

MODELOS ESTOCASTICOS

PAUTA PRUEBA 1, NOVIEMBRE 2011

P1. Suponga que dispone de tres despertadores (numerados 1,2,3), cada uno los cuales suena al cabo de un tiempo aleatorio. Se sabe que el despertador i suena al instante T_i cuya, distribución es exponencial de parámetro μ_i , para $i \in \{1, 2, 3\}$ y, además, que las T_1, T_2, T_3 son independientes.

1. (2 pts.) Calcule la probabilidad de que el despertador i suene antes que el j , $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.
2. (2 pts.) Encuentre la distribución de la va $Y_{ij} = \min\{X_i, X_j\}$, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.
3. (2 pts.) Calcule la probabilidad de que el primer despertador en sonar sea el i -ésimo, para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Sol.

parte a). Condicionemos sobre el segundo tiempo:

$$P[T_i \leq T_j] = \int_0^\infty P[T_i \leq t | T_j = t] P[T_j = t] dt$$

luego

$$P[T_i \leq T_j] = \int_0^\infty (1 - e^{-\mu_i t}) \mu_j e^{-\mu_j t} dt$$

Separando en 2 integrales

$$P[T_i \leq T_j] = \int_0^\infty \mu_j e^{-\mu_j t} dt - \int_0^\infty \mu_j e^{-(\mu_j + \mu_i)t} dt$$

$$P[T_i \leq T_j] = 1 - \frac{\mu_j}{\mu_j + \mu_i} \int_0^\infty (\mu_j + \mu_i) e^{-(\mu_j + \mu_i)t} dt$$

$$P[T_i \leq T_j] = 1 - \frac{\mu_j}{\mu_j + \mu_i}$$

$$P[T_i \leq T_j] = \frac{\mu_i}{\mu_j + \mu_i}$$

parte b).

$$Y_{ij} = \min x_i, x_j$$

$$P[Y_{ij} \leq y] = P[\min X_i, X_j \leq y]$$

$$P[Y_{ij} \leq y] = 1 - P[\min X_i, X_j \geq y]$$

como son independientes:

$$P[Y_{ij} \leq y] = 1 - P[X_i \geq y]P[X_j \geq y]$$

$$P[Y_{ij} \leq y] = 1 - (1 - P[X_i \leq y])(1 - P[X_j \leq y])$$

Con los $X_i = T_i$ del enunciado se tiene que

$$P[Y_{ij} \leq y] = 1 - (1 - (1 - e^{-\mu_i y}))(1 - (1 - e^{-\mu_j y}))$$

$$P[Y_{ij} \leq y] = 1 - e^{-(\mu_i + \mu_j)y}$$

con lo que Y_{ij} distribuye como una exponencial de parámetro $\mu_i + \mu_j$

parte c). Sea k el primer reloj en sonar, consideremos $k \neq i \neq j$, luego tenemos que calcular:

$$P[T_k \leq \min T_i, T_j]$$

ahora sabemos que de la parte b) $Y_{ij} = \min T_i, T_j$ distribuye exponencial de parámetro $\mu_i + \mu_j$ y de la parte a) sabemos la probabilidad de que una exponencial le gane a otra, podemos concluir entonces que :

$$P[T_k \leq \min T_i, T_j] = \frac{\mu_k}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

P2. Tres barcos enemigos A, B y C están luchando en el mar. Por simplicidad, suponemos que disparan todos a la vez, por ejemplo, cada minuto. Así, en cada instante de disparo, los barcos eligen al contrincante más peligroso que aún quede a flote y le disparan. Las probabilidades respectivas que tienen A, B y C de acertar en su blanco son 0.2, 0.3 y 0.4. Además, si un barco es alcanzado, queda fuera de combate y se hunde.

1. (2 pts.) Plantee una CMH para modelar el proceso, indicando la probabilidad inicial, las probabilidades de transición y las clases de comunicación. Clasifique además los estados en recurrentes y transientes e indique, en caso de existir, los estados absorbentes.
2. (2 pt.) Calcule el tiempo medio que dura la batalla. ¿Con qué probabilidad gana cada uno de los barcos la batalla?
3. (2 pts.) Responda la pregunta anterior suponiendo que los barcos A y B son del mismo bando.

Sol.

- (a) Primero, notemos que en principio todos los barcos están en batalla. Como el más peligroso es C (porque tiene mayor probabilidad de acertar), entonces A y B le dispararán a él. En tanto C le disparará a B que es el segundo más peligroso.

En virtud de esto, y para simplificar la codificación de estados, el escenario en que A muere y B y C quedan vivos, nunca ocurre.

Así, denotaremos los estados que representarán qué barcos quedan en batalla y cuáles están fuera de combate. Usaremos la siguiente codificación:

Estado	A	B	C
1	<i>vivo</i>	<i>vivo</i>	<i>vivo</i>
2	<i>vivo</i>	<i>vivo</i>	<i>muerto</i>
3	<i>vivo</i>	<i>muerto</i>	<i>vivo</i>
4	<i>vivo</i>	<i>muerto</i>	<i>muerto</i>
5	<i>muerto</i>	<i>vivo</i>	<i>muerto</i>
6	<i>muerto</i>	<i>muerto</i>	<i>vivo</i>
7	<i>muerto</i>	<i>muerto</i>	<i>muerto</i>

Si llamamos p_A, p_B, p_C a las probabilidades de acertar de A, B y C , entonces nos quedan:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= (1 - p_A)(1 - p_B)(1 - p_C) &= 0,336 \\
P_{12} &= (p_A + p_B - p_{APB})(1 - p_C) &= 0,264 \\
P_{13} &= (1 - p_A)(1 - p_B)p_C &= 0,224 \\
P_{14} &= (p_A + p_B - p_{APB})p_C &= 0,176 \\
P_{22} &= (1 - p_A)(1 - p_B) &= 0,56 \\
P_{24} &= p_A(1 - p_B) &= 0,14 \\
P_{25} &= (1 - p_A)p_B &= 0,24 \\
P_{27} &= p_{APB} &= 0,06 \\
P_{33} &= (1 - p_A)(1 - p_C) &= 0,48 \\
P_{34} &= p_A(1 - p_C) &= 0,12 \\
P_{36} &= (1 - p_A)p_C &= 0,32 \\
P_{37} &= p_{APC} &= 0,08 \\
P_{44} &= 1 \\
P_{55} &= 1 \\
P_{66} &= 1 \\
P_{77} &= 1
\end{aligned}$$

Tenemos que los estados transientes serán todos aquellos en los que aún dura la batalla, a saber, los estados 1, 2 y 3. Los estados recurrentes son 4, 5, 6 y 7. Son, además, absorbentes.

- (b) Podemos definir la matriz de transiciones $T \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$ como sigue:

$$T = \begin{bmatrix} Q & L \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz $I_4 \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ es la matriz identidad y $Q \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es la matriz de estados transientes. Si llamamos m_{ij} al número esperado de veces que la cadena

pasa por j partiendo desde i , entonces (como vimos en clases):

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k P_{ik} m_{kj}$$

y por lo tanto llamando $M = (m_{ij})_{ij}$, matricialmente queda:

$$M = I + QM \Leftrightarrow M = (I - Q)^{-1}$$

Así, basta invertir la matriz $(I - Q)$ para obtener los m_{ij} .

Es fácil invertir $I - Q$:

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 - P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ 0 & 1 - P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - P_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-P_{11}} & \frac{P_{12}}{(1-P_{11})(1-P_{22})} & \frac{P_{13}}{(1-P_{11})(1-P_{33})} \\ 0 & \frac{1}{1-P_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-P_{33}} \end{bmatrix}$$

Si llamamos f_{ij} a la probabilidad de alguna vez hacer una transición al estado j dado que partimos en el estado i , entonces tendremos que $m_{ij} = m_{jj} f_{ij}$, o bien:

$$f_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}$$

Ahora, para calcular la esperanza de la duración de la batalla, consideramos que hay cuatro escenarios en los cuales se acaba la batalla: gana A , gana B , gana C o mueren todos. Son respectivamente los estados 4,5,6 y 7. De este modo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Tiempo) &= \mathbb{E}(Tiempo|gana A)\mathbb{P}(gana A) \\ &+ \mathbb{E}(Tiempo|gana B)\mathbb{P}(gana B) \\ &+ \mathbb{E}(Tiempo|gana C)\mathbb{P}(gana C) \\ &+ \mathbb{E}(Tiempo|mueren todos)\mathbb{P}(mueren todos) \end{aligned}$$

Calculemos las probabilidades. Usaremos la notación $\mathbb{P}(K|i) = \mathbb{P}(\text{gana } K | \text{La cadena se encuentra en el estado } i)$:

- $\mathbb{P}(\text{gana } A) = P_{14} + \mathbb{P}(A|1)P_{11} + \mathbb{P}(A|2)P_{12} + \mathbb{P}(A|3)P_{13}$
- $\mathbb{P}(\text{gana } B) = P_{15} + \mathbb{P}(B|1)P_{11} + \mathbb{P}(B|2)P_{12}$
- $\mathbb{P}(\text{gana } C) = P_{16} + \mathbb{P}(C|1)P_{11} + \mathbb{P}(C|3)P_{13}$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}) = \mathbb{P}(\text{mueren todos}|1)P_{11}$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}|2)P_{12}$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}|3)P_{13}$

A su vez, vemos que:

- $\mathbb{P}(A|2) = P_{24} + \mathbb{P}(A|2)P_{22} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|2) = \frac{P_{24}}{1-P_{22}}$
- $\mathbb{P}(A|3) = P_{34} + \mathbb{P}(A|3)P_{33} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|3) = \frac{P_{34}}{1-P_{33}}$
- $\mathbb{P}(B|2) = P_{25} + \mathbb{P}(B|2)P_{22} \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|2) = \frac{P_{25}}{1-P_{22}}$
- $\mathbb{P}(C|3) = P_{36} + \mathbb{P}(C|3)P_{33} \Leftrightarrow \mathbb{P}(C|3) = \frac{P_{36}}{1-P_{33}}$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}|2) = P_{27} + \mathbb{P}(\text{mueren todos}|2)P_{22} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{mueren todos}|2) = \frac{P_{27}}{1-P_{22}}$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}|3) = P_{37} + \mathbb{P}(\text{mueren todos}|3)P_{33} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{mueren todos}|3) = \frac{P_{37}}{1-P_{33}}$

Como la cadena parte en el estado 1, $\mathbb{P}(\text{gana K}) = \mathbb{P}(K|1)$. Con esto,

- $\mathbb{P}(\text{gana A}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(P_{14} + \frac{P_{12}P_{24}}{1-P_{22}} + \frac{P_{13}P_{34}}{1-P_{33}} \right)$
- $\mathbb{P}(\text{gana B}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(\frac{P_{12}P_{25}}{1-P_{22}} \right)$
- $\mathbb{P}(\text{gana C}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(\frac{P_{13}P_{36}}{1-P_{33}} \right)$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(\frac{P_{12}P_{27}}{1-P_{22}} + \frac{P_{13}P_{37}}{1-P_{33}} \right)$

Por otro lado, y usando las definiciones de f_{ij}

- $\mathbb{E}(\text{Tiempo}|\text{gana A}) = m_{11} + f_{12}m_{22} + f_{13}m_{33} = m_{11} + m_{12} + m_{13}$
- $\mathbb{E}(\text{Tiempo}|\text{gana B}) = m_{11} + f_{12}m_{22} = m_{11} + m_{12}$
- $\mathbb{E}(\text{Tiempo}|\text{gana C}) = m_{11} + f_{13}m_{33} = m_{11} + m_{13}$
- $\mathbb{E}(\text{Tiempo}|\text{mueren todos}) = m_{11} + f_{12}m_{22} + f_{13}m_{33} = m_{11} + m_{12} + m_{13}$

y el resto, es calcular.

- (c) El único cambio que hay es que ahora el estado 2 será absorbente, y por lo tanto no hay links saliendo de él; además, $P_{22} = 1$. Así,

- $\mathbb{P}(\text{gana equipo AB}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(P_{12} + P_{14} + P_{15} + \frac{P_{13}P_{34}}{1-P_{33}} \right)$
- $\mathbb{P}(\text{gana C}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(\frac{P_{13}P_{36}}{1-P_{33}} \right)$
- $\mathbb{P}(\text{mueren todos}) = \frac{1}{1-P_{11}} \left(\frac{P_{13}P_{37}}{1-P_{33}} \right)$

P3. En un sistema informático de entrada y salida, un buffer de tamaño N (es decir, que puede contener como máximo N datos) funciona de la manera siguiente:

- en todos los instantes t_{2i} ($i = 0, 1, \dots$) puede recibir un dato del exterior; un dato entrará en el buffer si realmente hay dato (con probabilidad p) y si el buffer no está lleno,
- en todos los instantes t_{2i+1} ($i = 0, 1, \dots$), la memoria central puede pedirle un dato al buffer; un dato saldrá del buffer si efectivamente ha sido pedido (con probabilidad q) y si el buffer no está vacío.

Las variables aleatorias “presencia de un dato para entrar” y “petición de la memoria central de un dato” son variables independientes. Se consideran 3 procesos, para $i = 0, 1, \dots$: X_i = número de datos que tiene el buffer justo después de la operación en el instante t_i , $Y_i = X_{2i}$ y $Z_i = X_{2i+1}$.

1. (2 pts.) Demuestre que los procesos son cadenas de Markov. ¿Es el primer proceso una cadena de Markov estacionaria? Calcule las probabilidades de transición del segundo y tercer procesos.
2. (2 pts.) Nos interesa el proceso Y_i . Estudiar sus estados y deducir su comportamiento asintótico.

3. (2 pts.) Cuando el buffer está lleno y hay un dato para entrar, este dato se pierde. Suponiendo que $0 < p, q < 1$, se consideran las variables aleatorias enteras: T = “primera etapa tal que $Y_i < N$, sabiendo que $Y_0 = N$ ”, y V = “número de datos perdidos entre los instantes 1 y T , sabiendo que $Y = N$ ”. Calcule la distribución de TT , la distribución de V condicionada a TT y la esperanza condicional de V dado T . Deduzca el número medio de datos perdidos cuando el buffer está lleno.

Sol.

parte a). Calculamos para los tres procesos las probabilidades de transición.

Para la cadena X_n las probabilidades son $P_1 = P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) =$

$$P_1 = \begin{cases} p & \text{si } n \text{ es par y } i_n = i_{n-1} + 1 \text{ con } i_n \leq N \\ 1 - p & \text{si } n \text{ es par y } i_n = i_{n-1}, \\ q & \text{si } n \text{ es impar y } i_{n-1} = i_n + 1 \text{ con } i_n \geq 0 \\ 1 - q & \text{si } n \text{ es impar y } i_{n-1} = i_n, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede ver que el proceso solo depende del tiempo anterior, con lo que cumple la propiedad markoviana.

Para el segundo proceso las probabilidades $P_2 = P(Y_n = i_n / Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-2} = i_{n-2}, \dots, Y_0 = i_0)$ son las siguientes:

$$P_2 = \begin{cases} d = (1 - p)(1 - q) + qp & \text{si } i_{n-1} = i_n \text{ con } 0 < i_n < N \\ u = (1 - q)p & \text{si } i_n = i_{n-1} + 1 \text{ con } 0 < i_{n-1} < N \\ p & \text{si } i_n = i_{n-1} + 1 \text{ con } i_{n-1} = 0 \\ l = q(1 - p) & \text{si } i_n = i_{n-1} + 1 \text{ con } 0 < i_{n-1} < N \\ 1 - q + qp & \text{si } i_{n-1} = N, i_n = N \\ 1 - q & \text{si } n \text{ es impar y } i_{n-1} = i_n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los casos son:

- caso intermedio: nada se fue y llegó , se fue y luego llegó
- aumenta uno: nada se va y llega uno
- aumenta uno desde 0: llega uno
- disminuye uno: uno se va y no llega nada
- se mantiene lleno: nada se fue o se fue y llegó
- se mantiene vacío: nada llega

Como nuevamente solo depende de los tiempos anteriores también es cadena de markov.

Para el tercer proceso las probabilidades $P_3 = P(Z_n = i_n / Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_{n-2} = i_{n-2}, \dots, Z_0 = i_0)$ son las siguientes:

$$P_3 = \begin{cases} (1-p)(1-q) + pq & \text{si } i_{n-1} = i_n \text{ con } 0 \leq i_{n-1} < N \\ p(1-q) & \text{si } i_n = i_{n-1} + 1 \text{ con } 0 \leq i_{n-1} < N \\ (1-p)q & \text{si } i_n = i_{n-1} + 1 \text{ con } 0 < i_{n-1} < N \\ 1-q & \text{si } i_{n-1} = N, i_n = N \\ 1-q + pq & \text{si } n \text{ es impar y } i_{n-1} = i_n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los casos son:

- Caso intermedio: nada llega y nada se va, o algo se llega y algo se va
- Aumenta uno: uno llega y nada se va
- Disminuye uno: nada llega y uno se va
- Se mantiene lleno: nada se va
- Se mantiene vacío: nada llega o algo llega y se va
- También cumple la propiedad markoviana.

parte b). Vemos que el proceso Y_n tiene asociada una matriz de transición tridiagonal como sigue:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l & d & u & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l & d & u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & l & d & u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & l & d & u \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & l & qp + 1 - q \end{bmatrix}$$

Para las probabilidades estacionarias usamos que $\pi = \pi P$ y que $\sum_i \pi_i = 1$ luego:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + l\pi_1 \\ \pi_0 &= \frac{l}{p}\pi_1 \end{aligned}$$

con lo que:

$$\pi_1 = \frac{p}{l}\pi_0$$

siguiendo:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p\pi_0 + d\pi_1 + l\pi_2 \\ \pi_1 &= \frac{l}{u}\pi_2 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\pi_2 = \frac{up}{l^2} \pi_0$$

Luego, sucesivamente para $i \leq N - 1$ se cumple :

$$\pi_i = \frac{pu^{i-1}}{l^i} \pi_0$$

y además:

$$\pi_{i-1} = \frac{l}{u} \pi_i$$

Para N :

$$\pi_N = u\pi_{N-1} + (qp + 1 - q) \pi_N$$

$$\pi_N(1 - qp - 1 + q) = u\pi_{N-1}$$

$$\pi_N(q(1 - p)) = u\pi_{N-1}$$

$$\pi_N = \frac{u}{l} \pi_{N-1}$$

Luego :

$$\pi_N = \frac{pu^{N-1}}{l^N} \pi_0$$

Imponiendo la condicin de que las probabilidades estacionarias sumen 1 se tiene:

$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_0(1 + \sum_{i=1}^N \frac{pu^{i-1}}{l^i}) = 1$$

$$\pi_0 \left(1 + \frac{p}{u} \sum_{i=1}^N \left(\frac{u}{l} \right)^i \right) = 1$$

luego

$$\pi_0 \left(1 + \frac{p}{u} \left(\frac{\frac{u}{l}^{N+1} - \frac{u}{l}}{\frac{u}{l} - 1} \right) \right) = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{u} \left(\frac{\frac{u}{l}^{N+1} - \frac{u}{l}}{\frac{u}{l} - 1} \right) \right)}$$

Con esto se calculan todas las probabilidades estacionarias.

parte c). Si el buffer parte lleno, entonces se mantendrá así con una probabilidad $P_2(N, N) = qp + 1 - q$, con lo que se tendrá que:

$$P[T = t] = P_2(N, N)^{t-1}(1 - P_2(N, N))$$

es decir una geométrica de parámetro $P_2(N, N)$

La variable V es el número de datos perdidos entre 1 y T dado que el buffer estaba lleno, solo se pierden datos si al tiempo llegó alguno, entonces sabemos que con probabilidad p llega un dato, dado $T = t$ ($t - 1$ tiempos el buffer se mantuvo lleno y en el t se vaci un dato), se pierden aquellos donde se pidió ingresar un dato, luego la distribucion es una binomial de parámetro $p, t - 1$ pues solo $t - 1$ veces estuvo lleno y se pudo haber perdido un dato.

Luego :

$$P[V = v|T = t] = \binom{t-1}{v} p^v (1-p)^{t-1-v}$$

Calculamos la esperanza de la probabilidad, que esta dada por $E[P[V|T]] = (1 - t)p$ y la esperanza no condicionada

$$E[V] = E[E[P[V|T]]] = E[(1 - t)p]$$

$$E[V] = pE[(1 - t)] = p \left(1 - \frac{1}{P_2(N, N)} \right)$$