

Control 1

Pregunta 1.

Autos llegan a un semáforo de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ . Este semáforo cambia de color cada A unidades de tiempo. Si un auto llega al cruce y encuentra el semáforo en verde pasará inmediatamente. Si lo encuentra en rojo deberá esperar hasta el próximo cambio de luz. Suponiendo que la calle es lo suficientemente ancha como para que no se formen colas, y que el tiempo que demora un auto en atravesar el cruce es despreciable, calcule:

- a) (1.5 pto.) La distribución de probabilidades de $X(t)$, la cantidad de autos que han tenido que esperar para cruzar en algún instante, en t .
- b) (1.5 pto.) La distribución de probabilidades del número de autos que están esperando para cruzar en el instante t .

Suponga que en realidad este semáforo está instalado en el cruce entre dos calles. Por una de las calles (calle x) llegan autos según un proceso de Poisson de tasa λ_x . Cada unidad de tiempo que un auto espera en esta calle significa un costo de M [\$]. Por otro lado, los autos que vienen por la otra calle (calle y) llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_y . Si un auto que viene por esta última vía espera t unidades de tiempo en el semáforo, se incurre en un costo $t^2 M$ [\$]. Si llamamos A al lapso de tiempo durante el cual el semáforo está en rojo para la calle x y B al tiempo durante el cual el semáforo está en rojo para la calle y ($A + B = C$, con C constante);

- c) (1.5 pto.) Calcule la esperanza del costo incurrido desde que el semáforo de luz roja, cambia a verde y vuelve a ser roja.
- d) (1.5 pto.) Calcule los tiempos A^* y B^* que minimizan el costo incurrido por el sistema durante el ciclo (C).

Pregunta 2.

En $t=0$ un ratón es abandonado en el centro de un laberinto, lugar en el cual debe elegir entre tres posibles rutas a seguir. La ruta $n^\circ 1$ lo lleva por un camino que tras dos minutos de viaje lo regresa al centro del laberinto, no sin antes encontrar un gran trozo de queso. La ruta $n^\circ 2$ lo lleva por un camino que lo regresa al centro del laberinto tras 4 minutos de viaje, pero que no contiene queso alguno. Finalmente la ruta $n^\circ 3$ lo lleva por un camino donde el ratón nuevamente no encuentra queso y lo regresa al centro del laberinto tras 8 minutos de viaje. Suponga que cada vez que el ratón llega al centro del laberinto elige aleatoriamente la ruta que seguirá, sin recordar elecciones pasadas. Sea T el tiempo que demora al ratón encontrar el pedazo de queso (suponga que este está al final de la ruta $n^\circ 1$).

- a) Defina una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas X_1, X_2, \dots y un tiempo de parada N tal que:

$$T = \sum_{i=1}^N X_i$$

- b) Use la ecuación de Wald para encontrar $E[T]$
- c) Calcule $E[\sum_{i=1}^N X_i | N = n]$ y note que no es igual a $E[\sum_{i=1}^n X_i]$.
- d) Use c) para recalcular $E[T]$.