MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Resumen Semana 1

Axiomas de Cuerpo

1. Conmutatividad: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x$
2. Asociatividad: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z \wedge x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
3. Distributividad: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz \wedge (x + y)z = xz + yz$
4. Existencia de neutros: $(\exists e_s, e_p \in \mathbb{R}, e_s \neq e_p)(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_s = x \wedge x \cdot e_p = x$
5. Existencia de inversos:
   a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existen reales llamados opuestos o inversos aditivos de x, que al ser sumados con x resultan ser neutro para la suma.
   b) Para cada $x \in \mathbb{R}$, sin ser x un neutro para la suma, existen reales llamados recíprocos o inversos multiplicativos de x, que al ser multiplicados con x resultan ser neutro para el producto.

Propiedades de Cuerpo

1. Los neutros son únicos. Debido a su unicidad podemos denotar por 0 (que se lee *cero*) al neutro para la suma y por 1 (que se lee *uno*) al neutro para el producto.
2. Los inversos de x son únicos. Debido a su unicidad podemos denotar por $(-x)$ al opuesto y por x^{-1} al recíproco. Luego se cumple $x + (-x) = 0 \wedge x \cdot x^{-1} = 1$
3. El cero es absorbente: $(\forall a \in \mathbb{R})\ a \cdot 0 = 0$. Y no existe inverso multiplicativo para el cero.
4. $a \cdot x + b = 0,\ b \neq 0$ posee solución y es única. Esta es $x = \frac{-b}{a}$.
5. Cancelación en la suma: $x + a = y + a$ es equivalente a $x = y$.
6. Cancelación en el producto: $x \cdot a = y \cdot a$ es equivalente a $x = y$ si $a \neq 0$.
7. Si un producto es cero, entonces *al menos* uno de los factores es cero: $x \cdot y = 0 \Longrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$
8. Se tiene la validez de todos los *malabares* usuales con los signos, inversos y fracciones.
   $$-(-a) = a \qquad (a^{-1})^{-1} = a\ (*) \qquad a \cdot (-b) = -ab \qquad (-a) \cdot (-b) = ab \qquad -(a+b) = -a-b \qquad (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}\ (*)$$
   $$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\ (*)$$
   (*) *En el uso de recíprocos se necesita, en primer lugar, la* existencia *de los recíprocos (que sean distinto de cero). Para el uso de fracciones siempre se debe cuidar que no se divide por cero, ya que* no posee recíproco.
9. Se tienen identidades útiles de factorización:
   $$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
   $$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$