

Tarea 5

Entrega: Viernes 17 de octubre a las 10am antes del control 1

1. Considere un modelo de Cournot en el que N firmas tienen costos marginales iguales a $c \geq 0$ y enfrentan una demanda $P(Q) = a - Q$, con $a > c$. Sea $q^{EN} \geq 0$ la cantidad que cada firma produce en el único EN del juego. Suponga que el juego es infinitamente repetido con monitoreo perfecto, y factor de descuento $\delta \in]0, 1[$.
 - a. Para $\bar{q} > 0$ considere estrategias gatillo $\sigma^{\bar{q}}$ tal que en el camino del juego todas las firmas juegan \bar{q} y desviaciones se castigan con reversión al equilibrio de Nash. Muestre que para todo $\delta > 0$, las firmas siempre pueden coludirse (quizá de manera imperfecta). Es decir, muestre que para todo $\delta > 0$ existe $\bar{q} < q^{EN}$ tal que $\sigma^{\bar{q}}$ es un EPS.
 - b. Sea Q^M la cantidad total monopólica. Encuentre el factor de descuento $\bar{\delta}$ de modo que para todo $\delta > \bar{\delta}$, estrategias gatillo tienen como resultado de equilibrio a cada firma fijando una cantidad $Q^M/2$.
 - c. Encuentre el factor de descuento $\hat{\delta}$ de modo que para todo $\delta > \hat{\delta}$, estrategias de garrote-zanahoria tienen como resultado de equilibrio a cada firma fijando una cantidad $Q^M/2$. Para definir las estrategias garrote-zanahoria, suponga que las firmas castigan una desviación con un garrote (simétrico) $q^G < q^{EN}$ durante un periodo, y luego vuelven a la fase cooperativa. Encuentre q^G de modo tal que $\hat{\delta}$ sea lo menor posible.
2. Considere un conjunto $\{1, \dots, N\}$, con $N \geq 3$, de amigos que juegan el siguiente juego de favores. En cada $t \in \{1, \dots, N\}$, el jugador t decide si hacerle o no un favor al jugador $t + 1$ (si $t = N$ entonces el jugador N decide si hacerle o no un favor al jugador 1). De este modo, el conjunto de acciones del jugador que mueve en la ronda t es $\{F, NF\}$ (F si hace favor, NF si no lo hace). El costo de hacer el favor es igual a $c > 0$ para el habitante t , pero el habitante $t + 1$ (o 1 si $t = N$) que recibe el favor tiene un beneficio igual a $v > 0$. Los amigos descuentan pagos a tasa $\delta < 1$. Por ejemplo, si todos los amigos hacen favores el vector de pagos es

$$(-c + \delta^{N-1}v, (v - \delta c), \delta(v - \delta c), \dots, \delta^{N-2}(v - \delta c))$$
 si el jugador 1 es el único que hace el favor el vector de pagos es $(-c, v, 0, \dots, 0)$ y si sólo N hace el favor los pagos son $(\delta^{N-1}v, 0, \dots, 0, -\delta^{N-1}c)$. El juego es de información perfecta. Suponemos que $v - \delta c > 0$.
 - a. Describa el conjunto de estrategias de cada jugador.
 - b. Calcule todas las soluciones de inducción reversa.
 - c. Sea $\sigma = (\sigma_i)_i$ un perfil de estrategias. Defina $h^\sigma \in \{F, NF\}^N$ como la historia que resulta una vez que el juego se ha jugado con los jugadores usando la estrategia σ . Muestre que si σ es un EN, entonces $h^\sigma = (NF, \dots, NF)$.

En lo que sigue, suponga ahora que el juego es infinitamente repetido de modo que en cada $t \geq 1$ de la forma $t = nN + m$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $m = m(t) \in \{1, \dots, N\}$, el jugador m decide si hacerle o no un favor al jugador $m + 1$ (si $m = N$ el favor se lo hace al jugador 1).

- d. Considere un subjuego en t donde i debe jugar (decidir si hace o no hace el favor). Encuentre un EPS en cualquier subjuego de la ronda $t + 1$ que minimiza el pago total de equilibrio del jugador i .
- e. Muestre que el juego tiene un EPS en el que en cada ronda se hace el favor ssi

$$(v - \delta c) \frac{\delta^N}{1 - \delta^N} \geq \delta c.$$

HINT: Use la parte d.

- f. Explique por qué es más difícil que haya cooperación cuando N crece.
3. Considere un equipo de dos jugadores que en cada ronda juegan el siguiente dilema del prisionero:

	C	D
C	2, 2	-1, 3
D	3, -1	0, 0

La tecnología de monitoreo es tal que en cada ronda se genera una señal $y \in \{\bar{y}, \underline{y}\}$

$$\pi(\bar{y}, a) = \begin{cases} p & \text{si } a = CC \\ q & \text{si } a = CD \text{ o } a = DC \\ r & \text{si } a = DD \end{cases}$$

con $0 < r < q < p < 1$. El factor de descuento es $\delta < 1$ y nos restringimos al estudio de estrategias públicas.

- (a) Consideramos estrategias de memoria finita. Sea σ^i una estrategia para el jugador i tal que i juega C en el periodo t si la señal en $t - 1$ es $y^{t-1} = \bar{y}$, mientras que juega D en la ronda t si la señal en $t - 1$ es $y^{t-1} = \underline{y}$. Muestre que estas estrategias son un equilibrio ssi

$$\frac{1}{3p - 2q - r} \leq \delta \leq \frac{1}{p + 2q - 3r} \quad (0.0.1)$$

- (b) Muestre que cuando q es cercano a r , las estrategias no pueden ser de equilibrio. Explique.

4. **La monarquía como norma social** Considere una comunidad de N miembros, con N par. En cada $t \geq 1$, cada jugador i se aparea con un jugador $j \neq i$ de manera aleatoria y uniforme. Más formalmente, una función de emparejamiento es $m: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ tal que $m(i) \neq i$ y $[m(i) = j \text{ implica que } m(j) = i]$. En cada t , se decide aleatoria y uniformemente una función de emparejamiento m^t (que es observada por todos los miembros) de modo que si $m^t(i) = j$, entonces i y j juegan el siguiente dilema del prisionero: con $l, g > 0$. Las funciones

	C	D
C	1, 1	-l, 1 + g
D	1 + g, -l	0, 0

de emparejamiento $(m^t)_{t \geq 1}$ se realizan independientemente. El juego es de monitoreo perfecto: cada jugador observa la historia previa de jugadas en sus interacciones y de las de los otros jugadores. El factor de descuento es $\delta < 1$.

- a. Suponga que $N = 2$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que haya cooperación en el camino del equilibrio de un EPS.
- b. Suponga que $N \geq 4$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que cooperación ocurra en el camino del equilibrio de un EPS.
- c. Solo por esta parte, suponga que la función de monitoreo no se realiza de manera uniforme de modo que hay algunos pares que son más probables. Repita la parte b del problema.

En lo que sigue, exploramos la posibilidad de que la comunidad sostenga normas con altos niveles de desigualdad en las que unos pocos disfrutan pagos altos y otros pagos bajos. Por simplicidad, suponemos que $N = 4$ y nos interesamos en una norma que tiene al jugador 1 como favorecido, o rey, y al resto como no favorecido, o sirviente. Consideramos un resultado (outcome) desigual en el que el jugador 1 juega siempre D , mientras que los jugadores 2, 3, y 4, juegan siempre C .

- d. Muestre que exista $\bar{\delta} < 1$ tal que para todo $\delta > \bar{\delta}$, existe un EPS cuyo camino del equilibrio coincide con el resultado desigual detallado arriba. Explique intuitivamente el equilibrio encontrado.
 - e. Puede haber un equilibrio con 2 reyes y 2 sirvientes? Contraste su respuesta con lo encontrado en d. Explique.
5. Considere un juego en el que generaciones traslapadas de agentes deciden su consumo y ahorro. Más formalmente, en cada periodo $t \geq 0$, la generación t decide su consumo C_t y ahorro S_t dada una cantidad de recursos $K_t \geq 0$ que recibe de la generación anterior, con $C_t + S_t \leq K_t$. La evolución de la variable (K_t) viene dada por $K_{t+1} = f(S_t)$, con $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0, 1[$. La función de utilidad de la generación t viene dada por $\ln(C_t) + \delta \ln(C_{t+1})$, con $\delta \in]0, 1[$. Todas las generaciones observan perfectamente las decisiones de las generaciones anteriores. Identifique la variable que es relevante en términos de pagos y encuentre un equilibrio Markoviano perfecto del juego.