

Auxiliar 1 Solución

p1)

1.- Probaremos que $x^{-1}y^{-1}$ es un inverso multiplicativo (recíproco) de $x \cdot y$. Veamos que:

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y)(x^{-1}y^{-1}) &= (y \cdot x)(x^{-1}y^{-1}) && / \text{Ax. conmut} \\
 &= y[x(x^{-1}y^{-1})] && / \text{Ax. asoc} \\
 &= y[(xx^{-1})y^{-1}] && / \text{Ax. asoc} \\
 &= y(1 \cdot y^{-1}) && / \text{Ax. inversos} \\
 &= yy^{-1} && / \text{Ax. neutro} \\
 &= 1 && / \text{Ax. inversos.}
 \end{aligned}$$

Luego $x^{-1}y^{-1}$ es un recíproco de $x \cdot y$ al igual que $(x \cdot y)^{-1}$.
Por la unicidad del recíproco se debe tener

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} //$$

Veamos entonces que

$$\begin{aligned}
 c(ac+d)^{-1} &= c(ac+d \cdot 1)^{-1} && / \text{Ax. neutro} \\
 &= c(ac+d \cdot (c^{-1}c))^{-1} && / \text{Ax. inversos} \\
 &= c(ac+(dc^{-1})c)^{-1} && / \text{Ax. asoc} \\
 &= c[(a+dc^{-1})c]^{-1} && / \text{Ax. distr} \\
 &= c[(a+dc^{-1})^{-1}c^{-1}] && / \text{Prop. demostrada} \\
 &= c[c^{-1}(a+c^{-1}d)^{-1}] && / \text{Ax. conmut dos veces} \\
 &= [cc^{-1}](a+c^{-1}d)^{-1} && / \text{Ax. asoc} \\
 &= 1 \cdot (a+c^{-1}d)^{-1} && / \text{Ax. inversos} \\
 &= (a+c^{-1}d)^{-1} // && / \text{Ax. neutro}
 \end{aligned}$$

P11

2: Probaremos que $-a-b$ es un opuesto de $a+b$. Veamos que:

$$\begin{aligned}(a+b) + (-a-b) &= (a+b) + (-b-a) && /Ax. conmutativa \\&= a + [b + (-b-a)] && /Ax. asociativa \\&= a + [(b-b) - a] && /Ax. asociativa \\&= a + [0 - a] && /Ax. inversos \\&= a - a && /Ax. neutro \\&= 0 && /Ax. inversos\end{aligned}$$

Luego $(-a-b)$ es un opuesto de $(a+b)$ al igual que $-(a+b)$.
Por la unicidad del opuesto necesariamente $-(a+b) = -a-b$. //

Veamos entonces que:

$$\begin{aligned}-a-(b-c) &= -a + (-b - (-c)) && /Prop. demostrada \\&= (-a-b) - (-c) && /Ax. asociativa \\&= -(a+b) - (-c) && /Prop. demostrada.\end{aligned}$$

Demostremos que $-(-c) = c$. En efecto, notemos que $(-c) + c = 0$ por ax. inversos, por lo que c es opuesto de $(-c)$, al igual que $-(-c)$. Por unicidad, necesariamente $-(-c) = c$. Luego

$$-a-(b-c) = -(a+b) - (-c) = -(a+b) + c // /Prop. demostrada.$$

P2] Sean $a, b \in \mathbb{R}$, a, b no nulos. Notemos que:

$$a^2 + ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + b \cdot a + b^2 \rightarrow \text{cuadrática en "a"}$$

(Dada la simetría, también puede ser cuadrática en "b").

Buscamos que esta expresión nunca cambie de signo (se mantenga positiva), lo que ocurrirá si su discriminante es negativo.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot b^2 = -3b^2$$

Como $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ [prop. del apunte], en particular

$$\begin{array}{l} b^2 \geq 0 \quad / \cdot -3 \\ -3 < 0 \Rightarrow -3b^2 \leq 0 \quad [\text{prop. del apunte}] \end{array}$$

Pero $-3b^2 \leq 0 \Leftrightarrow -3b^2 < 0 \vee -3b^2 = 0$. Dado nuestro problema, nos gustaría descartar el caso $-3b^2 = 0$. Como $b \neq 0$, nuestra intuición nos dice que ese caso se descarta, pero debemos demostrarlo (es decir, debemos demostrar que $b = 0$ es equivalente a $b^2 = 0$, de modo que si uno no se cumple, el otro tampoco). PDQ: $b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

$$\Rightarrow] \quad b^2 = 0 \Leftrightarrow b \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0 \vee b = 0 \quad [\text{prop. apunte}] \\ \Rightarrow b = 0$$

$$\Leftarrow] \quad b = 0 \Rightarrow b \cdot b = 0 \quad [\text{prop. absorbente del cero}] \\ \Rightarrow b^2 = 0 \quad \downarrow \text{apunte.}$$

$$\therefore b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

Luego, como $b \neq 0$, $-3b^2 \neq 0$ y $-3b^2 = \Delta < 0$. Luego

$$a^2 + ab + b^2 > 0 \quad [\text{prop. apunte}].$$

Ahora veamos que:

$$a^3 = b^3 \Leftrightarrow a^3 - b^3 = 0 \quad [\text{def}]$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = 0 \quad [\text{factorización conocida}]$$

$$\Rightarrow a-b=0 \quad \vee \quad a^2+ab+b^2=0 \quad [\text{prop apunte}]$$

Pero ya demostramos que $a^2+ab+b^2 > 0$, en particular no se cumple $a^2+ab+b^2=0$ por tricotomía. Luego necesariamente

$$a-b=0$$

Lo que es justamente $a=b$.

Lo demostrado es válido $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para generalizar a $\mathbb{R}$ solo nos falta el caso $a=0$ o $b=0$. Dada la simetría del problema, al analizar el caso $a=0$ estaremos listos. Sea entonces $a=0$. Luego

$$a^3 = a^2 \cdot a = 0 \quad [\text{prop absorbente de 0}].$$

$$\Rightarrow (a^3 = b^3 \Rightarrow b^3 = 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } b^3 = 0 &\Leftrightarrow (b \cdot b) \cdot b = 0 \Rightarrow b \cdot b = 0 \quad \vee \quad b = 0 \quad [\text{prop apunte}] \\ &\Rightarrow (b=0 \vee b=0) \vee b=0 \quad [\text{prop apunte}] \\ &\Rightarrow b=0 \end{aligned}$$

Y como $a=0$, tenemos que $a=b$.

Por lo tanto $a^3 = b^3 \Rightarrow a=b$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

P3) Nos piden demostrar que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$. Si manipulamos un poco la expresión:

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \Leftrightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$

Lo último lo sabemos verdadero puesto que es un cuadrado, pero esta no es una demostración. Esta es la demostración (comenzar con lo verdadero y deducir lo que se quiere):

$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ [prop. apunte], y como $(a-b) \in \mathbb{R}$, tenemos en particular que $(a-b)^2 \geq 0$.

Pero:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad / + 2ab \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad / \cdot \frac{1}{2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \quad // \end{aligned}$$

Usaremos esto para probar que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \quad ; \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$$

Note primero la presencia de tres factores bastante similares en estructura en la izquierda y la presencia de $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ a la derecha. Esta coincidencia nos sugiere intentar algo utilizando el teorema:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < y \\ 0 < u < v \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot u < y \cdot v$$

con 3 desigualdades. Podemos reescribir la desigualdad de forma equivalente como:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \leq abc$$

Estos factores hacen bastante patente el parentesco entre, por ejemplo, $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$ de la desigualdad probada con $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, con la salvedad de los cuadrados.

Esta no es una complicación, puesto que al ser $a, b, c > 0$, podemos escribir

$$\frac{a+b}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2}; \quad \frac{b+c}{2} = \frac{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2}{2}; \quad \frac{c+a}{2} = \frac{(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2}{2}$$

De donde se hace natural usar la propiedad demostrada para tener:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a}\sqrt{b} > 0$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{b}\sqrt{c} > 0$$

$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{c}\sqrt{a} > 0$$

[teorema]

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{b+c}{2}\right) \left(\frac{c+a}{2}\right) \geq \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{c}\sqrt{a} = abc \quad / \cdot 8$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc //$$

Recomendación = Trate de manipular lo menos posible las desigualdades en busca de simetrías, posibles caminos que conducirían a ese resultado, y desigualdades más básicas que se saben verdaderas.

Es crucial para esto la práctica (experiencia) y el manejo de los teoremas de suma y multiplicación de desigualdades.

P4] Sea $a > 0$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
 Nos piden demostrar $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$. Los cuadrados y el 2 nos recuerdan la desigualdad:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

En donde si se reemplaza "b" por " $\frac{1}{a}$ " se tiene perfecta coincidencia. Luego la demostración es:

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$; en particular para $(a - \frac{1}{a}) \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$(a - \frac{1}{a})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \geq 0 \quad / + 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \quad //$$

Veamos ahora que $a^3 + \frac{1}{a^3} \geq 2$. Notemos que:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})(a^2 - a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}) = (a + \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1)$$

Nos gustaría acotar ambos factores para usar la multiplicación de desigualdades. Es inmediato que:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2 \quad [\text{ya demostrado}]$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \geq 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \geq 1. \quad (*)$$

Solo nos falta acotar $(a + \frac{1}{a})$. Note su parecido con $(a^2 + \frac{1}{a^2})$. La prop. que demostramos era válida para cualquier $a > 0$. Nada nos impide formar los cuadrados que faltan con la ayuda de la raíz cuadrada.

Luego $a + \frac{1}{a} = (\sqrt{a})^2 + \frac{1}{(\sqrt{a})^2} \geq 2$ [prop. demostrada] (**)

Juntando (*) y (**) tenemos

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 1 \geq 1 > 0$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 > 0$$

[teorema]

$$\Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right) \geq 2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} \geq 2 //$$

P5

$$1. A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x(x+2) < \frac{1}{3}(x^2+x+3) \quad \vee \quad x^2 \geq 9 \right\}$$

(i) "Unión" (ii)

$$i) \quad x(x+2) < \frac{1}{3}(x^2+x+3) \quad / \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 3x(x+2) < x^2+x+3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+6x < x^2+x+3 \quad / + \quad -x^2-x-3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x-3 < 0 \quad / \cdot 2 \quad \left[\text{esto es para que } 2x^2 \text{ sea } (2x)^2 \text{ y podamos formar un cuadrado} \right]$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2+5 \cdot (2x)-6 < 0$$

* Dos números que sumen +5 y multipliquen -6 son +6 y -1.

$$\Leftrightarrow (2x+6)(2x-1) < 0 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(2x-1) < 0 \quad \Rightarrow \text{Puntos críticos: } \begin{matrix} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

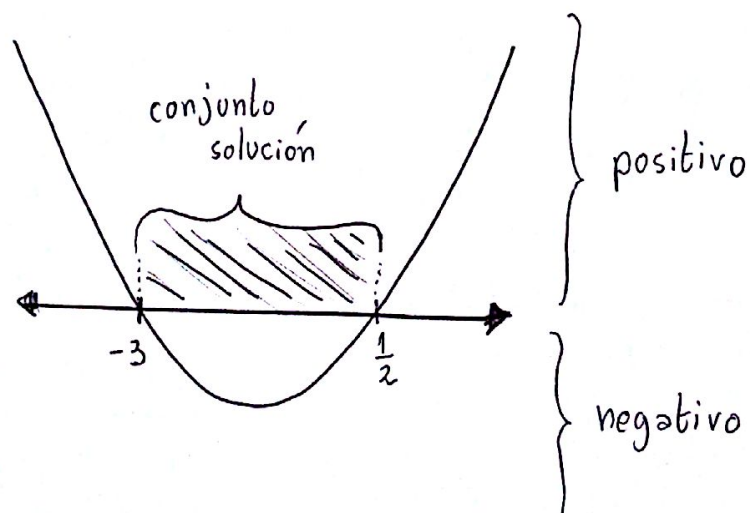
	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$x+3$	-	*	+	+
$2x-1$	-	-	*	+
Todo	+	-	+	

✓

$$\Rightarrow \text{Sol: } (-3, \frac{1}{2})$$

abierta

Otra forma de verlo:
(parábola)



$$ii) \quad x^2 \geq 9 \quad / + - 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3^2 \geq 0 \quad [\text{suma por su diferencia es diferencia de cuadrados}]$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \text{Puntos críticos: } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

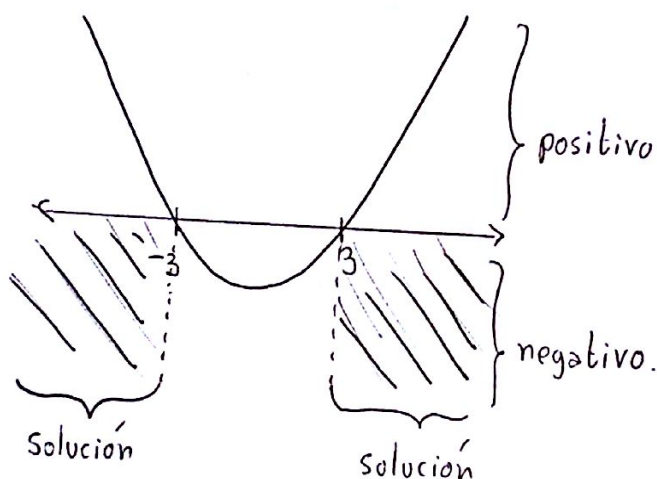
$$x-3=0 \Rightarrow x=3.$$

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
$x+3$		-	*	+
$x-3$		-	*	+
Todo	+	-	+	

$$\Rightarrow \text{Sol}_{ii} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

↓ ↓
Cerrado
en estos
extremos.

Otra forma de verlo:
(parábola)



Luego:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : x \in \text{Sol}_i \vee x \in \text{Sol}_{ii} \} = \text{Sol}_i \cup \text{Sol}_{ii}$$

$$= (-3, \frac{1}{2}) \cup \left((-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \right) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [\frac{1}{2}, 3)$$

↖ equivalente ↗

Sol_i =



P5

$$2. B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} x \geq 0 \quad (i) \\ 4 - 4x \geq 3(x^2 - 1) \quad (ii) \end{array} \right\}$$

"intersección"

i) $x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty) \Rightarrow \text{Sol}_i = [0, +\infty)$

ii) $4 - 4x \geq 3(x^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x \geq 3x^2 - 3 \quad / + -4 + 4x$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 3x^2 + 4x - 7 \quad / \cdot 3 \quad (\text{para que } 3x^2 \text{ sea } (3x)^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq (3x)^2 + 4(3x) - 21$$

* Dos números que sumen +4 y multipliquen -21 son +7 y -3.

$$\Leftrightarrow 0 \geq (3x+7)(3x-3) \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq (3x+7)(x-1) \Rightarrow \text{Ambos críticos: } 3x+7=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

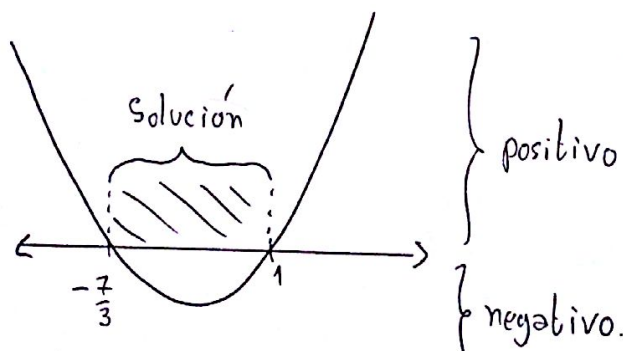
	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	1	$+\infty$
$3x+7$		-	+	+
$x-1$		-	-	+
Todo	+	-	+	

✓

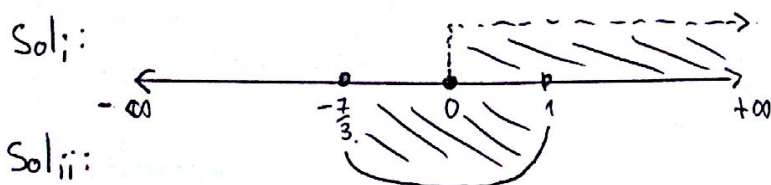
$$\Rightarrow \text{Sol}_{ii} = \left[-\frac{7}{3}, 1 \right]$$

cerrado.

Otra forma de verlo:
(parábola)



Luego $B = \{ x \in \text{Sol}_i \wedge x \in \text{Sol}_{ii} \} = \text{Sol}_i \cap \text{Sol}_{ii} = [0, +\infty) \cap \left[-\frac{7}{3}, 1 \right] = [0, 1]$.



P6] 1.- $a > 0$.

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} < a \quad ; \quad (x^2 + a^2) \text{ es de signo conocido. En efecto.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \\ a > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + a^2 > 0$$

ya que por lo menos
"a" no será cero.

Luego multiplicamos por $(x^2 + a^2) > 0$,

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} < a \quad / \cdot (x^2 + a^2) > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2 < a(x^2 + a^2) = ax^2 + a^3 \quad / + -ax^2 - a^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - a^2 - ax^2 - a^3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (1-a)x^2 - a^2(1+a) < 0 \quad (*)$$

Factor conflictivo.

Caso $a=1$: En este caso la desigualdad (*) se reduce a:

$$\begin{aligned} (1-a)x^2 - a^2(1+a) < 0 &\Leftrightarrow 0 \cdot x^2 - 1 \cdot (1+1) < 0 \\ &\Leftrightarrow -2 < 0 \end{aligned}$$

Lo cual es siempre cierto, sin importar el valor de x .

Luego cjo solución = $\mathbb{R}$.

Caso $a > 1$: En este caso $(1-a) < 0$ y al dividir tenemos:

$$\begin{aligned} (1-a)x^2 - a^2(1+a) < 0 &/ \cdot \frac{1}{1-a} \\ x^2 - a^2 \frac{1+a}{1-a} > 0 &\Leftrightarrow x^2 > a^2 \frac{1+a}{1-a} \end{aligned}$$

Pero $a^2 \frac{1+a}{1-a} < 0$ cuando $a > 1$, y $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que

$$x^2 \geq 0 > a^2 \frac{1+a}{1-a} \Rightarrow x^2 > \frac{a^2(1+a)}{1-a} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego cjo solución = $\mathbb{R}$.

Caso $0 < a < 1$: En este caso $(1-a) > 0$ y al dividir (*) tenemos:

$$(1-a)x^2 - a^2(1+a) < 0 \quad / \cdot \frac{1}{1-a}$$

$$x^2 - a^2 \frac{1+a}{1-a} < 0$$

Ya que $a^2 \frac{1+a}{1-a} > 0$ cuando $0 < a < 1$, existe $\sqrt{a^2 \frac{1+a}{1-a}}$ en $\mathbb{R}$ y

tenemos:

$$x^2 - a^2 \frac{1+a}{1-a} < 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(a \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \right)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + a \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \right) \left(x - a \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \varphi)(x - \varphi) < 0$$

Donde $\varphi = a \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$ por simplicidad en la escritura. Los puntos

críticos son $x + \varphi = 0 \Rightarrow x = -\varphi$
 $x - \varphi = 0 \Rightarrow x = +\varphi$

	$-\infty$	$-\varphi$	φ	$+\infty$
$x + \varphi$	-	*	+	+
$x - \varphi$	-	-	*	+
Todo	+	-	+	

$$\Rightarrow \text{Cjto sol} = (-\varphi, \varphi)$$

↙ ↘
abierto

En resumen

$$a \geq 1 \Rightarrow \text{Cjto solución} = \mathbb{R}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \text{Cjto solución} = \left(-a \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}, a \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \right) //$$

P6] 2. $\frac{2}{4-x} > x-1$; puesto que no conocemos el signo de $(4-x)$, no podemos multiplicar por esto inmediatamente.

Para no complicar la ecuación innecesariamente, simplemente dejemos todo a un lado.

$$\frac{2}{4-x} > x-1 \quad / + - \frac{2}{4-x} = \frac{2}{x-4}$$

$$\Leftrightarrow 0 > x-1 + \frac{2}{x-4}$$

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{(x-1)(x-4) + 2}{x-4}$$

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{x^2 - 5x + 4 + 2}{x-4} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-4}$$

* Dos números que sumen -5 y multipliquen $+6$ son -2 y -3 .

$$\Leftrightarrow 0 > \frac{(x-2)(x-3)}{x-4} \Rightarrow \text{Puntos críticos: } \begin{aligned} x-2=0 &\Rightarrow x=2 \\ x-3=0 &\Rightarrow x=3 \\ x-4=0 &\Rightarrow x=4. \end{aligned}$$

	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$x-2$		-	*	+	+
$x-3$		-	-	*	+
$x-4$		-	-	-	*
Todo	-	+	-	+	
		✓		✓	

$\Rightarrow$ Cjto solución = $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ //

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
abierto