Auxiliar 10

Juegos Repetidos y Juegos Bayesianos.

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Benjamín Vatter, Leonel Huerta

21 de Octubre, 2014

Problema 1. Alberto y Bernardo.

Alberto y Bernardo están involucrados en una disputa y deben decidir pelear (P) o ceder (C). Alberto no sabe si Bernardo es *débil* o *fuerte*, pero es de conocimiento común que con probabilidad α es fuerte. Bernardo está completamente informado. Las preferencias de cada uno están representadas por el valor esperado de sus pagos, asignando 0 a quien cede, 1 si el jugador pelea y el otro cede. Si ambos pelean, los pagos son $(-1, 1)$ si Bernardo es fuerte y $(1, -1)$ si es débil.

(a) Formule esta situación como un juego Bayesiano.

Respuesta: Debemos definir 5 elementos: Conjunto de jugadores, acciones disponibles para cada jugador, conjunto de "tipos" para cada jugador, distribución de probabilidad sobre las combinaciones de tipos y función de utilidad para cada jugador (que depende de los tipos y las acciones).

En este caso:

- $I := \{A, B\}$, es el conjunto de jugadores. Donde A representa a Alberto y B a Bernardo.
- $S_i := \{P, C\}$, son las acciones disponibles para cada jugador.
- $\Theta_A := \{\theta\}$ y $\Theta_B := \{F, D\}$, son los conjuntos de tipos para cada jugador. F y D representan que Bernardo puede ser fuerte o débil respectivamente, mientras que Alberto tiene un único tipo.
- $\mathbb{P}[(\theta_A, \theta_B) = (\theta, F)] = \alpha,\ \mathbb{P}[(\theta_A, \theta_B) = (\theta, D)] = 1 - \alpha$ define una distribución de probabilidad sobre $\Theta := \Theta_A \times \Theta_B$.
- Los pagos están descritos por:

A \ B	P	C
P	$-1, 1$	$1, 0$
C	$0, 1$	$0, 0$

Cuando $\theta_B = F$.

Y por:

A \ B	P	C
P	$1, -1$	$1, 0$
C	$0, 1$	$0, 0$

Cuando $\theta_B = D$.

(b) Encuentre los equilibrios bayesianos si $\alpha < 1/2$ y si $\alpha > 1/2$.

Respuesta: Notemos que las estrategias de Bernardo son pares ordenados. Por ejemplo, una estrategia posible para Bernardo es (P, C), donde P es lo que juega cuando es de tipo F y C cuando es de tipo D. Es decir, las estrategias de Bernardo son "condicionales" o "dependientes" de su tipo. Una estrategia para Bernardo le debe decir que jugar en caso de ser fuerte y en caso de ser débil. Por su parte, las estrategias de Alberto son una sola acción. Alberto no puede condicionar dependiendo del tipo de Bernardo, pues él no lo conoce.

Con esto en mente, podemos escribir los pagos "*ex-ante*" del juego para calcular los equilibrios Bayesianos. Así:

		B			
		(P,P)	(C,P)	(P,C)	(C,C)
A	P	$1-2\alpha, 2\alpha-1$	$1, \alpha-1$	$1-2\alpha, \alpha$	$1, 0$
	C	$0, 1$	$0, 1-\alpha$	$0, \alpha$	$0, 0$

Y buscar EB se reduce simplemente a buscar los EN de este juego en forma normal.

Razonando para los distintos casos se obtiene que::

- Si $\alpha < \frac{1}{2} \implies (P,(P,C))$ es EB.
- Si $\alpha > \frac{1}{2} \implies (C,(P,P))$ es EB.

¿Cuál es la intución detrás de este resultado? ¿Qué nos dicen estas estrategias?

Problema 2. Dilema del Prisionero repetido.

Considere el dilema del prisionero (simétrico) descrito por la siguiente tabla:

		$J2$	
		C	D
$J1$	C	1	$-l$
	D	$1+g$	0

Donde los pagos que aparecen en la matriz corresponden a los del jugador 1 y $l, g > 0$. Encuentre el δ mínimo que sustenta la colusión en el camino del equilibrio utilizando estrategias gatillo.

Respuesta: Notar que en la tabla sólo se describen los pagos del jugador 1, y que colusión en el camino del equilibrio quiere decir que ambos jugadores juegan (C) cada vez que pueden.

Consideramos la siguiente estrategia gatillo para ambos jugadores (notar que es la única posible):

"Jugar C en el primer período o si en todos los períodos anteriores se ha jugado (C,C).
En caso contrario jugar D".

Para que este perfil de estrategias describa un EPS, debe ocurrir que ambos jugadores prefieren el pago por jugar de acuerdo a esta estrategia al pago que les dé cualquier otra estrategia alternativa cuando el otro jugador juega de acuerdo a la descrita.

Basta chequear que no existen incentivos a desviarse en la fase colusiva, pues en la fase de castigo se está jugando un EN. Es suficiente además chequear un único desvío en el primer período. Así, para que la estrategia anterior sea de equilibrio debe cumplirse que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \delta^k \geq 1 + g + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot \delta^k \quad \Leftrightarrow \quad \delta \geq \frac{g}{1+g}$$

Donde hemos supuesto que ante la indiferencia el jugador juega C.

Se concluye que el δ mínimo que sustenta la colusión en el camino del equilibrio es $\bar{\delta} = \frac{g}{1+g}$.

Problema 3. Pedro y Juan.

Control 2, Primavera 2013. Pedro y Juan son dos amigos que juegan repetidamente el siguiente juego de favores. En cada $t \geq 1$, sólo un amigo necesita ayuda; suponemos que con probabilidad $\pi_i \geq 0$ el jugador i necesita ayuda con $\pi^P + \pi^J = 1$ (las realizaciones son iid a través del tiempo). Si i es el jugador que necesita ayuda, entonces $-i$ puede ayudar (A) o no ayudar (NA); si $-i$ no ayuda entonces los pagos del período son 0 para ambos jugadores, mientras que si $-i$ ayuda entonces i tiene un beneficio igual a 1, pero $-i$ incurre en un costo igual a $c > 0$, con $1 > c$. Los amigos descuentan pagos con un factor de descuento $\delta < 1$.

(a) Encuentre el EN del juego de etapa.

(b) Muestre que si $\pi_i - c\pi_{-i} > 0$ para todo $i = P, J$, entonces para todo $\delta \geq \text{máx}\{\frac{c}{\pi_i - c\pi_{-i} + c} \mid i = P, J\}$ existe un EPS (en estrategias gatillo) tal que en el camino del equilibrio los amigos se ayudan.

En lo que sigue consideramos una situación en la que Pedro tiende a necesitar más ayuda que Juan. Más específicamente, suponemos $\pi_P = 2/3$ y $\pi_J = 1/3$ y, por simplicidad, $c = 1/2$.

(c) Muestre que las estrategias gatillo usadas en (b) no son un EPS. Explique intuitivamente su resultado.

(d) Consideremos estrategias asimétricas, en las cuales en el camino del equilibrio Juan no siempre ayuda a Pedro. Al principio de cada periodo, permitimos que los amigos observen la realización de una moneda balanceada. En el camino del equilibrio permitimos que si Pedro necesita ayuda, pero la moneda muestra sello, Juan no hace el favor a Pedro; en todos los otros escenarios, el favor debe hacerse. Explique intuitivamente porqué el permitir que Juan no haga algunos favores hace más fácil que en equilibrio se hagan favores.

Respuesta: Les subí la pauta del control respectivo. Éxito en su estudio!