Auxiliar 3 - Semestre Primavera 2014

19 de Agosto, 2014

Repaso Frisch - Waugh

Consideremos el modelo

$$y = \begin{bmatrix} X_A & X_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{bmatrix} + \varepsilon$$

1. Regresionar y sobre X_B y calcular residuos

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{y,-A} &= y - X_B \hat{\beta}_B \\ &= y - X_B \left(X_B' X_B \right)^{-1} X_B' y \\ &= \left(I - X_B \left(X_B' X_B \right)^{-1} X_B' \right) y \\ &= M_{X_B} y \end{aligned}$$

   M_{X_B} es ortogonal a X_B, idempotente y simétrica. Además, $I - M_{X_B}$ es semi definida positiva $\forall\ X_B$.

2. Premultiplicar por M_{X_B} el modelo inicial

$$\begin{aligned} M_{X_B} y &= M_{X_B} X_A \beta_A + M_{X_B} X_B \beta_B + M_{X_B} \varepsilon \\ &= M_{X_B} X_A \beta_A + M_{X_B} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon}_{y,-A} &= \hat{\varepsilon}_{X_A,-A} \beta_A + \epsilon \end{aligned}$$

3. Aplicar MCO en modelo premultiplicado

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_A &= \left((M_{X_B} X_A)' (M_{X_B} X_A) \right)^{-1} (M_{X_B} X_A)' M_{X_B} y \\ &= \left(X_A' M_{X_B}' M_{X_B} X_A \right)^{-1} X_A' M_{X_B}' M_{X_B} y \\ &= \left(X_A' M_{X_B} X_A \right)^{-1} X_A' M_{X_B} y \end{aligned}$$

   En resúmen, para calcular el efecto $\hat{\beta}_A$ el método consiste en

   - Regresionar y sobre todas las variables salvo X_A y calcular los residuos $\hat{u}_1$
   - Regresionar X_A sobre todas las restantes variables independientes y calcular los residuos $\hat{u}_2$
   - Regresionar $\hat{u}_1$ sobre $\hat{u}_2$

Problema 1: Frish-Waugh [STATA]

Este problema tiene como objetivo verificar empíricamente el resultado propuesto por Frish-Waugh. Para esto, considere el modelo

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

Con u siguiendo una distribución $U[-3,3]$ y (X_1, X_2) siguiendo una distribución normal bivariada de media $\overline{\mu} = (2,3)$ y matriz de varianzas covarianzas identidad. Considere como parámetros poblacionales $\beta_1 = 6$ y $\beta_2 = 4$.

1. Simule las variables explicativas, el error del modelo y la variable dependiente. Considere $n = 100$ observaciones
2. Parcialize y de X_1 y obtenga los residuos $\hat{u}_1$
3. Parcialize X_1 de X_2 y obtenga los residuos $\hat{u}_2$
4. Regresione $\hat{u}_1$ sobre $\hat{u}_2$ y verifique el valor de $\hat{\beta}_1$ realizando la reresión múltiple respectiva

Problema 2: Omisión de variables relevantes

Considere el modelo verdadero

$$y = \begin{bmatrix} X_A & X_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{bmatrix} + \varepsilon$$

Donde X_A y X_B corresponden a subconjuntos de las K variables explicativas, con $K_A + K_B = K$, ε tiene media 0 y varianza constante σ^2. Si, erróneamente, se estima el modelo

$$y = X_A\beta_A + \varepsilon$$

1. Calcule $\mathbb{E}(\hat{\beta}_A)$. Determine en que caso el estimador obtenido es insesgado
2. Verifique la inconsistencia del estimador obtenido
3. Calcule la varianza del estimador bajo la especificación errónea y compárela con la verdadera varianza del estimador.

   Hint 1: Podría ser útil el teorema de Frisch-Waugh.
   Hint 2:[Anemiya] Sean A y B matrices invertibles. Entonces $A - B$ es semi-definida positiva si y solo si $B^{-1} - A^{-1}$ es semi-definida positiva.

Problema 3: Inclusión de variables irrelevantes

Suponga ahora que el modelo verdadero es

$$y = X_A \beta_A + \varepsilon$$

Sin embargo, erróneamente, se estima

$$y = \begin{bmatrix} X_A & X_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{bmatrix} + \varepsilon$$

1. Calcule $\mathbb{E}(\hat{\beta})$. Determine si existe sesgo en $\hat{\beta}_A$.

   Hint 1: Considere conocida la relación

   $$\begin{bmatrix} X'_A X_A & X'_A X_B \\ X'_B X_A & X'_B X_B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ C' & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}(I + CFC'A^{-1}) & -A^{-1}CF \\ -FC'A^{-1} & F \end{bmatrix}$$

   Con $F = (B - C'A^{-1}C)^{-1}$

2. Verifique la consistencia del estimador obtenido

3. Calcule la varianza del estimador bajo la especificación errónea y compárela con la verdadera varianza del estimador.