



Control 3

17 de Noviembre de 2005

Problema 1

Clientes llegan a un supermercado según un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. Una vez en el recinto, una fracción q de los clientes debe pasar por *atención al cliente* a devolver algún producto comprado en una visita anterior. Aquí son atendidos por alguno de los dos empleados en *atención al cliente*, que demoran un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro μ_1 [1/hora] en atender a un cliente. Los clientes que han pasado por *atención al cliente* se dirigen luego a la zona de *góndolas*, donde realizarán sus compras. Los clientes que no pasaron por *atención al cliente* se dirigen directamente a las *góndolas* del supermercado.

En las *góndolas* los clientes demoran un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_2$ [hora] seleccionando los productos que desean comprar. Después de haber pasado por las *góndolas*, los clientes se dirigen a la *carnicería* del supermercado con probabilidad s , donde son atendidos por alguno de los 2 carniceros, que tardan un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_3$ [hora] en satisfacer los pedidos de los clientes; con probabilidad p se dirigen a la *pescadería*, lugar en que son atendidos por el único empleado disponible durante un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_4$ [hora]. Los clientes restantes se dirigen directamente desde las *góndolas* hacia la zona de *cajas*¹.

Los clientes que acaban de salir de la *carnicería* vuelven a revisar las *góndolas* con probabilidad r_g (ya que aún no han comprado todo lo que necesitan), mientras que con probabilidad r_p se dirigen a la *pescadería*; el resto va directamente a pagar a las *cajas*².

Una fracción b de los clientes que acaban de salir de la *pescadería* vuelven a revisar las *góndolas* (ya que aún no han comprado todo lo que necesitan), mientras que el resto se dirige a la zona de *cajas*².

El supermercado cuenta con 50 cajas. Un cliente paga los productos en una de estas cajas, operación en la que demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_5$ [hora], y luego abandona el supermercado.

- (3,0 pts) Modele la situación descrita como una red de colas, indicando el modelo que ocupará para cada sistema y los parámetros asociados. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema. ¿Cuál es la condición para la existencia de régimen estacionario?
- (0,5 pts) En estado estacionario, ¿cuál es el tiempo esperado desde que una persona entra hasta que sale de cada subsistema?
- (1,5 pts) Sin utilizar la fórmula de Little y asumiendo conocidos los valores de la parte anterior, ¿cuánto demora, en promedio en el largo plazo, un cliente que pasa por *atención al cliente* desde que llega hasta que sale del supermercado? ¿y un cliente que no pasa por *atención al cliente*?

Indicación: Puede ser útil plantear un sistema de ecuaciones en que las variables sean el tiempo que le resta a un cliente en el supermercado condicional en el subsistema al que acaba de ingresar dicho cliente.

- (1,0 pto) Si se le permite contratar cualquier cantidad de empleados para que trabajen en el supermercado, ¿cuál es la máxima reducción que se puede lograr del tiempo que un cliente pasa en el supermercado? Considere un cliente que no pasa por *atención al cliente*.

¹ $s + p < 1$.

²Note que en una visita al supermercado un cliente puede pasar más de una vez por la *carnicería* y por la *pescadería*. Además, $r_g + r_p < 1$.

Problema 2

Parte A

El inversionista *Fénix Rolland* acaba de comprar una acción de la empresa *NY Fénix* a precio P_0 . *Fénix Rolland* ha modelado el precio futuro de la acción como $P_t = P_0 + B_t, \forall t \geq 0$, en que B_t representa un movimiento Browniano estándar. La estrategia de *Fénix Rolland* consiste en esperar hasta que el precio de la acción sea $(P_0 + A)$ ó $(P_0 - B)$, ($A > 0, 0 < B < P_0/2$).

Si el precio llega a $(P_0 + A)$ vende instantáneamente la acción (y no ejecuta más operaciones).

Si el precio llega a $(P_0 - B)$ compra instantáneamente otra acción de la misma empresa y esperará hasta que el precio de la acción llegue a $(P_0 + A)$ ó $(P_0 - 2B)$, momento en que venderá instantáneamente las 2 acciones que posee.

1. (0.7 pts) Calcule la cantidad de dinero esperada con que se queda *Fénix Rolland* al momento de la venta³.
2. (0.3 pts) Si $B = 2A$ y *Fénix Rolland* se ha fijado como objetivo que la cantidad de dinero esperada después del momento de la venta sea R , encuentre el precio de entrada P_0 al cual *Fénix Rolland* debiera comprar la primera acción.

Parte B

Sea B_t un movimiento Browniano estándar. Se define $B_t^* = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$

1. (0,5 pts) Encuentre la distribución de B_t/\sqrt{t} . ¿Es B_t/\sqrt{t} un movimiento Browniano estándar?
2. (1,5 pts) Muestre que

$$P(B_t < u, B_t^* < v) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{u-2v}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall (u, v) \in D = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, v \geq \max(0, u)\},$$

en que: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ y $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x) dx$

Indicación: Puede ser útil relacionar eventos del tipo $B_t^* \geq x$, $B_t \leq x - y$, $B_t > x + y$.

3. (1,0 pto) Muestre que

$$P(B_t^* \geq x) = P(|B_t| \geq x) \quad \forall x \geq 0$$

Indicación: Puede ser útil utilizar el resultado de la pregunta anterior o relacionar eventos del tipo $B_t^* \geq x$, $B_t \leq x$, $B_t > x$.

4. (0,5 pts) Muestre que

$$P(B_t^* \leq x) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1$$

5. (0,5 pts) Respecto al problema de la *parte A*, suponga que finalmente *Fénix Rolland* vendió 2 acciones a precio $(P_0 + A)$, luego de T unidades de tiempo.

King, entusiasmado con el positivo balance de su amigo personal *Fénix Rolland*, ha decidido inmediatamente estudiar la evolución del precio de la acción durante T unidades de tiempo adicionales. ¿Cuál es el valor esperado del máximo precio que King observa durante su estudio?.

6. (1,0 pto) Sea $a > 0$. Se define $\tau_a = \inf\{t : B_t = a\}$. Muestre que la densidad de τ_a está dada por:

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{t^{3/2}} \phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall t > 0$$

Concluya que la probabilidad de que un Browniano no toque una barrera $a > 0$ antes de un tiempo t , está acotada superiormente por $\frac{a}{\sqrt{t}}$.

Indicación: Note que $1 \leq \frac{\pi}{2} e^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

³No considere en esta cantidad el gasto incurrido en la compra de la primera acción.

Problema 3 (Bonus 0,5 pts)

Respecto a la charla de Sheldon Ross:

- Al utilizar sólo una corrida en una simulación, ¿qué efecto indeseado puede aparecer? ¿Bajo qué condición este efecto es menor?
- ¿Qué técnica utiliza Ross en el muestreo para reducir la varianza en la estimación?

Recordatorio

Sistemas elementales de espera en estado estacionario

- $M/M/i, \forall i \in \{1, 2\}$

$$L = \frac{i\rho}{1 - \rho^i} \quad \pi_0 = \frac{1 - \rho}{(1 + \rho)^{i-1}} \quad \rho = \frac{\lambda}{i\mu}$$

- $M/M/C, \forall C \geq 3$

$$L_Q = \frac{\rho\pi_C}{(1 - \rho)^2} \quad \pi_C = \frac{\lambda^C}{\mu^C C!} \pi_0 \quad \pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} + \frac{\lambda^C}{\mu^C C! \left(1 - \frac{\lambda}{C\mu}\right)} \right]^{-1} \quad \rho = \frac{\lambda}{C\mu}$$

$$L = L_S + L_Q \quad W = W_S + W_Q$$

Donde los subíndices S y Q hacen referencia al servidor y a la cola de espera respectivamente.

Probabilidades

- $P[A] + P[\bar{A}] = 1$
- $P[A] = P[A \wedge B] + P[A \wedge \bar{B}]$
- $P[A|B] \cdot P[B] = P[B|A] \cdot P[A] = P[A \wedge B]$

Sean X e Y dos v.a. continuas, $f(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ su función de densidad conjunta y $F(x, y) = P[X < x \wedge Y < y]$. Entonces:

- $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = f_X(x)$

Donde $f_X(x)$ es la función de densidad de X .

Cálculo

- $\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y) dy = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$