Auxiliar 4

Estrategias Mixtas y Teoría Evolutiva de Juegos

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Benjamín Vatter, Leonel Huerta

27 de Agosto, 2014

Problema 1. Matching Pennies.

Sea $\alpha \in (0,1)$ y considere la siguiente modificación del conocido juego *Matching Pennies.*

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{J2} \\
 & & I & D \\
\hline
 & I & 1,-1 & -1,1 \\
\hline
J1 & D & -1,1 & 1,-1 \\
\hline
 & \alpha & \alpha,0 & \alpha,0 \\
\hline
\end{array}
$$

Es decir, el jugador 1 tiene una nueva opción: α.

(a) Encuentre las "funciones" de mejor respuesta para cada jugador.

Respuesta: Supongamos que el jugador 1 juega con probabilidades $p, q, 1-p-q$ sus estrategias I, D, α (respectivamente), y que el jugador 2 juega con probabilidades $r, 1-r$ las estrategias I, D (respectivamente).

Así, la utilidad esperada para 2 será (queremos maximizarla):

$$\mathbb{E}(U_2) = r(-p+q) + (1-r)(p-q) = r(2q-2p) + (p-q)$$

Importante: *notar que esta función es lineal en r, NO HAY QUE DERIVAR!*

Y es claro que:

$$BR_2((p,q,1-p-q)) = \begin{cases} (1,0) & q > p \\ (r,1-r), \quad r \in [0,1] & q = p \\ (0,1) & q < p \end{cases}$$

Notar que cuando $q = p$, cualquier estrategia de 2 es mejor respuesta. ¿Porqué ocurre esto?

Nota: *¿Podemos escribir la función de mejor respuesta de otra manera equivalente?*

Por otra parte, la utilidad esperada para 1 será:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_1) &= p(r-(1-r)) + q(-r+(1-r) + (1-p-q)(\alpha r + \alpha(1-r)) \\ &= p(2r-1) + q(1-2r) + (1-p-q)\alpha \\ &= p(2r-1-\alpha) + q(1-2r-\alpha) + \alpha \end{aligned}$$

Haciendo un análisis por casos se obtiene que la mejor respuesta para 1 está dada por:

$$BR_1((r,1-r)) = \begin{cases} (1,0,0) & r > \frac{1+\alpha}{2} \\ (p,0,1-p), \quad p \in [0,1] & r = \frac{1+\alpha}{2} \\ (0,0,1) & r \in (\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}) \\ (0,q,1-q), \quad q \in [0,1] & r = \frac{1-\alpha}{2} \\ (0,1,0) & r < \frac{1-\alpha}{2} \end{cases}$$

(b) Encuentre el conjunto de equilibrios de Nash del juego.

Respuesta: Usando la parte anterior, buscamos los puntos en que se "intersectan" $BR_1(\cdot)$ y $BR_2(\cdot)$.

Es más o menos rápido ver que el conjunto de todos los equilibrios de Nash es:

$$\{((0,0,1),(r,1-r)) : \; r \in (\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2})\}$$

Problema 2. Halcones y Palomas.

Existe un ecosistema con halcones (H) y palomas (P) que compiten por alimentos R. Si dos halcones se enfrentan se reparten la comida y ambos sufren un daño por pelea D, con $D > R$. Si un halcón se enfrenta a una paloma, entonces el halcón se lleva todo el alimento. Finalmente, si dos palomas se enfrentan, se reparten el alimento sin peleas.

(a) Plantee el juego en forma normal y encuentre todos los equilibrios de Nash.

Respuesta:

$J1$ \ $J2$	H	P
H	$R/2-D, R/2-D$	$R, 0$
P	$0, R$	$R/2, R/2$

Es fácil ver que (H, P) y (P, H) son los únicos EN (en puras).

Si existiera un ENEM, en que el jugador 1 juega las estrategias H y P con probabilidades p y $1-p$, respectivamente; entonces la utilidad para el jugador 2 cuando juega cualquiera de sus estrategias puras debe ser la misma. Esto es:

$$\mathbb{E}(U_2(P,(p,1-p))) = \mathbb{E}(U_2(P,(p,1-p)))$$

De donde se obtiene que $p = \frac{R}{2D}$.

Por simetría, se sigue que el único ENEM es $((\frac{R}{2D}, \frac{2D-R}{2D}), (\frac{R}{2D}, \frac{2D-R}{2D}))$.

(Mi notación para las utilidades es bastante mala... quizás habría sido buena idea omitir la $\mathbb{E}$... Sólo quería enfatizar la componente aleatoria de la utilidad...)

(b) Considere $D = 4$ y $R = 2$. Encuentre las estrategias evolutivamente estables.

Respuesta: Reemplazando los valores de D y R se obtiene que $\frac{R}{2D} = \frac{1}{4}$ y que la matriz de pagos es:

$J1$ \ $J2$	H	P
H	$-3, -3$	$2, 0$
P	$0, 2$	$1, 1$

Gracias a la parte anterior, sabemos que $((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ es ENEM. Luego, $\forall q \in [0,1]$:

$$\mathbb{E}(U((\frac{1}{4},\frac{3}{4}),(\frac{1}{4},\frac{3}{4}))) \geq \mathbb{E}(U((q,1-q),(\frac{1}{4},\frac{3}{4})))$$

Sea entonces, $(q, 1-q)$ otra estrategia mixta cualquiera y supongamos que se tiene la igualdad.

Calculemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U((\frac{1}{4},\frac{3}{4}),(q,1-q))) &= \frac{1}{4}(-3q+2(1-q)) + \frac{3}{4}(0q+1-q) \\
&= \frac{1}{4}(2-5q) + \frac{3}{4}(1-q) \\
&= \frac{5}{4} - 2q
\end{aligned}$$

Y por otra parte:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U((q,1-q),(q,1-q))) &= q(-3q+2(1-q))+(1-q)(1-q)\\
&= q(2-5q)+(1-q)^2\\
&= 2q-5q^2+1-2q+q^2\\
&= 1-4q^2
\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U((\frac{1}{4},\frac{3}{4}),(q,1-q))) - \mathbb{E}(U((q,1-q),(q,1-q))) &= \frac{5}{4}-2q+1-4q^2\\
&= \frac{1}{4}-2q+4q^2\\
&= (\frac{1}{2}-2q)^2 > 0
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad es estricta gracias a que $q \neq \frac{1}{4}$.

Sigue que $\mathbb{E}(U((\frac{1}{4},\frac{3}{4}),(q,1-q))) > \mathbb{E}(U((q,1-q),(q,1-q)))$ y se concluye que $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ es evolutivamente estable.

Observación: *Ocupé alguna caracterización de las estrategias evolutivamente estables, ¿o no?*
(No estoy seguro de cuál es la definición que vieron en clases :))

Problema 3. Partido de futbol.

(Control 1, Primavera 2012) Considere que dos equipos de fútbol desean hacer un partido, pero no se pusieron de acuerdo en quién lleva la pelota. Entonces, cada jugador decide individualmente si la lleva o no. El partido se puede desarrollar solamente si llega al menos una persona con el balón. Si se realiza el partido, todos obtienen una utilidad de 1, en cambio, si no se desarrolla, todos tienen una utilidad de cero. El costo de llevar la pelota para los jugadores del equipo 1 es c_1 y de c_2 para los del equipo 2. La cantidad de jugadores son n_1 y n_2 respectivamente (no necesariamente iguales, pueden llevar la cantidad de reservas que quieran). Suponga $0 < c_1 < c_2 < 1$.

Observación: *Mis respuestas están bastante incompletas. Podría ser recomendable buscar la pauta de este control mejor, jaja.*

(a) Encuentre el EN.

Respuesta: Es EN que sólo un jugador (de cualquier equipo) lleve pelota. *(ARGUMENTAR!)*

(b) ¿Es socialmente eficiente?

Respuesta: No necesariamente, si quién lleva la pelota es un jugador del equipo 2, entonces la sociedad estaría peor que en el caso en que la lleva un jugador del equipo 1.

(c) Encuentre el ENEM.

Respuesta: Supongamos que existe un ENEM (puramente mixto) y que las probabilidades de equilibrio, todos los jugadores del equipo 1 llevan la pelota con probabilidad p_1 y los del equipo 2 con probabilidad p_2.

(¿Porqué podemos ausmir que todos los jugadores del mismo equipo llevan el balón con la misma probabilidad?)

Entonces, las utilidades cuando algún jugador juega estrategias puras y el resto sigue jugando las mixtas, deben ser las mismas. Es decir (para un jugador del equipo 1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U(\text{Lleva pelota}, \sigma_{-i})) &= \mathbb{E}(U(\text{No lleva pelota}, \sigma_{-i})) \\
1 - c_1 &= \mathbb{P}(\text{Alguien lleva pelota}) \\
1 - c_1 &= 1 - \mathbb{P}(\text{Nadie lleva pelota}) \\
1 - c_1 &= 1 - (1-p_1)^{n_1 - 1}(1-p_2)^{n_2}
\end{aligned}$$

Imponiendo la misma condición para los jugadores del equipo 2, obtenemos que:

$$1 - c_2 = 1 - (1-p_1)^{n_1}(1-p_2)^{n_2-1}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para p_1 y p_2, obtenemos que:

$$p_1 = 1 - \left(c_1 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{n_2} \right)^{\frac{1}{n_1+n_2-1}} \quad , \; p_2 = 1 - \left(c_2 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{n_1} \right)^{\frac{1}{n_1+n_2-1}}$$

Observación: *¿Qué pasa con el número (la paridad) de equilibrios?*

(d) ¿Qué pasa con la probabilidad de llevar la pelota de los jugadores del equipo 1 cuando c_2 aumenta?

Respuesta: Supongamos que $c_2 \longrightarrow 1$.

Difícil concluir algo.

Derivemos:

$$\frac{\partial p_1}{\partial c_2} = -n_2 c_1 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{n_2-1} \frac{1}{n_1+n_2-1} \left(c_1 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{n_2} \right)^{\frac{1}{n_1+n_2-1}-1}$$

Y como esto es negativo, se concluye que a medida que c_2 aumenta, entonces p_1 disminuye.

Observación: *¿Porqué pasa esto? ¿Cuál es la intuición detrás de este resultado?*