

Auxiliar 2

Solución

P1] p.d.q: $\frac{x^2}{d} + 1 - \frac{(x+1)^2}{d+1} \geq 0$

Veamos que, como $d > 0$

$$\frac{x^2}{d} + 1 - \frac{(x+1)^2}{d+1} \geq 0 \quad / \cdot d(d+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(d+1) + d(d+1) - d(x+1)^2 \geq 0$$

Pero
$$\begin{aligned} x^2(d+1) + d(d+1) - d(x+1)^2 &= dx^2 + x^2 + d^2 + d - d(x^2 + 2x + 1) \\ &= dx^2 + x^2 + d^2 + d - dx^2 - 2dx - d \\ &= x^2 - 2dx + d^2 \\ &= (x-d)^2 \end{aligned}$$

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, por lo que para $(x-d) \in \mathbb{R}$:

$$(x-d)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2(d+1) + d(d+1) - d(x+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{d} + 1 - \frac{(x+1)^2}{d+1} \geq 0 //$$

P2]

$$\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x-2)} \geq 0$$

ya está con un cero a un lado.
ya está en una sola fracción.
El denominador ya está factorizado.

¿Se puede factorizar en $\mathbb{R}$ el trinomio del numerador? Veamos Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

$\Rightarrow$ no cambia de signo ni se anula.

(no se factoriza en $\mathbb{R}$)

Además $a > 0 \Rightarrow x^2+x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Luego podemos simplificar.

$$\frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \geq 0$$

Pts críticos: 0, 1, 2

(note que no se puede considerar ninguno en la solución).

	$-\infty$	0	1	2	∞
x		-	*	+	+
x-1		-	-	*	+
x-2		-	-	-	*
Todo	-	+	-	+	

$$\text{Cjto solución} = (0, 1) \cup (2, +\infty).$$

p3]

$$| |x| - a | < 1 \xLeftrightarrow{\text{Prop}} \overbrace{-1 < |x| - a}^{(i)} < \underbrace{1}_{(ii)}$$

(i) $-1 < |x| - a \quad / + a$
 $a - 1 < |x|$; aquí es posible encontrar solución para cualquier valor de "a".

(ii) $|x| - a < 1 \quad / + a$
 $|x| < a + 1$; aquí se vuelve peligroso ya que un módulo nunca estará por debajo del cero:
 $|x| \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}.$

Por lo tanto necesitamos que $(a+1) > 0$ para que exista $x \in \mathbb{R}$ que cumpla (ii). Luego si imponemos

$$a+1 \leq 0$$

Tendremos $|x| < a+1 \leq 0 \Rightarrow |x| < 0 \Rightarrow$ no hay solución.

Luego necesitamos $a+1 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1]$.

P4]

$$1.- \sqrt{2x-|x|} \leq |x-2|$$

Note que para que esta desigualdad tenga sentido necesitamos que:

- Raíz no puede ser negativa $\Rightarrow |x-2| \geq 0$
- El argumento de la raíz no puede ser negativo: $\Rightarrow 2x-|x| \geq 0$.

La primera condición se cumple siempre; para la segunda resolvemos:

$$\begin{aligned} 2x-|x| &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq |x| \\ \Leftrightarrow -2x &\leq x \leq 2x \quad [\text{prop módulo}] \\ \Leftrightarrow -2x &\leq x \wedge x \leq 2x \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 3x \wedge 0 \leq x \\ \Leftrightarrow x &\geq 0. \end{aligned}$$

Lo que significa que requerimos que $x \in [0, +\infty)$.

$$\boxed{\text{Restricción} = [0, +\infty)}$$

Ahora, y además porque $0 \leq \sqrt{2x-|x|} \leq |x-2|$, podemos elevar al cuadrado:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-|x|} \leq |x-2| &\Leftrightarrow 2x-|x| \leq |x-2|^2 = (x-2)^2 = x^2-4x+4 \\ &\Leftrightarrow 2x-|x| \leq x^2-4x+4 \quad ; \text{ pero } x \in [0, +\infty) \\ &\Leftrightarrow 2x-x \leq x^2-4x+4 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2-5x+4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{2 números que suman } (-5) \\ \text{y multiplican } +4. \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)(x-4) \end{aligned}$$

Pts críticos: 1 y 4 (incluyéndolos). Como el coef de x^2 es positivo, la expresión tendrá ese signo hacia los infinitos. Luego:

$$\text{Cjto solución} = \text{Restricción} \cap ((-\infty, 1] \cup [4, +\infty)) = [0, 1] \cup [4, \infty) //$$

P41

$$2. \quad \left| \frac{x^2 - 6x + 7}{x - 1} \right| < \frac{2}{x - 1}$$

Para que esto tenga sentido, necesitamos que

$$\frac{2}{x-1} > 0 \quad (\text{note que tampoco puede ser cero})$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \quad (x \neq 1)$$

Por lo que Restricción = $(1, \infty)$. Antes de seguir, note que si $x \in \text{Restricción} \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$. Luego simplificamos un poco:

$$\left| \frac{x^2 - 6x + 7}{x - 1} \right| < \frac{2}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{|x^2 - 6x + 7|}{|x - 1|} < \frac{2}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x^2 - 6x + 7|}{x - 1} < \frac{2}{x - 1} \quad / \cdot (x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 6x + 7| < 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-2 < x^2 - 6x + 7}_{(i)} < \underbrace{2}_{(ii)} \quad [\text{prop. módulo}]$$

Buscamos $\text{Sol}(i)$ y $\text{Sol}(ii)$. Recuerde que $\text{Cjto sol} = \text{Sol}(i) \cap \text{Sol}(ii)$.

$$(i) \quad -2 < x^2 - 6x + 7$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 0 < (x - 3)^2 \rightarrow \text{Esto es correcto excepto para } x = 3.$$

$$\therefore \text{Sol}(i) = \text{Restricción} \setminus \{3\} = (1, \infty) / \{3\}$$

$$(ii) \quad x^2 - 6x + 7 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \quad \left. \begin{array}{l} 2 \text{ números que sumen } (-6) \\ \text{y multipliquen } (+5). \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 < 0 \quad [\text{ya que } (x - 1) > 0 \text{ si } x \in \text{Restricción}]$$

$$\Leftrightarrow x < 5$$

$$\therefore \text{Sol}(ii) = \text{Restricción} \cap (-\infty, 5) = \boxed{(1, 5)} \Rightarrow \text{Cjto sol} = (1, 3) \cup (3, 5) //$$

P4] 3.- $\frac{||x| - |x-2||}{x^2-1} \leq 2.$

Para deshacernos de los módulos interiores, usemos puntos críticos:

$$|x|=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$|x-2|=0 \Leftrightarrow x=2.$$

	$-\infty$	0	2	∞
$ x $		$-x$	x	x
$ x-2 $		$2-x$	$2-x$	$x-2$
$ x - x-2 $		-2	$2x-2$	2

Luego

$\underline{x \in (-\infty, 0]}$ $\frac{ x - x-2 }{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{ -2 }{x^2-1} \leq 2$ $\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} \leq 2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} \leq 1$	$\underline{x \in (0, 2]}$ $\frac{ x - x-2 }{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{ 2x-2 }{x^2-1} \leq 2$ $\Leftrightarrow \frac{ x-1 }{x^2-1} \leq 1$	$\underline{x \in (2, +\infty)}$ $\frac{ x - x-2 }{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{ 2 }{x^2-1} \leq 2$ $\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} \leq 2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} \leq 1.$
---	--	---

Por lo que debemos resolver:

$$(i) \quad \frac{1}{x^2-1} \leq 1 \quad ; \quad \text{si } x \in \overbrace{(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)}^{I_1}$$

$$(ii) \quad \frac{|x-1|}{x^2-1} \leq 1 \quad ; \quad \text{si } x \in \underbrace{(0, 2]}_{I_2}$$

(i) $\frac{1}{x^2-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - (x^2-1)}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x^2-1} \leq 0$ Suma por diferencia.

$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$ Pts críticos: $-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$.

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\sqrt{2}-x$		+	+	+	+	-
$\sqrt{2}+x$		-	+	+	+	+
$x-1$		-	-	-	+	+
$x+1$		-	-	+	+	+
Todo		-	+	-	+	-
		✓		✓		✓

Solución en $\mathbb{R}$: $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup (-1, 1) \cup [\sqrt{2}, \infty)$

Solución en I_1 : hay que intersectar con I_1

$$= (-\infty, -\sqrt{2}] \cup (-1, 0] \cup [2, \infty)$$

(ii) $\frac{|x-1|}{x^2-1} \leq 1$; primero, $x \neq 1$. (Recuerdo que aquí estamos en $I_2 = (0, 2]$)

• Puntos críticos del módulo: ($x=1$)

• $(0, 1)$: $\frac{|x-1|}{x^2-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+1} \leq 1 \checkmark \forall x \in (0, 1)$

• $(1, 2)$: $\frac{|x-1|}{x^2-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq 1 \quad / (x+1) > 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \Leftrightarrow 0 \leq x \checkmark \forall x \in (1, 2)$

Luego solución en I_2 : $(0,1) \cup (1,2)$.

La solución final es la unión, lo que significa:

$$\begin{aligned}\text{Cjto sol} &= \text{Sol}_{I_1} \cup \text{Sol}_{I_2} \\ &= \left((-\infty, -\sqrt{2}] \cup (-1, 0] \cup [2, \infty) \right) \cup \left((0,1) \cup (1,2) \right) \\ &= (-\infty, -\sqrt{2}] \cup (-1, 1) \cup (1, 2) //\end{aligned}$$