

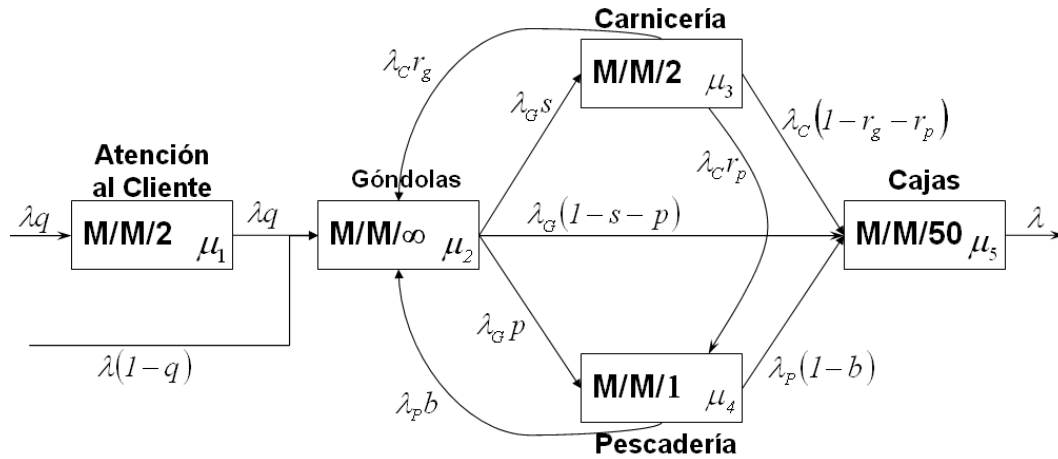


## Pauta Control 3

Jueves 17 de Noviembre de 2005

### Problema 1

- La dinámica de los clientes en el supermercado puede ser modelada según se muestra en la figura.



Las tasas efectivas de entrada a cada subistema y las condiciones para la existencia de estadoo estacionario se muestran en la siguiente tabla:

Subsistema	Tasa	Tasa efectiva	Condición de estacionariedad
Atención al Cliente	$\lambda_{AC}$	$\lambda q$	$\lambda_{AC} < 2\mu_1$
Góndolas	$\lambda_G$	$\frac{\lambda}{1 - r_g s - b p - b r_p s}$	
Carnicería	$\lambda_C$	$\frac{s \lambda}{1 - r_g s - b p - b r_p s}$	$\lambda_C < 2\mu_3$
Pescadería	$\lambda_P$	$\frac{\lambda(p + r_p s)}{1 - r_g s - b p - b r_p s}$	$\lambda_P < \mu_4$
Cajas	$\lambda_{CA}$	$\lambda$	$\lambda_{CA} < 50\mu_5$

Estas tasas se obtienen resolviendo el sistema conformado por:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_G &= \lambda + r_g \lambda_C + b \lambda_P \\ \lambda_C &= s \lambda_G \\ \lambda_P &= p \lambda_G + r_p \lambda_C \end{aligned} \right\}$$

2. Utilizando la ecuación de Little para calcular  $W$  a partir de  $L$  en los sistemas con un número infinito de servidores, y considerando sólo el tiempo de “servicio” en las góndolas ( $M/M/\infty$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} W_{AC} &= \frac{2\rho}{\lambda_{AC}(1-\rho^2)} & \rho &= \frac{\lambda_{AC}}{2\mu_1} \\ W_G &= \frac{1}{\mu_2} \\ W_C &= \frac{2\rho}{\lambda_C(1-\rho^2)} & \rho &= \frac{\lambda_C}{2\mu_3} \\ W_P &= \frac{\rho}{\lambda_P(1-\rho)} & \rho &= \frac{\lambda_P}{\mu_4} \\ W_{CA} &= \frac{1}{\mu_5} + \frac{2\rho\lambda_{CA}^{49}\pi_0}{(1-\rho^2)\mu_5^{50}50!} & \rho &= \frac{\lambda_C}{50\mu_5} \\ \pi_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{49} \frac{\lambda_{CA}^n}{\mu_5^n n!} + \frac{\lambda_{CA}^{50}}{\mu_5^{50}50! \left(1 - \frac{\lambda_{CA}}{50\mu_5}\right)} \right]^{-1} \end{aligned}$$

3. El tiempo que permanece en el restaurant un cliente que pasa por *Atención al Cliente* corresponde a:

$$W_{AC} + T_G$$

Donde  $T_i \quad \forall i \in \{G, C, P, CA\}$  corresponde al tiempo que le resta a un cliente en el supermercado condicional en que acaba de entrar al subsistema  $i$ , mientras que el tiempo de permanencia para alguien que no pasa por el subsistema de *Atención al Cliente* es simplemente  $T_G$ .

El siguiente sistema de ecuaciones permite encontrar el valor de  $T_i \quad \forall i \in \{G, C, P, CA\}$ .

$$\left. \begin{aligned} T_G &= W_G + sT_C + pT_P + (1-s-p)T_{CA} \\ T_C &= W_C + r_gT_G + r_pT_P + (1-r_g-r_p)T_{CA} \\ T_P &= W_P + bT_G + (1-b)T_{CA} \\ T_{CA} &= W_{CA} \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$T_G = \frac{W_G + sW_C + W_{CA}(s(1-r_p-r_g) + 1-s-p + (p+r_p s)(1-b)) + W_P(p+r_p s)}{1-r_g s - b(p+r_p s)}$$

4. La máxima reducción del tiempo en el sistema que se puede lograr se obtiene cuando todos los subsistemas pasan a ser  $M/M/\infty$ . De esta forma los nuevos tiempos en cada subsistema pasan a ser:

$$W_{AC} \longrightarrow W'_{AC} = \frac{1}{\mu_1}$$

$$W_C \longrightarrow W'_C = \frac{1}{\mu_3}$$

$$W_P \longrightarrow W'_P = \frac{1}{\mu_4}$$

$$W_{CA} \longrightarrow W'_{CA} = \frac{1}{\mu_5}$$

Nótese que ya que se está considerando un cliente que no pasa por *Atención al Cliente* no es necesario modificar este subsistema.

Con estos nuevos valores, el tiempo que demora un cliente que no pasa por *Atención al Cliente*, en promedio en el largo plazo, es:

$$T'_G = \frac{W_G + sW'_C + W'_{CA}(s(1 - r_p - r_g) + 1 - s - p + (p + r_p s)(1 - b)) + W'_P(p + r_p s)}{1 - r_g s - b(p + r_p s)}$$

Por lo que la máxima reducción posible corresponde a:

$$T_G - T'_G = \frac{s(W_C - W'_C) + (W_{CA} - W'_{CA})(s(1 - r_p - r_g) + 1 - s - p + (p + r_p s)(1 - b)) + (W_P - W'_P)(p + r_p s)}{1 - r_g s - b(p + r_p s)}$$

## Problema 2

### Parte A

1. Recordando que para  $(A, B > 0)$  la probabilidad de que un Browniano estándar llegue a  $A$  antes que a  $-B$  es  $P_A = \frac{B}{A+B}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} E(\$) &= \frac{B}{A+B}(P_0 + A) + \frac{A}{A+B} \left[ \frac{B}{A+2B}(-(P_0 - B) + 2(P_0 + A)) + \frac{A+B}{A+2B}(-(P_0 - B) + 2(P_0 - 2B)) \right] \\ &= \frac{P_0(A^2 + 2B^2 + 3AB)}{(A+B)(A+2B)} = P_0 \end{aligned}$$

Este resultado también es justificable mediante argumentos de simetría.

2. Notar que el resultado de la parte anterior no depende de  $A$  ni de  $B$ . La condición es simplemente que:

$$P_0 = R$$

## Parte B

1.

$$F_{B_t}[x] = P\left[\frac{B_t}{\sqrt{t}} \leq x\right] = P[B_t \leq x\sqrt{t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{t} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} du$$

En que hemos usado el cambio de variable  $z = \frac{u}{\sqrt{t}}$ .

Concluimos que  $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \rightarrow N(0, 1)$ . Luego  $B_t\sqrt{t}$  no es Browniano.

2. Notar que para  $x, y \geq 0$  se tiene:

$$P(B_t^* \geq x, B_t \leq x - y) = P(B_t > x + y) = P\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} > \frac{x + y}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x + y}{\sqrt{t}}\right)$$

Si sustituimos en la relación anterior  $u = x - y$ ,  $v = x$ , para  $(u, v) \in D$  se tiene:

$$P(B_t < u, B_t^* \geq v) = 1 - \Phi\left(\frac{2v - u}{\sqrt{t}}\right) = \Phi\left(\frac{u - 2v}{\sqrt{t}}\right)$$

Por último, se concluye:

$$P(B_t < u, B_t^* < v) = P(B_t < u) - P(B_t < u, B_t^* \geq v) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{u - 2v}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall (u, v) \in D$$

3. Una alternativa es obtener la densidad conjunta de  $B_t$  y  $B_t^*$  del resultado anterior, derivando una vez  $c/r$  a  $v$  y otra  $c/r$  a  $u$ . Se tiene que:

$$f_{(B_t, B_t^*)}(u, v) = \frac{2(2v - u)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2v - u)^2}{2t}} \quad \forall (u, v) \in D$$

Luego, se puede integrar en todo el dominio de  $u$  el resultado anterior para obtener la distribución marginal de  $B_t^*$  y comparar este resultado con la distribución de  $P(|B_t| \geq x)$ , que es fácilmente computable, y ver que son iguales.

Otra alternativa es notar que se cumplen las 2 siguientes relaciones:

$$(1) \quad P(B_t^* \geq x, B_t \leq x) = P(B_t > x)$$

$$(2) \quad P(B_t^* \geq x, B_t > x) = P(B_t > x)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$P(B_t^* \geq x, B_t \leq x) + P(B_t^* \geq x, B_t > x) = 2P(B_t > x)$$

El término de la izquierda es simplemente  $P(B_t^* \geq x)$ . Y por simetría, el término de la izquierda es  $P(|B_t| \geq x)$ . Por lo que se tiene la relación pedida:

$$P(B_t^* \geq x) = P(|B_t| \geq x) \quad \forall x \geq 0$$

4. Primero notemos que

$$P(|B_t| > x) = P\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{t}} > \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

Luego, de la parte 3 se concluye:

$$P(B_t^* \leq x) = 1 - P(B_t^* > x) = 1 - P(|B_t| > x) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1$$

5. Notar que dada la propiedad de incrementos independientes del Browniano, a partir del instante  $T$  (cuando King parte la observación), la evolución futura del precio es también Browniana y lo único relevante de lo que ha pasado anteriormente es que el origen ahora está en  $(P_0 + A)$ .

Adicionalmente, tomando esperanza de  $B_t^*$  de acuerdo a lo encontrado en la pregunta anterior, se tiene:

$$E(B_t^*) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

Luego, el valor esperado del máximo precio que ve King en el intervalo  $[T, 2T]$  es:

$$E(P_0 + A + B_{(2T-T)}^*) = P_0 + A + \sqrt{\frac{2T}{\pi}}$$

6. Es fácil notar la siguiente relación entre eventos:

$$(\tau_a > t) \iff (B_t^* < a)$$

Usando la parte 4, se tiene entonces:

$$P(\tau_a \leq t) = 1 - P(\tau_a > t) = 1 - \left(2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)$$

Derivando lo anterior c/r a  $t$  se llega a lo pedido:

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{t^{3/2}} \phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall t > 0$$

Para concluir, notar que  $\phi(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Luego:

$$P(\tau_a \geq t) = \int_t^\infty \frac{a}{s^{3/2}} \phi\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right) ds \leq \int_t^\infty \frac{a}{s^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} ds = \frac{a}{\sqrt{t}} \quad \forall a, t > 0$$

### Problema 3

Puede aparecer correlación entre los registros lo que implica una mayor varianza, que es justamente lo que Ross postulaba minimizar. Cuando la correlación es negativa el efecto es menor que cuando es positiva.

Para reducir la varianza, Ross propone realizar un muestreo estratificado, condicionando por una v.a. discreta, valiéndose de la siguiente identidad:

$$Var(x) = E_Y(Var(x/Y)) + V_Y(E(x/Y))$$

$$\Rightarrow E_Y(Var(x/Y)) \leq Var(x)$$

También busca utilizar datos obtenidos de una misma corrida, a modo de lograr obtener correlaciones negativas entre los datos para reducir así la varianza.

Dudas y/o errores:

Mario Guajardo  
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung  
dyung@ing.uchile.cl