MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Auxiliar 1

6 de Agosto de 2014

P1. Usando solo los axiomas de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades:

1. Pruebe que $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ y use esto para demostrar que $(a + c^{-1}d)^{-1} = c(ac + d)^{-1}$.
2. Pruebe que $-(a + b) = -a - b$ y use esto para demostrar que $-a - (b - c) = -(a + b) + c$.

P2. Pruebe que $(\forall a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ se cumple que $a^2 + ab + b^2 > 0$. Use esto para demostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ se cumple

$$a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$$

Generalice este resultado para todos los números reales.

P3. Pruebe que

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Y use el resultado para probar que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$$

P4. Sea $a \in \mathbb{R}^*_+$. Pruebe que

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

Y use el resultado para probar que

$$a^3 + \frac{1}{a^3} \geq 2$$

P5. Determine los intervalos que describen los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \; x(x + 2) < \frac{1}{3}(x^2 + x + 3) \;\vee\; x^2 \geq 9\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0 \;\wedge\; 4 - 4x \geq 3(x^2 - 1)\}$

P6.

1. Para $a > 0$, resuelva la siguiente inecuación. Note que el conjunto solución depende de a.

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} < a$$

2. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{2}{4 - x} > x - 1$$