Departamento de Ingeniería Industrial

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Modelos Estocásticos IN 79O, 21/11/12, Prof. R. Gouet.

Material Docente

En estas notas se comenta con detalle el ejemplo 3.5(A), en pág. 125 del libro de S. Ross (Stochastic Processes).

Se considera una sucesión iid de va discretas $(X_n)_{n\geq 1}$ y nos interesa observar la aparición de un patrón, el cual se define como una tupla de valores $r = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, donde los x_i son valores posibles de las va X_n, i.e. tales que $P[X_n = x_i] > 0$. Se dice que el patrón $x_1 x_2 \cdots x_k$ se observa en el tiempo n si $X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k-1}, \ldots, X_{n-k+1} = x_1$, o bien, si

$$X_n^{(k)} := (X_{n-k+1}, X_{n-k+2}, \ldots, X_{n-1}, X_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_k) = r.$$

Se define el proceso $\{N(n); n \geq 1\}$, siendo $N(n)$ el número de veces que el patrón r aparece en el vector $(X_1, \ldots, X_n)$. Por ejemplo, si las va toman valores $0, 1$, $r = (1001)$ y

$$(X_1, \ldots, X_n) = (100100101001010101101010)$$

(omitiendo las comas), con $n = 24$, podemos observar que: $N(1) = N(2) = N(3) = 0$, $N(4) = 1 = N(5) = N(6)$, $N(7) = 2 = N(8) = \cdots$, $N(12) = 3 = \cdots = N(24)$. Es evidente arriba que si el patrón r tiene largo k entonces no lo veremos aparecer antes de k, es decir $N(i) = 0$ para $i < k$.

Interesa saber qué tipo de proceso es $N(n)$ y se postula que se trata de un *proceso de renovación con retardo*, donde los tiempos de renovación son los tiempos de aparición del patrón. Para esto se necesita describir la sucesión de las va Y_n de los tiempos entre sucesivas renovaciones. Hay que probar que las Y_n son independientes, que Y_1 tiene distribución G y que $Y_2, Y_3, \ldots$ tienen distribución F.

Definimos Y_1, suponiendo que el patrón es r, como

$$Y_1 = \min\{n \geq 1; X_n^{(k)} = r\}$$

y vemos que $Y_1 \geq k$. Para definir Y_2 debemos notar que parte del siguiente patrón que observemos puede estar contenido en el primero. Por ejemplo, si $r = (1001)$ y los datos observados son $(1001001\cdots)$ entonces $Y_1 = 4, Y_2 = 3$. Esto significa que las va Y_i, para $i \geq 2$, pueden ser menores que k pero Y_1 es necesariamente mayor o igual que k. Esto basta para convencernos de que Y_1 y las restantes Y_i no tienen la misma distribución (posiblemente). Aunque no podemos descartar que tengan la misma distribución, según sea el patrón. Por ejemplo, si $r = (01)$ entonces no hay forma de que los sucesivos patrones que aparecen puedan solaparse. Si $r = (111)$ y los datos son $(11111\cdots)$ entonces $Y_1 = 3, Y_2 = 1, Y_3 = 1, \ldots$.

Ahora estamos en condiciones de definir Y_2 formalmente:

$$Y_2 = \min\{n \geq Y_1 + 1; X_n^{(k)} = r\} - Y_1.$$

En realidad, resulta más natural definir los instantes de renovación S_n y luego deducir los Y_i por diferencias. Sea $S_m = \sum_{i=1}^m Y_i, m \geq 1$, entonces tendríamos

$$S_{m+1} = \min\{n \geq S_m + 1; X_n^{(k)} = r\},$$

con $Y_{m+1} = S_{m+1} - S_m, m \geq 1$.

Estudiemos ahora la independencia de los Y_m, comenzando por Y_1, Y_2. El suceso $\{Y_1 = n_1\}$ depende las va X_1 hasta X_{n_1} mientras que el suceso $\{Y_2 = n_2\}$ depende de las va $X_j, j > n_1$ y por lo tanto, $\{Y_1 = n_1\}$ e $\{Y_2 = n_2\}$ son independientes. Con el mismo argumento se puede mostrar la independencia del resto de los Y_i. De hecho, cada $Y_i, i \geq 2$, puede describirse como el número de observaciones hasta ver el patrón r, habiendo puesto al comienzo el patrón r. Esto es distinto, por cierto, de la situación de Y_1 que no tiene r inicialmente.

1. Tasa de aparición del patrón r

El problema que se plantea en el ejemplo es el de calcular la tasa de aparición del patrón, que es recíproca del tiempo esperado entre apariciones sucesivas. Para esto podemos calcular el límite de la probabilidad de observar una renovación en n, con $n \to \infty$. El teorema de Blackwell, para el caso lattice, afirma que si los Y_n son va lattice de período d entonces

$$E[\#\text{Renovaciones en } nd] \to \frac{d}{\mu},$$

siendo $\mu = E[Y_2]$. Este resultado (visto en clase) también aplica a los procesos de renovación con retardo. Por otra parte, notemos que en nuestro caso $d = 1$ porque Y_2 puede tomar cualquier valor entero, a partir de cierta cota que depende de r. Por otra parte, en cada entero n ocurre una renovación o no ocurre ninguna (es decir, los Y_i no pueden ser nulos) de manera que $E[\#\text{Renovaciones en } nd] = P[\#\text{Una renovación en } n]$ y tenemos

$$P[\#\text{Una renovación en } n] \to \frac{1}{\mu}.$$

Pero es muy fácil calcular la probabilidad de una renovación en n porque esto equivale simplemente a $X_n^{(k)} = r$. Además, como las va X_n son iid, los índices particulares no importan y resulta, para n grande,

$$P[\#\text{Una renovación en } n] = P[X_n^{(k)} = r] = P[(X_1, \ldots, X_k) = r] = \prod_{i=1}^{k} p(x_i),$$

donde $p(x_i) = P[X_i = x_i], i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, $\mu = \left(\prod_{i=1}^{k} p(x_i)\right)^{-1}$. En el caso de va Bernoulli (1,0) con probabilidades respectivas p, q y escogiendo $r = (1001)$, se tiene $\mu = (p^2q^2)^{-1}$. El mismo resultado se obtiene con $r = (0101)$.

2. Tiempo esperado hasta primera ocurrencia de r

El análisis del tiempo esperado hasta la primera ocurrencia de r ($E[Y_1]$) es, en general, bastante complicado y depende de la estructura de r. Por ejemplo, si r es tal que las apariciones sucesivas de r no pueden solaparse, entonces Y_1 tiene la misma ley que las $Y_i, i \geq 2$, y la respuesta sería el valor de μ calculado arriba. Por ejemplo, en el caso de las va Bernoulli, si $r = (01)$ entonces $\mu = (pq)^{-1} = E[Y_i], i \geq 1$. Pero si $r = (0101)$ (tal como en el texto de Ross), ocurre que $E[Y_1] \neq E[Y_2] = p^{-2}q^{-2}$, justamente porque la aparición del segundo r, por ejemplo, podría comenzar en la mitad del primero.

Para resolver este problema hay usar el siguiente esquema. Si el juego comenzara con los valores 01 dados, entonces estaríamos en la situación que se enfrenta después de ver el primer patrón. Así, el tiempo para ver (0101) por primera vez se descompone como el tiempo para ver (01) por primera vez más el tiempo hasta ver r completo. Este último tiempo se distribuye como Y_2. Entonces

$$E[Y_1] = E[\text{Tiempo hasta ver x 1a. vez}(01)] + E[Y_2] = (pq)^{-1} + (pq)^{-2}.$$

Analicemos el caso $r = (1001)$: aquí $E[Y_2] = (pq)^{-2}$ y si comenzamos con 1 estamos en la situación de los tiempos entre apariciones. Por lo tanto

$$E[Y_1] = E[\text{Tiempo hasta ver x 1a. vez}(1)] + E[Y_2] = p^{-1} + (pq)^{-2}.$$

Finalmente, para el caso $r = (1111)$ tenemos $E[Y_2] = p^{-4}$ y

$$E[Y_1] = E[\text{Tiempo hasta ver x 1a. vez}(111)] + E[Y_2] = ? + p^{-4}.$$

Ahora, para calcular $E[\text{Tiempo hasta ver x 1a. vez}(111)]$ nos enfrentamos al mismo problema que buscamos resolver pero con el patrón (111). Siguiendo la lógica del desarrollo escribiríamos

$$E[\text{Tiempo hasta ver x 1a. vez}(111)] = E[\text{Tiempo hasta ver x 1a. vez}(11)] + E[Y_2] = ? + p^{-3},$$

etc. Finalmente, obtendríamos

$$E[Y_1] = p^{-1} + p^{-2} + p^{-3} + p^{-4}.$$

Revisemos para terminar el caso que trata Ross. Calculamos el valor esperado para ver por primera vez el patrón $r = (1011011)$ (hemos adoptado la convención $H = 1, T = 0$). El cálculo de $E[Y_2]$ se hace de la forma tratada más arriba y obtenemos $E[Y_2] = p^{-5}q^{-2}$. Vemos ahora que el patrón inicial, con el que obtenemos una situación análoga a los tiempos entre apariciones, es 1011. Así tenemos

$$E[\text{Tiempo 1a. vez}(1011011)] = E[\text{Tiempo 1a. vez}(1011)] + E[Y_2] = E[\text{Tiempo 1a. vez}(1011)] + p^{-5}q^{-2}.$$

Pero

$$E[\text{Tiempo 1a. vez}(1011)] = E[\text{Tiempo 1a. vez}(1)] + p^{-3}q^{-1} = p^{-1} + p^{-3}q^{-1}$$

y llegamos a

$$E[\text{Tiempo 1a. vez}(1011011)] = p^{-1} + p^{-3}q^{-1} + p^{-5}q^{-2}.$$

3. Aparición de un patrón antes que otro

En esta parte del ejemplo continuamos con las va de Bernoulli. Interesa calcular la probabilidad de ver $r = (1010)$ antes que $s = (0100)$. Un poco de notación: sea T_x el tiempo hasta ver el patrón x por primera vez; $T_{x|y}$ el tiempo hasta ver x partiendo con y. Notemos que

$$E[T_{s|r}] = E[T_{s|010}]$$

y

$$E[T_s] = E[T_{010}] + E[T_{s|010}].$$

Por otra parte

$$E[T_s] = E[T_0] + p^{-1}q^{-3} = q^{-1} + p^{-1}q^{-3}$$

y

$$E[T_{010}] = E[T_0] + p^{-1}q^{-2} = q^{-1} + p^{-1}q^{-2}.$$

De lo anterior se puede despejar

$$E[T_{s|r}] = E[T_s] - E[T_{010}] = q^{-1} + p^{-1}q^{-3} - (q^{-1} + p^{-1}q^{-2}) = p^{-1}q^{-3} - p^{-1}q^{-2}.$$

Por otra parte, dada la estructura de r y s, se tiene que $E[T_{r|s}] = E[T_r]$ y este último valor se calcula con el método usual. Llegamos entonces a

$$E[T_{r|s}] = p^{-1}q^{-1} + p^{-2}q^{-2}.$$

Sea $p_r = P[T_r < T_s]$ y T_{rs} el tiempo hasta ver alguno de los dos patrones por primera vez. Es claro que $T_{rs} = \text{mín}\{T_r, T_s\}$. Entonces

$$E[T_r] = E[T_r - T_{rs} + T_{rs}] = E[T_r - T_{rs}] + E[T_{rs}]$$

pero

$$E[T_r - T_{rs}] = E[T_r - T_{rs}|T_r < T_s]P[T_r < T_s] + E[T_r - T_{rs}|T_r > T_s]P[T_r > T_s]$$

y

$$E[T_r - T_{rs}|T_r < T_s]P[T_r < T_s] = E[T_r - T_{rs}|T_r < T_s]p_r = E[T_r - T_r|T_r < T_s]p_r = 0.$$

Además,

$$E[T_r - T_{rs}|T_r > T_s]P[T_r > T_s] = E[T_r - T_{rs}|T_r > T_s](1 - p_r) = E[T_{r|s}](1 - p_r).$$

Se llega entonces a la ecuación

$$E[T_r] = E[T_{r|s}](1 - p_r) + E[T_{rs}] \tag{1}$$

y, razonando análogamente, a

$$E[T_s] = E[T_{s|r}]p_r + E[T_{rs}]. \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se despeja p_r.