quad ; \quad m_{PQ} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow m_{OP} \cdot m_{PQ} = -1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} \cdot \frac{y-y_0}{x-x_0} = -1 \quad / \cdot x(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow y(y-y_0) = -x(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow x(x-x_0) + y(y-y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x_0x + y^2 - y_0y = 0.$$

Esta forma nos sugiere una circunferencia ya que posee la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Para obtener certeza procedemos a completar cuadrados.

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 - x_0x &= x^2 - 2 \cdot \frac{x_0}{2} \cdot x = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{x_0}{2} x + \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 \\ &= \left(x - \frac{x_0}{2} \right)^2 - \frac{x_0^2}{4} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad y^2 - y_0y = \left(y - \frac{y_0}{2} \right)^2 - \frac{y_0^2}{4} \quad [\text{Es lo mismo que con "x"}]$$

Por lo que la ecuación que cumple el punto P es

$$\begin{aligned} x^2 - x_0x + y^2 - y_0y &= 0 \iff \left(x - \frac{x_0}{2} \right)^2 - \frac{x_0^2}{4} + \left(y - \frac{y_0}{2} \right)^2 - \frac{y_0^2}{4} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{x_0}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{2} \right)^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{4} \end{aligned}$$

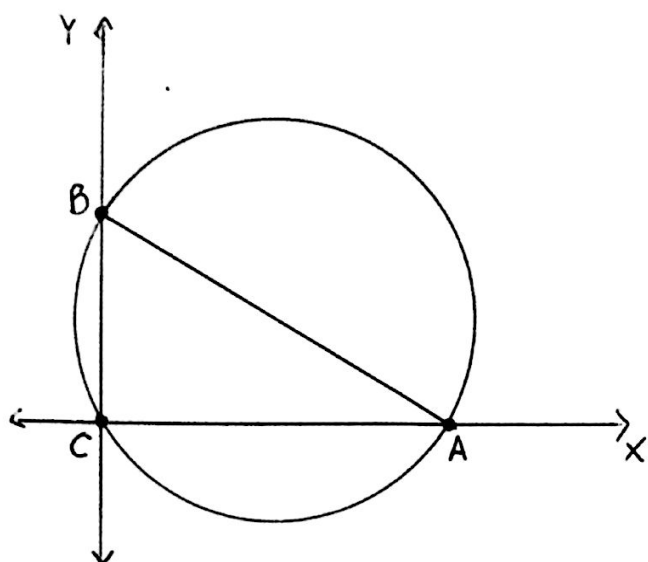
Note que gracias a que el término $\frac{x_0^2 + y_0^2}{4}$ es positivo, podemos escribir esta ecuación como

$$\left(x - \frac{x_0}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2}{4}} \right)^2$$

Que es la ecuación de una circunferencia con centro en $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2} \right)$ y radio $\sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2}{4}}$.

* Note que para nuestro gráfico inicial consideramos que Q estaba en el primer cuadrante, cosa que no lo decía el enunciado y no se puede asumir. Sin embargo, jamás pedimos tal cosa en nuestro análisis, por lo que el resultado es general. Por lo general esto ocurre, por lo que los dibujos siguen siendo una buena herramienta para saber qué estamos haciendo a pesar de asumir algunas cosas extras propias de bosquejar. Lo que no puede hacer es asumirlo en su análisis matemático.

P3]



$$A = (a, 0)$$

$$B = (0, b)$$

$$C = (0, 0)$$

* Note que consideramos $a > 0$ y $b > 0$. No es una complicación ya que solo se hizo para tener una idea visual del problema y no ocuparemos semejante hipótesis en lo que sigue.

Antes de continuar es válido preguntarse si a o b pueden ser nulos. Si $a = 0$, entonces $A = C$; análogamente si $b = 0$ entonces $B = C$. En cualquiera de los dos casos dejamos de tener 3 puntos distintos, lo que hace perder sentido al problema ya que no existiría el triángulo. Asumiremos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Para encontrar la ecuación de la circunferencia, supongamos que ella es solución de la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Solo debemos encontrar los valores de " h ", " v " y " r ". Para ello necesitamos 3 ecuaciones distintas. Puesto que sabemos que pertenecen a la circunferencia los puntos distintos A, B y C , tendremos que se debe cumplir:

- A está en la circunferencia:

$$(a-h)^2 + (0-v)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ah + h^2 + v^2 = r^2$$

- B está en la circunferencia:

$$(0-h)^2 + (b-v)^2 = r^2 \Leftrightarrow h^2 + b^2 - 2bv + v^2 = r^2$$

- C está en la circunferencia:

$$(0-h)^2 + (0-v)^2 = r^2 \Leftrightarrow h^2 + v^2 = r^2$$

Luego tenemos el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\begin{array}{l} (1) \quad a^2 - 2ah + h^2 + v^2 = r^2 \\ (2) \quad b^2 - 2bv + h^2 + v^2 = r^2 \\ (3) \quad h^2 + v^2 = r^2 \end{array}$$

El sistema presenta la facilidad de que $(h^2 + v^2 = r^2)$, por lo que (1) y (2) se expresan simplemente como (cancelando r^2 con $(h^2 + v^2)$):

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ah = 0 \\ b^2 - 2bv = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} / \cdot \frac{1}{a} \\ / \cdot \frac{1}{b} \end{array} \right. ; \text{ ya que } a \neq 0, b \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a - 2h = 0 \\ b - 2v = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} h = \frac{a}{2} \\ v = \frac{b}{2} \end{array}$$

Y recordando que $r^2 = h^2 + v^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$; tenemos que la ecuación de la circunferencia es

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2$$

Cuyo centro es $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y cuyo radio es $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

Recordando que el punto medio entre dos puntos es el promedio de sus coordenadas, vemos que el punto medio entre A y B es

$$M_{AB} = \left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Que es justamente el centro.