IN702 Microeconomía II | Profesor: Juan Escobar

Primavera 2014 | Auxiliares: Gian Carniglia , Andrés Perlroth

**Tarea 2**

Entrega: Viernes 29 de Agosto a las 13hrs con Olga Barrera

1. Sea $X$ un conjunto de resultados finito. Suponga que las preferencias $\succeq$ sobre $\Delta(X)$ tienen una representación por función de utilidad esperada $U$.

   a. Muestre que $\succeq$ satisface el axioma de independencia.

   b. Considere ahora una segunda representación $V$ de $\succeq$ como utilidad esperada. Muestre que existe $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ tal que para todo $p \in \Delta(X)$, $U(p) = a + bV(p)$.

2. Para cada una de las preferencias sobre loterias listadas, discuta si son racionales, continuas y satisfacen el axioma de independencia.

   a. Preferencias por uniformidad:

$$p \succeq q \text{ ssi } \sum_{x\in X}(p(x) - \frac{1}{|X|})^2 \leq \sum_{x\in X}(q(x) - \frac{1}{|X|})^2$$

   b. Peor escenario: Suponga que el agente obtiene un premio $v(x)$ si ocurre el estado $x$. Definimos:

$$p \succeq \text{ ssi } \min\{v(x) \mid p(x) > 0\} \geq \min\{v(x) | q(x) > 0\}$$

3. Una manera usual de construir preferencias sobre loterias es evaluar cada loteria $p$ sobre la basa de dos números: $\mathbb{E}_p[x]$, la esperanza de $p$, y $var_p[x]$, la varianza de $p$.

   a. Muestre que la función $U(p) = \mathbb{E}_p[x] - \frac{1}{4}var_p[x]$ induce una relación de preferencias sobre $\mathcal{P}$ que no es consistente con representación como utilidad esperada. HINT: Considere las loteria $p_1$ que paga 4 con probabilidad 1/2 y 0 con probabilidad 1/2, y la loteria $p_2$ que paga 2 con probabilidad 1/2 y 0 con probabilidad 1/2.

   b. Muestre que las preferencias representadas por $U(p) = \mathbb{E}_p[x] - (\mathbb{E}_p[x])^2 - var_p(x)$ tiene una representación como utilidad esperada. Encuentre la función de utilidad de Bernoulli que las representa.

   c. Suponga ahora que un agente tiene utilidad de Bernoulli $u(w) = -\exp(-\lambda w)$. Muestre que $U(p) = \mathbb{E}_p[u(w)]$ puede ser evaluada considerando $\mathbb{E}_p(w) - \frac{\lambda}{2}var_p(w)^2$. si $p$ es una distribucin normal en $\mathbb{R}$.

4. Considere un agente que tiene utilidad de Bernoulli $u(x) = -\exp(-\lambda x)$, con $\lambda > 0$.

   a. Encuentre el coeficiente de aversión absoluta al riesgo.

   Suponga ahora que el equivalente cierto de una loteria que paga 1000 pesos con probabilidad 1/2 y 0 con probabilidad 1/2 es 470.

b. Calcule el equivalente cierto de una loteria que paga con la misma probabilidad 1500 y 500. Discuta su resultado.

5. Considere un inversor con riqueza $w = 1$ que puede invertir en un activo libre de riesgo cuyo retorno es $R_0$ o en $n$ diferentes activos riesgosos con retorno aleatorio $R_i$. Su utilidad sobre la riqueza $u$ es creciente, diferenciable y cóncava de modo que el agente escoge un portafolio $x_1, \ldots, x_n$ que resuelve el problema

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \mathbb{E}[u(R_0 + \sum_{i=1}^{n}(R_i - R_0)x_i)]$$

sujeto a $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$. Llamamos $W$ a la variable aleatoria $W = R_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i(R_i - R_0)$ cuando el portafolio se escoge óptimamente.

a. Muestre que si el óptimo es interior, entonces para todo $i = 1, ..., n$,

$$\mathbb{E}[u'(W)(R_i - R_0)] = 0$$

b. Use la condición de optimalidad encontrada en a para mostrar que

$$\mathbb{E}[R_i] = R_0 - \frac{1}{E[u'(W)]} cov(u'(W), R_i)$$

donde *cov* denota la covarianza entre dos variables aleatorias.

c. Interprete la ecuación anterior prestando atención en la relación existente entre la covarianza de $R_i$ y la utilidad marginal de la riqueza, y el retorno esperado. En particular, explique por qué un activo cuyo retorno esperado es menor que el activo libre de riesgo puede ser usado por el agente, en contraste al resultado visto en clases cuando hay sólo un activo riesgoso.

d. Ejemplifique el resultado anterior. Para ello, asuma que $R_0 = 2$ y que hay dos activos riesgosos que pueden tomar los valores 1 y 5, con $u(x) = \ln(x)$.