IN4402: Aplicaciones de Probabilidades y Estadística en Gestión
Prof: Paola Bordon
Auxs: A. Fernández, D. Olcay

Auxiliar 1 - Semestre Primavera 2014

5 de Agosto, 2014

Problema 1

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{i=n}$ una m.a.s con media μ y varianza σ^2. Se propone

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Como estimador de σ^2

1. Pruebe que S^2 es un estimador insesgado de σ^2
2. Pruebe que S^2 es un estimador consistente de σ^2

   Hint 1: Si un estimador es insesgado y su varianza tiende a 0, entonces es consistente.
   Hint 2: $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
   Hint 3: $\mathbb{E}(\chi^2_n) = n$, $\mathbb{V}(\chi^2_n) = 2n$

Problema 2

Considere un modelo lineal con solo una variable explicativa (Con $X_i > 0$ $\forall i : 1, \cdots, n$)

$$Y_i = \beta X_i + u_i$$

Se definen los siguientes estimadores para el parámetro unidimensional β

- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- $\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- $\hat{\beta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$

Asumiendo que se cumplen todos los supuestos del modelo de mínimos cuadrados ordinarios, determine la esperanza y varianza de cada uno de los estimadores propuestos y seleccione, entre los que sean insesgados, aquel que sea más eficiente.

Problema 3

Considere el modelo lineal en forma matricial basado en una muestra de n observaciones

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Donde β es un vector de $k \times 1$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ y $\mathbb{V}(\varepsilon) = I_n \sigma^2$, con σ una constante poblacional desconocida.

1. Cuál es la dimensión de Y, X y ε ?
2. Pruebe las siguientes propiedades del modelo propuesto
   - $X'\hat{\varepsilon} = 0$
   - $Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$
   - $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = Y'Y - \hat{\beta}_{MCO} X'Y$