Auxiliar 8

Información Imperfecta y Juegos repetidos

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Benjamín Vatter, Leonel Huerta

8 de Octubre, 2014

Resumen

- La información imperfecta modela situaciones en que un jugador puede no saber qué jugaron jugadores antes que él. Es decir, le toca jugar, pero no sabe con certeza qué pasó en las etapas anteriores del juego.

  Observación: La estructura matemática del juego es de conocimiento común!

- Los juegos estáticos se pueden modelar como juegos dinámicos de información imperfecta. ¿Porqué?

- La noción de EPS pareciera perder fuerza en algunos juegos...

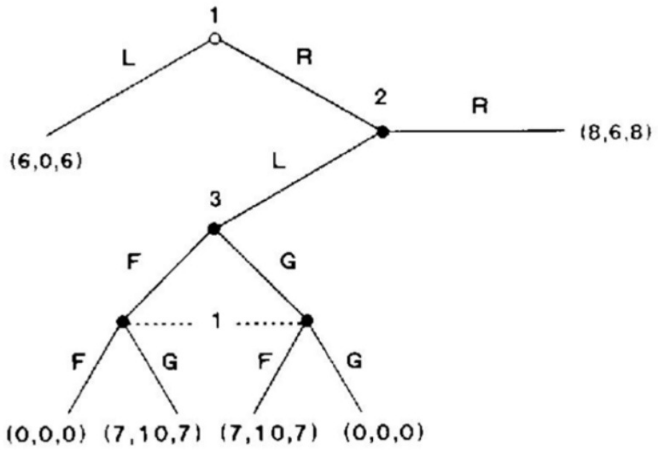
- Un **conjunto de información** I_i para el jugador i es un conjunto de historias donde juega i tal que no puede distinguir una historia de otra en dicho conjunto.

- Un **subjuego** es todo juego que comienza en una historia no terminal tal que si algún conjunto de información incluye historias en el subjuego, entonces contiene historias sólo en el subjuego.

  (Podemos envolver en una "bolsa" el juego sin pasar por líneas punteadas...)

Problema 1. Un juego con información imperfecta.

Considere el siguiente juego de 3 jugadores en forma extensiva:



(a) Identifique todos los subjuegos.

Respuesta: Existen 3 subjuegos:

1. El juego completo, es decir, el que comienza en la primera jugada de 1.
2. El subjuego que comienza cuando se ha jugado sólo R, es decir, el que comienza en la primera jugada de 2.
3. El subjuego que comienza cuando se ha jugado (R,L), es decir, el que comienza en la primera jugada de 3.

(b) Resuelva el juego que parte cuando juega el jugador 3 por primera vez. ¿De qué tipo de juego se trata?

Respuesta: Notemos primero que los pagos de 2 no influyen en las decisiones que toman 1 y 3. Así, es equivalente a resolver lo pedido, resolver el siguiente juego:

(1) \ (3)	F	G
F	$0,0$	$7,7$
G	$7,7$	$0,0$

Este juego es conocido *(Anticoordinación(?))* y sabemos que sus EN son:

1. (F, G), con pagos $(7, 7)$.
2. (G, F), con pagos $(7, 7)$.
3. $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$, con pagos $(7/2, 7/2)$.

Luego, son EN del juego del enunciado son los dados por las mismas estrategias, con los pagos respectivos (agregando los pagos del jugador 2).

(c) Encuentre todos los EPS de este juego.

Respuesta: Resolvamos por inducción hacia atrás reemplazando el último subjuego por los pagos en los distintos equilibrios de ese subjuego.

1. En el último subjuego se juega (F,G):
   $\Rightarrow$ 2 ve un pago de 10 en ese subjuego,
   $\Rightarrow$ 2 prefiere jugar L a R,
   $\Rightarrow$ 1 ve un pago de 7 si juega R,
   $\Rightarrow$ 1 prefiere jugar R a L.
   $\therefore$ Es EPS: (R,L,F,G).
2. En el último subjuego se juega (G,F):
   El análisis es análogo al caso anterior.
   $\therefore$ Es EPS: (R,L,G,F).
3. En el último subjuego se juega $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$:
   $\Rightarrow$ 2 ve un pago de 5 en ese subjuego,
   $\Rightarrow$ 2 prefiere jugar R a L,
   $\Rightarrow$ 1 ve un pago de 8 si juega R,
   $\Rightarrow$ 1 prefiere jugar R a L.
   $\therefore$ Es EPS: (R,R,(1/2,1/2),(1/2,1/2)).

(d) Explique porqué es discutible el resultado encontrado en (b).

Respuesta: *Discusión en clases... El jugador 1 nunca sabrá con certeza que jugó el jugador 3... ¿Cómo se llega a un equilibrio? EPS es sólo EN... Críticas al EN... Propuesto...*

Problema 2. A veces es mejor tener menos información.

El siguiente juego muestra que hay ocasiones en que más información puede ser perjudicial socialmente.

Dos empresas que tienen la concesión de ventas en el estadio deben decidir el día antes si compran bronceador o paraguas para vender el día del partido. El orden de las jugadas es el siguiente:

- La naturaleza decide si mañana lloverá o habrá sol con igual probabilidad. Las empresas A y B, decidirán qué comprar sin conocer la movida de la naturaleza.
- El jugador A elige si compra paraguas o bronceador.
- El jugador B observa la decisión del jugador A, y luego, decide si compra bronceador o paraguas.

Los pagos del juego son como sigue: Si ambas empresas compran lo mismo, entonces el pago es 1 para cada uno, independientemente si llueve o hay sol. Si llueve y uno compra paraguas y el otro bronceador, el pago del que compra paraguas es 4, y el pago del que compra bronceador es 0. Por último si hay sol y uno compra bronceador y uno paraguas, el pago del que compra bronceador es 4, y el pago del que compra paraguas es cero.

(a) Describa el juego y luego represéntelo en forma extensiva.

Respuesta: *Propuesto... imposible graficar en latex :(*
Idea: pensar primero en cajitas.

(b) Demuestre que las siguientes combinaciones de estrategias son equilibrios perfectos en subjuegos:

- A compra bronceador, B compra paraguas.
- A compra paraguas, B compra bronceador.

¿Cuál es el pago esperado de cada empresa en equilibrio?

Respuesta: Veamos entonces que las estrategias anteriores describen EPS:

- El pago esperado para A es:
$$U_A = \mathbb{P}(lluvia) \cdot 0 + \mathbb{P}(sol) \cdot 4 = 2$$
  Si A decide comprar paraguas, entonces su nuevo pago esperado será:
$$U'_A = \mathbb{P}(lluvia) \cdot 1 + \mathbb{P}(sol) \cdot 1 = 1$$
  Luego, A no tiene incentivos para cambiar su decisión.
  El cálculo para B es el mismo, se obtiene que su utilidad esperada es $U_B = 2$ y el único desvío le da $U'_B = 1$.
  Sigue que este caso es EN, y por lo tanto, EPS.
- La demostración es análoga.

Los pagos esperados para ambos equilibrios son $U_A = U_B = 2$.

(c) Suponga ahora que es conocimiento común que la empresa A recibe información confidencial de TV Tiempo y sabe con certeza si mañana lloverá o habrá sol antes de comprar. El jugador B sigue sin saber cual fue la movida de la naturaleza. Encuentre el único equilibrio perfecto en subjuegos y muestre que ambas empresas terminan peor que cuando ninguna conoce el estado de la naturaleza. Explique.

Respuesta: Es fácil convencerse de que una vez que la naturaleza juega, A tiene incentivos a jugar sólo una estrategia (dominancia...). Así, la intución detrás del EPS es que cuando la naturaleza juega Lluvia, A jugará Paraguas y cuando la naturaleza juega Sol, A jugará Bronceador. Como B observa la jugada de A, sabe que si observa Paraguas, es porque va a llover; y entonces debe jugar paraguas pues en caso contrario su utilidad será nula. Si observa Bronceador, el análisis es el mismo.

Se prueba que el EPS del juego (no es difícil demostrarlo), es el dado por las estrategias:

- A juega Paraguas si observa Lluvia y Bronceador si observa Sol.
- B juega Paraguas si observa Paraguas y Bronceador si observa Bronceador.

La utilidad esperada ahora es $U_A = U_B = 1$.

Lo que ocurre es que como A pierde la incertidumbre sobre el tiempo, cambia su jugada de acuerdo a ésto y su jugada le revela información a B. Como ninguno quiere tener ventas nulas, ocurre que ambos terminan vendiendo lo mismo y terminan peor que antes a pesar de que ahora hay más información sobre qué les conviene vender.

(d) Suponga que la empresa A se fusiona con la empresa B, pasando a detentar el monopolio de las ventas en el estadio. Demuestre que ahora más información es siempre mejor que menos información. Explique.

Respuesta: Como ahora hay una sola empresa en el mercado, siempre se venderá de acuerdo a lo que diga TV Tiempo y ninguna empresa estorbará a la otra. Luego, independiente de lo que juegue la naturaleza, las utilidades del monopolio serán iguales a 4. Y es fácil ver que si el monopolio no conociera la jugada de la naturaleza, su estrategia óptima siempre le reportaría menos utilidad (el juego se reduce a un juego de coordinación desde el punto de vista del monopolio). La demostración formal queda propuesta (sólo hay que comparar pagos).

La intuición detrás del resultado es que cuando hay competencia en el mercado, los pagos son casi tan malos como cuando se vende “fuera de temporada”. Esto hace que cuando exista la posibilidad de competir, sea mejor no manejar información sobre el tiempo, de manera que las jugadas sean lo más aleatorias posibles. Por otra parte y como es de esperarse, cuando no hay posibilidad de competencia, lo mejor es conocer el tiempo para así vender lo que la gente va a comprar.

Problema 3. Un juego finitamente repetido con varios equilibrios estáticos.

Considere el juego de multi-etapa correspondiente a la repetición 2 veces del siguiente juego:

			$J2$	
		L	M	R
	U	$0,0$	$3,4$	$6,0$
$J1$	M	$4,3$	$0,0$	$0,0$
	D	$0,6$	$0,0$	$5,5$

Es decir, en $t = 1$, los jugadores 1 y 2 simultáneamente deciden entre U, M, D y L, M, R, respectivamente. Al final del período observan la jugada del otro jugador y en $t = 2$ vuelven a decidir que acción tomar. Suponga que los jugadores descuentan el futuro mediante un factor $\delta \in (0, 1)$.

(a) Suponga que el juego se juega una única vez y encuentre todos los equilibrios de Nash. ¿Qué sucede con el pago socialmente eficiente?

Respuesta: Después de sencillos cálculos se obtiene que los equilibrios de Nash del juego son:

- (M,L), con pago de $(4, 3)$.
- (U,M), con pago de $(3, 4)$.
- $(3/7, 4/7, 0), (3/7, 4/7, 0)$, con pago de $(12/7, 12/7)$.

El pago socialmente eficiente es $(5, 5)$, que se obtiene cuando se juega (D,R). Lamentablemente, este pago no se alcanza mediante ningún equilibrio.

(b) Suponga que $\delta > 7/9$ y encuentre un EPS tal que se juegue (D,R) en alguna etapa del juego.

Respuesta: Si consideramos el perfil de estrategias dado por:

"Jugar (D,R) en el primer período. Jugar (M,L) en el segundo período si en el primer período se jugó (D,R), en caso contrario jugar $(3/7, 4/7, 0), (3/7, 4/7, 0)$*".*

Se obtiene un EPS del juego que satisface lo pedido.

En efecto, en el segundo período ningún jugador tiene incentivos a desviarse pues se está jugando un EN.

Desviarse en el primer período aumenta el pago del primer período en 1, pero disminuye el pago del siguiente período a $12/7$ para ambos jugadores.

Luego, el jugador 1 no se desvía si $1 < (4 - 12/7)\delta \iff \delta > 7/16$, mientras que el jugador 2 no se desvía si se cumple que: $1 < (3 - 12/7)\delta \iff \delta > 7/9$.

Gracias a la hipótesis del enunciado se concluye que el perfil de estrategias descrito más arriba conforma un EPS.