Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L: Modelos Estocásticos

Teoría de Renovación

Mario Guajardo Daniel Yung

2005

Problema 1

De un mazo de cartas se sacan naipes de a una, la que es devuelta al mazo luego de verificar su pinta. Encuentre el número esperado de naipes que ser necesario sacar hasta conseguir que aparezcan cuatro cartas consecutivas de la misma pinta. HINT: Utilice el teorema de Blackwell.

Solución

La clave de este problema es definir un proceso de renovación, donde los instantes de renovación son aquellos en que se obtiene el cuarto naipe consecutivo de la misma pinta. Llamaremos T al número de intentos necesarios para obtener los cuatro naipes de la misma pinta consecutivos, comenzando desde 0.

Si T_R es el tiempo entre renovaciones se tendrá que:

$$T_R \begin{cases} 1 & \text{Siguiente naipe de la misma pinta que el que generó la renovación anterior} \\ T & \text{Distinta pinta.} \end{cases}$$

De esta manera $E[T_R] = 1 \cdot \frac{1}{4} + E[T] \cdot \frac{3}{4}$.

Ocupando el teorema de Blackwell en el caso Lattice $d = 1$, se tendrá que

$$P\Big[\text{Una renovaciones en } nd\Big] \quad \xrightarrow[\text{n} \to \infty]{} \quad \frac{d}{\mu}$$

De esta expresión podemos calcular el lado derecho considerando que la única configuración que permite tener una renovación en n es sacar una carta de la misma pinta que las tres anteriores, lo que ocurre con probabilidad $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, por lo que la esperanza del tiempo entre renovaciones, μ, será 64.

Despejando, obtenemos que $E[T] = 85$.

Problema 2

Muestre cómo deducir el teorema de Blackwell a partir del teorema clave de renovación.

Solución

Como ya se sabe que F es *no lattice* y *directamente Riemann-Integrable*, basta probar que $m(t+a) - m(t) \to \frac{a}{\mu}$. Para ello vemos que, haciendo $h(t) = 1_{[0,a]}$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int_0^t 1_{[0,a]}(t-x)dm(x) &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t 1_{[t-a,t]}dm(x) \\ &= \lim_{t\to\infty} m(t) - m(t-a) \\ &= \lim_{t\to\infty} m(t+a) - m(t) \end{aligned}$$

Pero por el *Teorema Clave de Renovación* el límite anterior es:

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt = \frac{a}{\mu}$$

Problema 3

Considere el paseo aleatorio simétrico. Además suponga que este paseo terminara una vez que se llega al valo A o -B (partiendo desde 0).

1. Calcule la probabilidad que el paseo termine en el valor A.
2. Calcule la esperanza del número de períodos antes de parar

Solución

1. Sabemos que el paseo terminará ya sea en A o en $-B$. A cada suceso le asignamos una probabilidad P_A y P_B respectivamente. Por otro lado definiremos un tiempo de parada τ tal que:

$$\tau = \inf\{t : S_\tau = A \vee S_\tau = -B\}$$

Donde:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Con X_i i.i.d tal que $X_i = \pm 1$ con prob. $\frac{1}{2}$.
Tras verificar que $P[\tau < \infty] = 1$[1] y que $E[X_i] = 0$ $\forall i$. tendremos que (ocupando Wald):

$$E[S_\tau] = 0 = P_A \cdot A + (1 - P_A) \cdot -B$$

Despejando llegamos a que:

$$P_A = \frac{B}{A+B}$$

2. Consideremos el calculo de:

$$\begin{aligned}
E[S_n^2 - n] &= E[(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 - n] \\
&= E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2] - n \\
&= \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] - n \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 - n \\
&= 0
\end{aligned}$$

[1] Recordar argumentos de la clase auxiliar

Notar que, debido a la independencia de los X_i, al desarrollar el termino S_n^2 utilizando la linealidad de la esperanza, los términos cuadráticos del tipo $X_i \cdot X_j$ se anulan.

Consideremos ahora el termino: $E[S_\tau^2 - \tau]$. Tendremos que:

$$E[S_\tau^2] = E[\tau]$$

Pero por otro lado sabemos que:

$$\begin{aligned} E[S_\tau^2] &= P_A \cdot A^2 + (1 - P_A)B^2 \\ &= \frac{A^2 B}{A+B} + \frac{AB^2}{A+B} \\ &= A \cdot B \end{aligned}$$

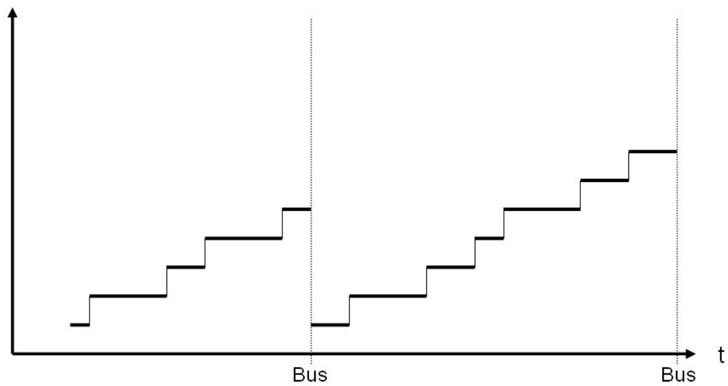
Problema 4

Cartas llegan al correo de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Camiones, que recogen todas las cartas presentes en el correo, llegan de acuerdo a un proceso de renovación de distribución entre eventos $F_x(x)$ (no lattice). Sea $X(t)$ en número de cartas en el correo en el instante t.

1. Dibuje un esquema de $X(t)$.
2. Dado $X_1 = x$ /primer camión llego en x), encuentre el numero esperado de catas recogidos. Además encuentre
$$E[\int_0^{x_1} R(t)dt | x_1 = x]$$
3. Encuentre
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t R(s)ds (a.s.)$$
4. Encuentre el "promedio temporal" de la espera de una carta
5. Encuentre la fracción del tiempo en que no hay cartas en el correo.

Solución

1. El esquema es el siguiente:
2. Vemos que la distribución del número de cartas que se van en el primer camión (dado $x_1 = x$) es poisson de tasa $\lambda \cdot x$. Entonces:
$$E[\text{Número de cartas recogidas} | x_1 = x] = \lambda \cdot x$$
Además:



$$
\begin{aligned}
E[\int_0^{x_1} X(t)dt|x_1 = x] &= E[\int_0^{x} X(t)dt] \\
&= \int_0^{x} E[X(t)]dt \\
&= \int_0^{x} \lambda \cdot tdt \\
&= \frac{\lambda \cdot x^2}{2}
\end{aligned}
$$

3. Definimos un proceso de renovación con recompensas en que $\int_0^t X(s)dt$ es la recompensa hasta t. Dado esta definición:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds = \frac{E[\text{Recompensa en un ciclo}]}{E[\text{Largo del ciclo}]}$$

Entonces:

$$E[\text{Recompensa en un ciclo}] = E_x[E[\int_0^{\infty} X(t)dt]] = E_x[\frac{\lambda \cdot x^2}{2}] = \frac{\lambda \cdot E[x^2]}{2}$$

Por lo tanto:

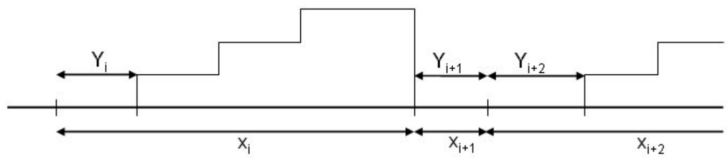
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds = \frac{\lambda E[x^2]}{2E[x]}$$

4. Un cliente que llega en t deberá esperar $Y(t)$. De las clases de cátedra:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Y(s)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t W(s)ds = \frac{E[x^2]}{2E[x]}$$

5. Consideremos una función de recompensas R(t) = 1, desde la llegada de un bus hasta la llegada del primer pasajero. Queremos calcular:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E[Y]}{E[X]}$$



(mirar figura).

$$Y = \text{mín}\{\text{llegada bus, llegada pasajero}\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[min\{X_i, U_i\}] \qquad \text{con} \quad U_i \rightsquigarrow exp(\lambda) \\ &= \int_0^\infty Pr[\text{mín}\{X_i, U_i\} > t]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Pr[X_i > t]dt \end{aligned}$$

Donde se ocupo la independencia de X_i y U_i. Entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda t} Pr[X > t]dt}{E[X]}$$

Problema 5

1. Calcule el promedio temporal de la edad $A(s)$ en un proceso de renovación cuando $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(s)ds$$

2. Calcule el promedio temporal del exceso $Y(s)$ en un proceso de renovación cuando $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Y(s)ds$$

3. Calcule el siguiente limite:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_{N(s)+1}ds$$

Solución

1. Para ver esto, supongamos que nos pagan dinero a una tasa igual a la edad del proceso de renovación en ese instante. Es decir, en s nos pagan a una tasa $A(s)$ y, por lo tanto, $\int_0^t A(s)ds$ son nuestras ganancias totales hasta t. Todo parte de nuevo al ocurrir una renovación. Utilizando el teorema de procesos de renovación con recompensa:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{E(R)}{E(X)}$$

tenemos que, con probabilidad 1:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t A(s)ds}{t} = \frac{E[\text{Ganancia}]}{E[\text{Largo periodo}]}$$

Las ganancias de un período es

$$\int_0^x s \cdot ds = \frac{x^2}{2}$$

donde x es el tiempo de un ciclo de renovación, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t A(s)ds}{t} = \frac{E[x^2]}{2E[x]}$$

2. Procediendo de la misma manera, estableciendo pagos por el tiempo de ciclo que nos queda, tendremos que las ganancias de un período son

$$\int_0^x (t-s) \cdot ds = \frac{x^2}{2}$$

donde x es el tiempo de un ciclo de renovación, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Y(s)ds}{t} = \frac{E[x^2]}{2E[x]}$$

3. Podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} X_{N(t)+1} &= A(t) + Y(t) \\ &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t X_{N(s)+1} ds}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t [A(s)+Y(s)]ds}{t} \\ &= \frac{E[x^2]}{E[x]} \\ &\geq E[x^2] \end{aligned}$$

Es decir, el "promedio temporal" de $X_{N(t)+1}$ es mayor a $E[x]$ (Paradoja de inspección).

Problema 6

Considere un proceso de renovación cuya distribución de tiempos entre arribos es una gamma de parámetros n y λ. Muestre que:

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = \frac{n+1}{2\lambda}$$

Para esto realice lo siguiente:

1. Considere un proceso de renovación de distribución entre arribos F. Muestre que:

$$P[S_{N(t)} = 0] = (1 - F(t))$$
$$dF_{N(t)(x)} = (1 - F(t-y))dm(y) \quad 0 < y < \infty$$

2. Muestre que si $E[X^2] < \infty$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = \frac{E[X^2]}{2E[X]}$$

3. Concluya

Argumente que

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = \frac{n+1}{2\lambda}$$

Sin realizar ningún calculo.

Solución

Procedamos de acuerdo al enunciado

1. Vemos que para $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned}
P[S_{N(t)} \leq s] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[S_n \leq s, S_{n+1} > t] \\
&= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P[S_n \leq s, S_{n+1} > t] \\
&= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P[S_n \leq s, S_{n+1} > t | S_n = y] dF_n(y) \\
&= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{s} \overline{F}(t-y) dF_n(y) \\
&= \overline{F}(t) + \int_0^{s} \overline{F}(t-y) \sum_{n=1}^{\infty} [dF_n(y)] \\
&= \overline{F}(t) + \int_0^{s} \overline{F}(t-y) dm(y)
\end{aligned}$$

Argumentamos que

$$P[S_{N(t)} = 0] = (1 - F(t)$$
$$dF_{N(t)(x)} = (1 - F(t-y))dm(y) \quad 0 < y < \infty$$

2. Este resultado ya es conocido, pero no esta de más calcularlo de otra manera.

$$E[Y(t)] = E[Y(t)|S_{N(t)} = 0]\overline{F}(t) + \int_0^t E[Y(t)|S_{N(t)} = y]\overline{F}(t-y)dm(y)$$

pero

$$E[Y(t)|S_{N(t)} = 0] = E[X - t|X > t]$$
$$E[Y(t)|S_{N(t)} = y] = E[X - (t-y)|X > (t-y)]$$

Entonces

$$E[Y(t)] = E[X - t|X > t]\overline{F}(t) + \int_0^t E[X - (t-y)|X > (t-y)]\overline{F}(t-y)dm(y)$$

Utilizando el teorema clave de renovación tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] &= \int_0^\infty E[X - t|X > t]\overline{F}(t)\frac{dt}{\mu} \\
&= \int_0^\infty \int_t^\infty (x-t)dF(x)\frac{dt}{\mu} \\
&= \int_0^\infty \int_0^x (x-t)dt\frac{dF(x)}{\mu} \\
&= \int_0^\infty x^2\frac{dF(x)}{\mu} \\
&= \frac{E[X^2]}{2E[X]}
\end{aligned}$$

donde $\mu = E[X]$.

3. La gamma es la suma de n variables exponenciales por lo que su generadora de momentos es

$$\Phi(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$$

Derivamos una vez y evaluamos en $s = 0$ para obtener que

$$E[X] = \frac{n}{\lambda}$$

Derivamos nuevamente y evaluamos en $s = 0$

$$E[X^2] = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

Concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = \frac{E[X^2]}{2E[X]} = \frac{n+1}{2\lambda}$$

Como podríamos haber obtenido el mismo resultado: Nos damos cuenta que el tiempo entre arribos es la suma de n exponenciales, en el largo plazo puedo caer en cualquiera de estas n exponenciales. Lo más probable es que caiga en la mitad y me quedarían por completar $\frac{n-1}{2}$ intervalos (cada uno con tiempo medio $\frac{1}{\lambda}$), además debería completar el en que cai, sumando y $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo más, en total esto suma

$$\frac{n+1}{2\lambda}$$