

MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semana 2

Axiomas de Orden

1. Tricotomía en $\mathbb{R}_+^*$: $(\forall x \in \mathbb{R})$ se cumple solo una de estas proposiciones:
 - $x \in \mathbb{R}_+^*$ (se dice que x es positivo)
 - $(-x) \in \mathbb{R}_+^*$ (se dice que x es negativo)
 - $x = 0$
2. Clausura en $\mathbb{R}_+^*$: $x, y \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow (x + y), (x \cdot y) \in \mathbb{R}_+^*$

Relaciones de Orden

1. $x < y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}_+^*$
2. $x > y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$
3. $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$
4. $x \geq y \Leftrightarrow x > y \vee x = y$

Propiedades

1. x es positivo $\Leftrightarrow x > 0$
2. x es negativo $\Leftrightarrow x < 0$
3. Tricotomía: $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ se cumple solo una de estas proposiciones:
 - $x < y$
 - $x > y$
 - $x = y$
4. $x < y \Rightarrow x + a < y + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
5. $x < y \Rightarrow$
 - Si $a > 0$, $ax < ay$
 - Si $a < 0$, $ax > ay$

Se debe conocer el signo de a si se desea multiplicar una desigualdad (o dividir, que es una operación equivalente).
6. $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
7. $(x < y) \wedge (u < v) \Rightarrow x + u < y + v$
8. $(0 < x < y) \wedge (0 < u < v) \Rightarrow xu < yv$
Cuando x o u pueden ser nulos (es decir, hay un $\leq$ en lugar de un $<$) entonces se tendrá que $xu \leq yv$.
9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
 - Mismos signos $\Rightarrow xy > 0$
 - Signos opuestos $\Rightarrow xy < 0$
10. El recíproco de x tiene el mismo signo de x .
11. En $\mathbb{R}_+^*$, los recíprocos cumplen la desigualdad contraria:
 $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$

La expresión cuadrática

1. Es de la forma $ax^2 + bx + c$. $\Delta = b^2 - 4ac$ es el **discriminante**. Si $\Delta < 0$ entonces la expresión siempre posee el mismo signo que a . Si $\Delta \geq 0$ la expresión se anula en:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Para los iniciados en las parábolas, la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, por lo que los cambios de signos pueden verificarse fácilmente de forma gráfica.

Inecuaciones

1. Una inecuación es una relación de desigualdad en las que existe alguna incógnita. Nos focalizaremos en inecuaciones de una sola incógnita.
2. Resolver una inecuación de una incógnita es encontrar el mayor subconjunto de los números reales en donde puede existir la incógnita de modo que verifique la desigualdad. A este conjunto lo denominamos **conjunto solución**.
3. Receta para inecuaciones de grado mayor a uno:
 - *Acumular* todas los términos a un lado de la inecuación, de modo que en el otro solo quede el cero. De este modo, nos preocupamos de saber solamente si estamos sobre o bajo el cero, que es en definitiva preguntarse por el signo de la expresión completa.
 - Factorizar la expresión de modo que cada factor no presente dificultades para conocer su signo en intervalos (intentar que solo queden expresiones de grado 1).
 - Un caso particular de expresión es la expresión cuadrática de discriminante negativo, que no hace falta factorizarla para conocer su signo, puesto que siempre es positiva o negativa. Conociendo su signo podemos simplificarla de la inecuación o bien considerarla en el análisis con su signo constante.
 - Buscar todos los valores en los cuales los factores se anulan. Estos son los **puntos críticos**. Estos puntos inducen una partición de los números reales en intervalos. En cada intervalo la expresión tiene un determinado signo que se deduce de los signos de cada uno de los factores.
 - Formar el conjunto solución seleccionando aquellos intervalos que cumplen con el signo de la expresión que buscamos para verificar la desigualdad de la inecuación, e incluir aquellos puntos críticos que nos anulan la expresión en caso de necesitarlo.

Módulo o valor absoluto

1. $|x|$ es el módulo de x y vale x si $x \geq 0$ y $-x$ si $x < 0$.
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Además $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $|x| = |-x|$. $|x^2| = |x|^2 = x^2$. $\sqrt{x^2} = |x|$.
4. $-|x| \leq x \leq |x|$.
5. $|xy| = |x||y|$. $|x + y| \leq |x| + |y|$. $|x - y| \geq |x| - |y|$.
6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$.
7. $|x| \leq |y| \Leftrightarrow (-y \leq x \leq y) \vee (y \leq x \leq -y)$
8. Para resolver inecuaciones con módulos, podemos utilizar sus propiedades para ramificar la inecuación en varias inecuaciones, o bien buscar los puntos críticos de los módulos para resolver la inecuación por intervalos (la gracia es que en cada intervalo los módulos desaparecen ocupando la definición).