Auxiliar 6

Juegos secuenciales, Inducción Reversa y Equilibrio Perfecto en Subjuego

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Benjamín Vatter, Leonel Huerta

10 de Septiembre, 2014

Resumen de conceptos...

Juegos en forma extensiva (JFE) (secuenciales)

Idea: Modelar temporalidad en juegos.

En algunos casos el concepto de EN parece ser insuficiente. Algunos equilibrios parecieran ser poco razonables. ¿Porqué?

Por ejemplo: "Amenazas no creíbles" (*Revisen el ejemplo clásico del Entrante y el Incumbente*).

Buscamos entonces un "mejor" concepto de equilibrio: se introduce el Equilibrio Perfecto en Subjuego (EPS).

IMPORTANTE! En un juego secuencial una estrategia para el jugador i es un "plan contingente"!!! (Le dice a i que hacer en cada posible situación que le toque jugar!). En un perfil de estrategias, en particular en un EPS, muchas veces se describen acciones que "no ocurren" (i.e. quedan fuera del camino del equilibrio).

Problema 1. Ciudad Gótica.

El Guasón ha planeado un asalto al Banco Nacional de Ciudad Gótica. Para perpetrar el robo, trabajará con 4 ladrones más, quienes tienen las labores de desactivar la alarma, abrir la caja fuerte, desarmar a los guardias y llevar el bus de escape. Luego de ejectuar el robo deberán repartirse el botín (estimado en 100 bolsas llenas de dinero) de acuerdo al siguiente juego:

El Guason hará una división de bolsas de dinero (indivisibles), por ejemplo: $(43, 17, 12, 9, 19)$, quedándose él con 43 bolsas, el ladrón que le sigue con 17, etc. Luego, entre todos votan la propuesta y en caso de haber mayoría absoluta (los empates se consideran como moción rechazada) se ejecuta la propuesta, en caso contrario, el Guason es asesinado y el primer ladrón realiza una segunda propuesta. Luego los 4 ladrones votan y continua el juego de manera sucesiva.

Si un ladrón está indiferente entre aceptar o rechazar la propuesta, votará en contra. Además, si a un ladrón le es indiferente entre aceptar o rechazar una repartición dado lo que ocurrirá en el futuro, votará en contra, a menos que le ofrezcan todo el botín. Suponga que Batman no alcanza a impedir este asalto y calcule el Equilibrio Perfecto en Subjuego.

Respuesta: Resolvemos por inducción reversa:

- Si se llega al momento en que queda un ladrón, entonces él se lleva las 100 bolsas de dinero.
- En la etapa anterior, el ladrón 4 sabe que si no acepta, asesina al otro ladrón y se lleva todo el botín, por lo que sólo acepta si le ofrecen 100.
- El ladrón 3 quiere vivir, por lo que le ofrece todo el botín $(0, 0, 0, 0, 100)$.
- En la etapa anterior, el ladrón 2 prevé esto y como quiere vivir, pero para eso necesita un voto,“compra” al ladrón 3 ofreciéndole una bolsa, es decir, ofrece $(0, 0, 99, 1, 0)$. La propuesta se acepta.
- En la segunda etapa del juego (la anterior), el ladrón 1 quiere vivir, pero necesita“comprar” 2 ladrones para ganar la votación. Como los ladrones 3 y 4 saben que si se llega a avanzar a la siguiente etapa del juego recibirán 1 y 0 bolsas respectivamente, entonces 1 ofrece $(0, 97, 0, 2, 1)$ y la propuesta se acepta.
- El Guasón, como buen genio criminal, hace todo este análisis y “compra” a los ladrones más baratos. Es decir, ofrece $(97, 0, 1, 02)$ y se lleva 97 de las 100 bolsas para seguir cometiendo fechorías.

Por lo tanto, en el equilibrio se juega de acuerdo a lo descrito anteriormente.

Notar que el EPS no está del todo bien definido. ¿Porqué?
Propuesto: *Formalizar. Es buena idea definir de manera precisa los espacios de estrategias para así visualizar de manera correcta la forma del EPS.*

Problema 2. Leones.

Una jerarquizada manada de n leones encuentran una presa. Si el león 1 decide no comerse a la presa, ésta escapa y el juego se acaba. Pero si el león 1 se come a la presa, entonces él se pone gordo y lento, con esto el león 2 se lo puede comer. Si el león 2 no se come al león 1, entonces el juego termina; sino el león 3 puede comerse al 2 y así sucesivamente se realiza el juego.

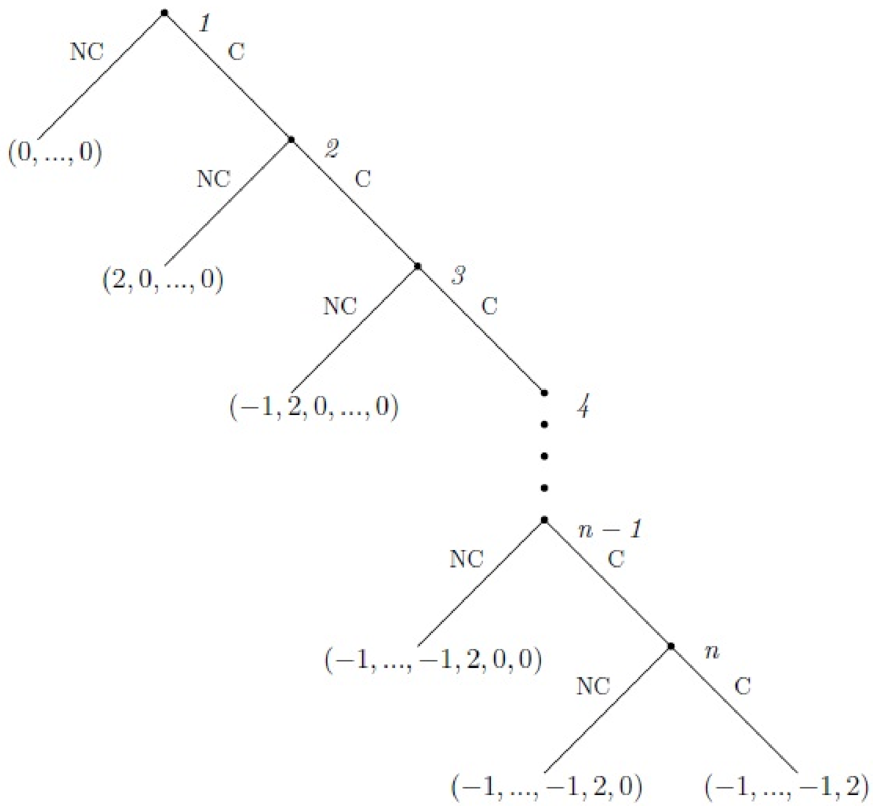
Suponga que las preferencias de todos los leones son tales que prefieren comer antes de estar sin comida y no comer antes de ser asesinados.

Modele el juego de manera extensiva y encuentre todos los EPS del juego.

Respuesta: Sin pérdida de generalidad, y sólo para arrojar claridad luminosa, supongamos que los pagos para cada una de las situaciones en que puede acabar un león una vez terminado el juego son: [1]

- Comer y no ser comido: 2.
- No comer ni ser comido: 0.
- Comer y ser comido: -1.

Modelamos entonces el juego como:



Donde los jugadores son los leones, numerados del primero al n-ésimo y las estrategias para cada uno son Comer (C) y No comer (NC).

Resolviendo por inducción hacia atrás, es fácil ver que:

[1] Notar que los números escogidos son arbitarios, sólo tiene que respetarse que:
Comer y no ser comido $\succ$ *No comer ni ser comido* $\succ$ *Comer y ser comido.*

- El último león siempre come (C), pues nadie puede comérselo a él y asegura un pago de 2 versus uno de 0.
- El penúltimo león sabe que si llega a comer, entonces será comido y, por lo tanto, elige (NC) comparando utilidades de 0 versus -1.
- El antepenúltimo león sabe que si llega a comer, el penúltimo león no se lo comerá a él (pues si lo hace, será alimento del último) y, por lo tanto, juega (C) comparando 2 versus 0.
- Repitiendo este argumento se obtiene la estrategia de equilibrio para todos los leones.

De lo anterior se obiene que el EPS para este juego es:

- $\{NC, C, NC, C, ..., NC, C\}$, si n es par.
- $\{C, NC, C, NC, ..., NC, C\}$, si n es impar.

Problema 3. Herencia.

Considere el caso de tres primos lejanos (Pedro, Juan y Diego) que deben repartirse una herencia de US$ 1.000.000 de acuerdo a las reglas del testamento. Las reglas son:

- Pedro decide cómo se dividen la herencia entre los tres.
- Si Juan y Diego aceptan las partes que les corresponden, ésta es la división aceptada.
- Si al menos uno de los dos no acepta, el testamento indica que la mitad de la herencia va a el Hogar de Niños Huérfanos y el resto debe dividirse según un nuevo procedimiento.
- Pedro debe dividir la herencia en tres partes.
- Juan elige la parte que prefiere entre las tres.
- Diego elige la parte que prefiere entre las dos que quedan.
- Pedro se queda con el resto.

(a) Modele la negociación como un juego de información perfecta.

(b) Encuentre la solución por inducción reversa del juego.