



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN71L : Modelos Estocásticos
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Denis Sauré

PAUTA CONTROL 3

Problema 1

1. Una forma de ver esto es encontrar la distribución de X_t

$$\begin{aligned} F_{X_t}[x] &= P\left[\frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta t} \leq x\right] \\ &= P[B_{\theta t} \leq \sqrt{\theta}x] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\theta t}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u'^2}{2t}} du' \end{aligned}$$

donde en la última ecuación se realizó el cambio de variables $u = u' \cdot \sqrt{\theta}$

Vemos que efectivamente X_t es un proceso gaussiano. Ahora corroboraremos que la matriz de covarianzas se encuentra bien definida (es directo ver que $E[X_t] = 0$)

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta t}, \frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta s}\right) \\ &= \frac{1}{\theta} \cdot Cov(B_{\theta t}, B_{\theta s}) \\ &= \frac{1}{\theta} \cdot \min\{\theta t, \theta s\} \\ &= \min\{t, s\} \end{aligned}$$

2. τ_a es el instante en que el movimiento Browniano toca por primera vez el nivel a .

a) Para calcular esto condicionaremos sobre el valor que toma B_h

$$\begin{aligned}
f(a, \lambda) &= E_{B_h}[f(a, \lambda)|B_h] \\
&= E_{B_h}[E[e^{-\lambda(\tau_a - B_h + h)} + o(h)]] \\
&= E_{B_h}[f(a - B_h, \lambda) \cdot e^{-\lambda h} + o(h)] \\
&= E_{B_h}\left[\left(f(a, \lambda) - B_h f'(a, \lambda) + \frac{1}{2} B_h^2 f''(a, \lambda) + o(h)\right) \cdot [1 - \lambda h + o(h)]\right] \\
&= f(a, \lambda) \cdot (1 - \lambda h) + \frac{1}{2} h f''(a, \lambda) + o(h)
\end{aligned}$$

Dividiendo la última igualdad por h , y despejando vemos que

$$2\lambda f(a, \lambda) = f''(a, \lambda)$$

b) Vemos que

$$\begin{aligned}
f(a + b, \lambda) &= E[e^{-\lambda\tau_{a+b}}] \\
&= E[e^{-\lambda(\tau_a + \tau_b)}] \\
&= f(a, \lambda) \cdot f(b, \lambda)
\end{aligned}$$

Con esto vemos que $f(a, \lambda)$ debe tomar la siguiente forma

$$f(a, \lambda) = \exp(a \cdot g(\lambda))$$

c) De la parte uno vemos que $\tau_a b = b^2 \tau_a$. Basta tomar $\theta = b^2$ y notar que cuando se esta en τ_a el proceso escalado llega por primera vez a $a \cdot b$ es decir llega en el instante τ_{ab}

d) Dada la propiedad anterior vemos que la función $g(\lambda)$ es de la forma $c \cdot \sqrt{\lambda}$ con lo que se obtiene el resultado requerido. $f(a, \lambda) = \exp(c \cdot a\sqrt{\lambda})$
ahora, utilizando la ecuación diferencial encontrada en la parte a) vemos que

$$2\lambda \exp(c \cdot a\sqrt{\lambda}) = c^2 \exp(c \cdot a\sqrt{\lambda})$$

por lo que $c = 2$ o $c = -2$. Sin embargo cuando $a \rightarrow \infty$ tenemos que $f(a, \lambda) \rightarrow 0$ por lo que solo nos sirve $c = -2$.

3. Resolvemos para $a > 0$. De las clases auxiliares sabemos que $E[M_t] = 1$, en particular

$$E[M_{\tau_a}] = 1 = E[e^{\alpha B_{\tau_a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 \tau_a}]$$

Escogiendo $\alpha = \sqrt{2\lambda}$ y notando que $B_{\tau_a} = a$ tenemos que

$$\exp(-\sqrt{2\lambda}a) = e^{-\lambda\tau_a}$$

Razonando por simetría se obtiene el resultado para todo a . El supuesto de $P[\tau_a \leq \infty] = 1$ se requiere para poder aplicar que $E[M_t] = 1$ en τ_a (MCT).

4. Aplicamos la desigualdad a τ_a y tomamos esperanza

$$\begin{aligned}
 E[\tau_a^{-1}] &= E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda\tau_a} d\lambda\right] \\
 &= \int_0^\infty E[e^{-\lambda\tau_a}] d\lambda \\
 &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}a} d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{a^2} e^{-\mu} \mu d\mu \\
 &= \frac{1}{a^2}
 \end{aligned}$$

Donde en la última integral realizamos el cambio de variables $\mu = \sqrt{2\lambda}a$ e integramos por partes.

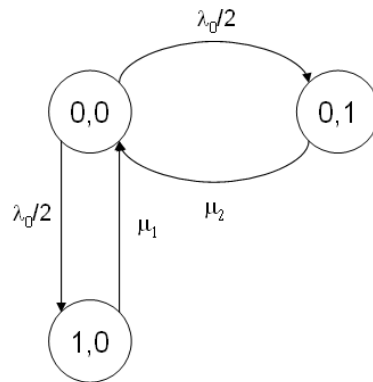
Problema 2

Para simplificar la notación, definimos $\lambda_k = \lambda \cdot q_k$

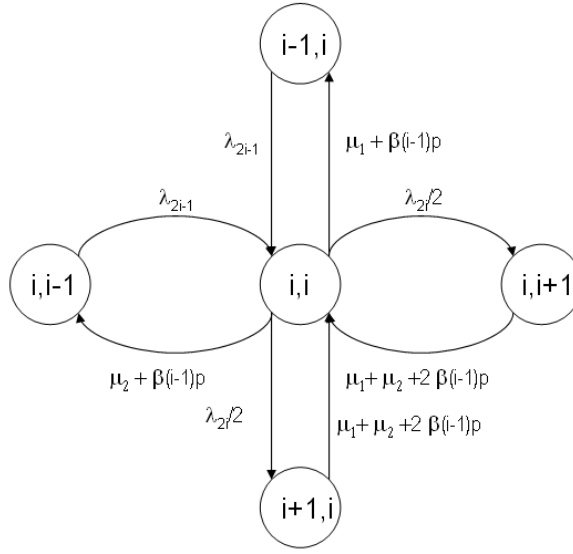
1. A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.

Para modelar el sistema descrito como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 4 casos:

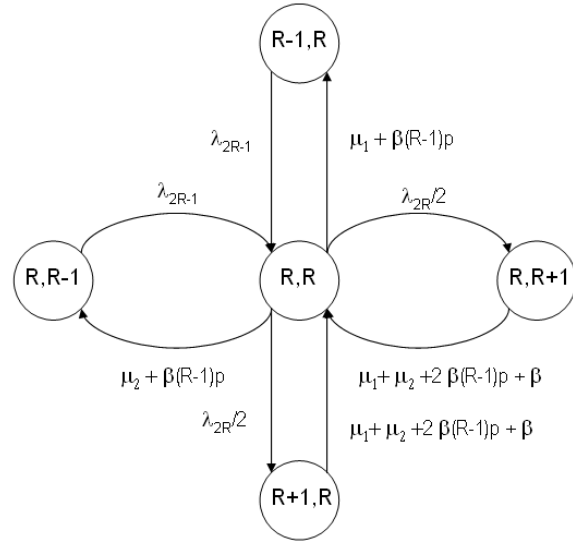
Caso 1:



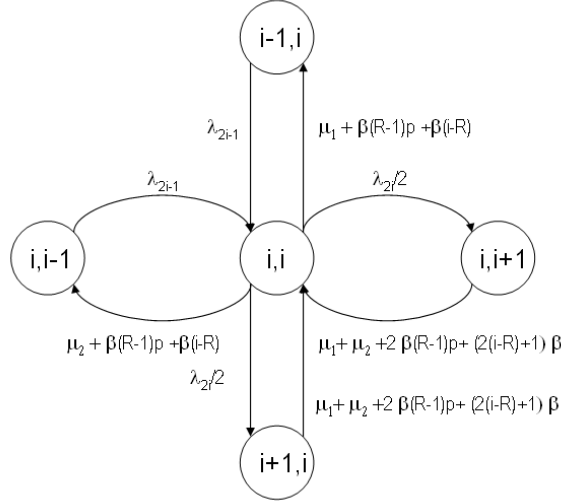
Caso 2: $i \leq R$.



Caso 3:



Caso 4: $i > R$.



Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico (i,i) con $i > R$. Para un estado de este tipo se tienen las siguientes tasas de salida de clientes del sistema :

- Si se aburre alguno de los $R-1$ primeros clientes de cualquiera de las filas y decide irse.
- Si se aburre un cliente que está después de R , en cualquiera de las 2 colas.
- Si termina la atención de un cliente.

Por otro lado cuando llega un nuevo cliente y decide entrar al al sistema la cantidad de personas aumenta en uno.

Luego la condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

$$\lambda_i \leq (\mu_1 + \mu_2 + 2R\beta p + 2\beta(i - R))$$

Observando la expresión anterior nos damos cuenta de que la tasa de entrada está acotada por λ , mientras que la tasa de salida es creciente con el número de personas en el sistema por lo que **SIEMPRE** existen probabilidades estacionarias.

2. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, se tiene que:

a) La fracción de clientes que en un hora llegan y no entran al sistema, está dada por:

$$F = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}} = \frac{\lambda \sum_{(i,j \geq 0, |i-j| \leq 1)} \Pi_{(i,j)} (1 - q_{i+j})}{\lambda} = \sum_{(i,j \geq 0, |i-j| \leq 1)} \Pi_{(i,j)} (1 - q_{i+j})$$

b) La tasa efectiva de salida del sistema está dada por la siguiente expresión:

$$\mu_{ef} = \mu_2 \Pi_{(0,1)} + \mu_1 \Pi_{(1,0)} + \sum_{0 < i < R} (\mu_1 + \mu_2 + (2i-1)\beta p) \Pi_{(i,i+1)} + (\mu_1 + \mu_2 + 2i\beta p) \Pi_{(i,i)} \\ + \sum_{i \geq R} (\mu_1 + \mu_2 + \beta[2(R-1)p + 2(i-R) + 1]) \Pi_{(i,i+1)} + (\mu_1 + \mu_2 + 2\beta[R(p-1) + (i-R)]) \Pi_{(i,i)}$$

- c) Denotemos $P_{(i,i)}$, a la probabilidad de que salga primero un tipo aburrido antes de uno ya atendido, dado que el sistema está en el estado (i,i) entidades.

Vemos que, condicionando sobre el siguiente evento que ocurrirá, tendremos lo siguiente:

$$P_{(i,i)} = \frac{2\beta[R(p-1) + (i-R)] + \frac{\lambda_{2i}}{2} P_{(i,i+1)} + \frac{\lambda_{2i}}{2} P_{(i+1,i)}}{\lambda_{2i} + \mu_1 + \mu_2 + 2\beta[R(p-1) + (i-R)]} \quad \forall i > R$$

Para encontrar la probabilidad buscada debemos resolver este sistema recursivo.

Dudas y/o errores:
 dsaure@dii.uchile.cl
 shernand@ing.uchile.cl