

CONTROL 1

Miércoles 11 de Septiembre de 2002

Pregunta 1

A un aeropuerto llegan pasajeros a la zona de embarque según un proceso de Poisson no homogéneo de tasa $\lambda(t)$. Se sabe que los pasajeros pueden ser de dos tipos: *sospechosos* o *con buena presencia*. Cada pasajero tiene una probabilidad q_s de ser de tipo *sospechoso*, y una probabilidad $q_n = 1 - q_s$ de tener buena presencia.

La seguridad de la línea aérea ha dispuesto que una fracción de los pasajeros *sospechosos* y de los que tienen *buena presencia* tengan que someterse a una revisión para detectar eventuales terroristas. La selección de los pasajeros para este control es tal que con probabilidad $R_s(t)$ un pasajero de tipo *sospechoso* que llega en el momento t deberá someterse a la revisión, mientras que si es de tipo *buena presencia* esta probabilidad es $R_n(t)$.

La revisión de los pasajeros es instantánea, incurriéndose en un costo C por cada pasajero controlado. Además, se sabe que con seguridad el sistema de control detectará a un terrorista intentando abordar el avión, los que serán entregados a la justicia. Estudios de la CIA han determinado que una fracción B_s de los pasajeros que parecen *sospechosos* son terroristas, mientras que una fracción B_n de los pasajeros *con buena presencia* también son terroristas ($B_s > B_n$).

Los pasajeros aceptados en el control y aquellos que no tuvieron que someterse a revisión ingresan al salón VIP donde deben esperar hasta que salga el vuelo. El avión despegue en un tiempo T con a lo más N pasajeros. La línea aérea incurre en un costo p por cada unidad de tiempo que un pasajero espera en el salón VIP por concepto de bebidas y entretenimientos, además de un costo D por cada pasajero que estando en el salón VIP para abordar el vuelo no puede hacerlo por falta de espacio, en este caso, los pasajeros tienen todos la misma probabilidad de no poder abordar independiente del orden en que llegaron.

Por otra parte, la compañía sabe que si en el avión van k terroristas hay una probabilidad A_k que los terroristas secuestren la aeronave, lo que significa un costo en imagen valorado en X con $X \gg C$.

1. (1,0 ptos) Encuentre la distribución del proceso de llegadas al salón VIP.
2. (1,5 ptos) Calcule el costo esperado por concepto de bebidas y entretenimientos en el salón VIP.

HINT: Puede ser de utilidad recordar que si tenemos un proceso de Poisson no homogéneo $\{N(t), t \geq 0\}$ con función media $m(t)$, Dado $N(t) = n$ el conjunto de tiempos de llegada (desordenados) tiene la misma distribución de probabilidad que n variables i.i.d con distribución:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{m(x)}{m(t)} & x \leq t, \\ 1 & x > t. \end{cases}$$

3. (1,0 ptos) Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas detectados en el control. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de los que están esperando en el salón VIP en el tiempo T ?
4. (1,5 ptos) Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas que finalmente abordan a un vuelo.
5. (1,0 ptos) Calcule el costo esperado total que deberá incurrir la línea aérea en un vuelo.

Conteste una de las siguientes preguntas

Pregunta 2

El afamado escritor José “Etiqueta Negra” Guajardo se encuentra muy concentrado en la confección de lo que será el próximo Best Seller mundial titulado *A la mañana siguiente*. Su musa inspiradora es su fiel y antigua máquina de escribir, la que le ha entregado largas horas de placentera labor.

El tiempo que se demora en escribir cada página sigue una variable aleatoria distribuida según $F(x)$. Sin embargo, con una probabilidad $1 - q$ nuestro querido escritor desechará la nueva página perdiéndose todo registro de su existencia.

1. (3,0 pts) Muestre que si se expande la escala del tiempo por un factor $\frac{1}{q}$, con $0 < q \leq 1$, la secuencia de eventos resultantes constituye un proceso de renovación, donde la función de distribución de los tiempos entre eventos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-q)^{n-1} q \cdot F_n\left(\frac{x}{q}\right) = F(x, q),$$

siendo F_n es la n -ésima convolución de F .

2. (3,0 pts) Muestre que la esperanza de esta distribución es la misma que la esperanza de $F(x)$.

Pregunta 3

Un sistema de producción está conformado por 2 máquinas funcionando en serie. Cada una de estas máquinas trabaja sin fallar durante un tiempo exponencialmente distribuido de media λ . Una máquina que falla es reparada en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa μ . En estos casos, el sistema completo deja de funcionar, a pesar que la máquina que no ha fallado sigue trabajando porque los costos de setup son muy altos.

Suponiendo que ambas máquinas comienzan trabajando correctamente conteste las siguientes preguntas:

1. (0,5 pts) Calcule la esperanza del tiempo en que el sistema completo está funcionando, antes de la primera falla.
2. (1,5 pts) Calcule la esperanza del tiempo que el sistema demora en volver a funcionar correctamente.
3. (1,0 pts) Utilizando los resultados anteriores, calcule la probabilidad de encontrar al sistema en correcto funcionamiento en el largo plazo, definiendo un proceso de renovación alternante.

Suponga ahora que el tiempo que las máquinas funcionan correctamente sigue una distribución F_b , mientras que el tiempo que toma su reparación sigue una distribución F_m .

4. (1,0 pts) ¿Es válido utilizar un razonamiento análogo a lo realizado en el punto (c)? Justifique.
5. (2,0 pts) Calcule la probabilidad de encontrar al sistema en correcto funcionamiento en el largo plazo.

HINT: Defina dos procesos de renovación alternante independientes.