



CONTROL 2

18 de Octubre de 2006

Problema 1

La impresión de documentos foliados se suele llevar a cabo en dos fases: primero una de impresión fija en que se imprime el contenido fijo de los documentos y una de impresión variable en que se imprime el folio. Considere entonces un taller de impresión que cuenta con dos impresoras, una para cada tarea.

El tiempo que demora la impresora de contenido fijo en imprimir una hoja es una v.a. exponencial de media $1/\lambda[\text{min}]$ y el tiempo que funciona continuamente sin fallar es una v.a. exponencial de media $1/\alpha[\text{min}]$.

Por su parte, el tiempo que demora la impresora de contenido variable en completar la impresión de una hoja es una v.a. exponencial de media $1/\mu[\text{min}]$ y el tiempo que funciona continuamente sin fallar es una v.a. exponencial de media $1/\gamma[\text{min}]$.

Cuando una máquina falla, independiente de cuál se trate, es enviada inmediatamente a reparaciones y vuelve a estar funcionando en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\delta[\text{min}]$. Considere que se cuenta con dos reparadores, por lo tanto, cada vez que una máquina falla, comienza inmediatamente su reparación.

Supondremos que en el área fija SIEMPRE hay hojas por imprimir (la carga de trabajo es continua y cargar una hoja “siempre” demora menos que imprimir una). En tanto, la impresora de contenido variable recibe como *input* las hojas que han salido de la impresora fija.

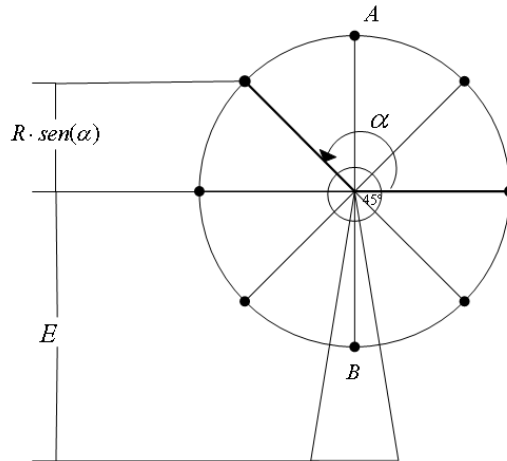
Cada impresora sólo puede imprimir una hoja a la vez.

1. (0.7 pts.) Definimos el conjunto $E = \{B, M\}$ que contiene los estados posibles en que se puede hallar cada máquina, siendo $B = Buena$ y $M = Mala$. Si EF y EV denotan al estado de la impresora fija y la impresora variable en el tiempo, respectivamente, ¿Es $\{(EF, EV)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
2. (0.7 pts.) Diremos que ocurre un registro cada vez que la impresora de contenido fijo ha completado la impresión de 5 hojas en forma continua, sin fallar. Sea R_t el número de registros acumulados hasta el instante t . ¿Es $\{(EF, R)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
3. (0.7 pts.) Sea NF_t el número acumulado de veces que la impresora de contenido fijo ha fallado hasta el instante t . ¿Es $\{(EF, NF)_t\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo? Si su respuesta es afirmativa, explique claramente por qué, defina sus estados y entregue expresiones para las tasas de transición; si su respuesta es negativa, explique claramente por qué y especifique qué información adicional se requeriría para que sí lo fuera.
4. Sea NH_t el número de hojas que se encuentran en el área de impresión variable en el instante t (incluida la que se está imprimiendo, si es que efectivamente hay hojas en esta área).
 - a) (1.0 pto.) Modele $\{(EF, EV, NH)_t\}$ como una cadena de Markov en tiempo continuo.
 - b) (0.5 pts.) ¿Qué condición se debe cumplir para que esta cadena admita régimen estacionario?
 - c) (1.0 pto.) Asumiendo que se cumple la condición anterior y que las probabilidades estacionarias son conocidas, responda:
 - En el largo plazo, ¿Cuál es el número promedio de hojas por unidad de tiempo que terminan el proceso de impresión?
 - En el largo plazo, ¿Cuál es el número promedio de hojas a la espera de ser impresas en el área de impresión variable?

- d) (1.4 pts.) Suponga que el operario de la impresora de contenido fijo es premiado con un bono cada una de las 5 primeras veces que se imprimen 15 mil hojas seguidas, sin que la impresora falle. Luego del quinto bono, el operario es promovido a labores superiores y se contrata un nuevo operario para la impresión fija. Por el contrario, si la impresora fija falla antes del primer bono o entre el instante que se otorga un bono y las próximas 5 mil hojas, el trabajador en curso es despedido y reemplazado por un nuevo operario.
- ¿Cuál es el número esperado de bonos que recibe un operario?
 - ¿Cuál es el número esperado de operarios distintos que operan la máquina de impresión fija en una unidad de tiempo?
 - ¿Cuál es el número esperado de operarios distintos que operan la máquina de impresión fija hasta que alguno es promovido a labores superiores?

Problema 2

Aprovechando los días de primavera, Armijo decide invitar a su prometida a un parque de diversiones. A pesar de la reticencia de su novia, Armijo insiste en subir primero a la *Rueda de la Fortuna*. Este tradicional artefacto cuenta con 8 “carritos”. El ángulo formado por 2 carritos consecutivos es $\pi/4$ (45°). La *Rueda de la Fortuna* de este parque de entretenimientos, rota en torno a un eje ubicado a $E[\text{metros}]$ de altura sobre el nivel del suelo¹ y tiene un radio de $R[\text{metros}]$, $R < E$ y funciona de forma tal que cada exactamente $10[s]$ y con probabilidad p gira, a gran velocidad, exactamente 45° , mientras que el giro es de -45° con probabilidad $1 - p$. El movimiento es tal que después de un desplazamiento uno de los carritos siempre está en la posición más alta que permite el juego (A en la figura). Cada ticket permite que la pareja disfrute de esta entretenición durante $1[\text{minuto}]$ y suponga que Armijo y su novia comienzan en la posición más baja (B en la figura).



1. (1,5 pts.) Modele la posición de Armijo y su prometida mientras dure el juego como una cadena de Markov en tiempo discreto, caracterice sus estados y clasifíquelos en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? Justifique claramente su respuesta y en caso que sea afirmativa, plantee el sistema que permite obtenerlas.
2. (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen alguna vez a la posición más alta del juego habiendo comprado sólo un ticket?
3. (1,0 pto.) Armijo sabe que su novia le teme a las alturas, por lo que si alcanzan los $E[\text{metros}]$ de altura ésta se desmayará y con probabilidad q terminará su romance con nuestro protagonista. ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo abandone el parque de diversiones “soltero”?

Suponga que Armijo es abandonado por su novia, y para pasar el mal rato, decide subirse nuevamente a la *Rueda de la Fortuna*. La entretenición ha sufrido un desperfecto mecánico, por lo que ahora los desplazamientos se producen cada intervalos aleatorios de tiempo. Suponga que la *rueda* gira 45° cada un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda[\text{desplazamientos/segundo}]$ y gira en sentido contrario (con un desplazamiento de -45°) cada un

¹Ver figura.

tiempo exponencialmente distribuido de $\gamma[\text{desplazamientos/segundo}]$ y se mueve hasta que se agota el combustible, que es suficiente para dar muchos giros.

4. (1,5 pts.) Modele la posición de Armijo mientras dure el juego como una cadena de Markov en tiempo continuo, caracterice sus estados y clasifíquelos en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? Justifique claramente su respuesta y en caso que sea afirmativa, plantee el sistema que permite obtenerlas.
5. (1,0 pto.) ¿Cuál es la altura² esperada a la que estará Armijo cuando se acabe el combustible?

Problema 3 (Bonus 0.5 pts.)

Respecto a las charlas de Hugo Scolnik:

- Mencione dos ejemplos de aplicación a los cuales hizo referencia.
- Describa brevemente cómo funciona el sistema que mostró en la charla.

²HINT: Utilice coordenadas polares.