Pauta Auxiliar 7 - Oferta

9 de Octubre, 2014 - Semestre Primavera

Comente

1.) Comente qué es una isocuanta de producción. Grafique una e interprete sus casos extremos. Comente ejemplos de cada uno de los casos.
Respuesta
Una isocuanta es una curva de nivel que representa todas las combinaciones de insumos (capital (K) y trabajo (L) en lo estudiado) para una cantidad determinada y fija de producción q_i.

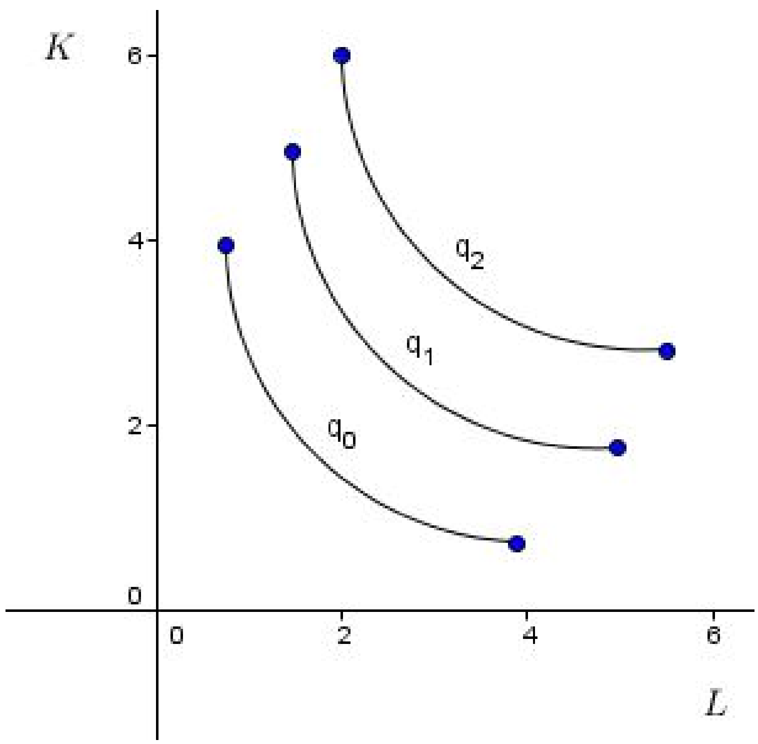

Figura 1: Isocuantas de producción.

Cuando existen factores de producción completamente sustituibles, la isocuanta se grafica como una recta, que corta los ejes en las cantidades determinadas de sustitución. Un ejemplo de esto podrían ser los peajes: 1 trabajador por 1 máquina automática; o algo por el estilo. En cambio, cuando los factores se complementan perfectamente, la curva toma forma de L. Por ejemplo, cuando se necesita a 1 trabajador ocupando 1 máquina en específica de la construcción, como la perforadora. Por mucho que contrate muchos trabajadores, sólo hay una máquina perforadora. Y por mucho que compre otra perforadora, si no hay más trabajadores que la usen, no servirá. Todo esto es analogable a la demanda de los clientes.

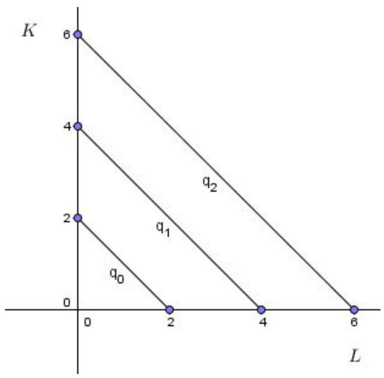

Figura 2: Factores sustitutos perfectos

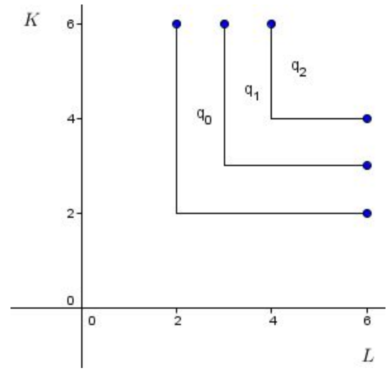

Figura 3: Factores complementarios perfectos

2.) Defina la elasticidad de sustitución y explíquela. La empresa A le dice que su elasticidad de sustitución es 250, mientras que la B le dice que su elasticidad de sustitución es 0,5. ¿Qué les podría decir?.
Respuesta
Si definimos las siguientes cantidades $\Omega = \dfrac{w}{r}$ y $\Lambda = \dfrac{K(w,r,q)}{L(w,r,q)}$ la elasticidad de sustitución se define como la cantidad:

$$\sigma_{K,L} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \Omega} \cdot \frac{\Omega}{\Lambda}$$

La elasticidad de sustitución determina **el porcentaje de cambio de la razón de sustitución $\dfrac{K}{L}$ al cambiar en un $1\,\%$ la relación $\dfrac{w}{r}$.**
Si tiene un valor de 250, quiere decir que: al subir $1\,\%$ la relación $\frac{w}{r}$, la razón $\frac{K}{L}$ aumenta en un $250\,\%$, lo que indicaría que para obtener 250 unidades de capital (K) se debe entregar 1 unidad de trabajo (L). Así, como el precio de trabajo (w) aumentó $1\,\%$ en relación al precio del capital (r), es más fácil cambiar 1 unidad de trabajo por los 250 de capital. Por otro lado, si la sustitución es pequeña como 0,5 quiere decir que un aumento relativo de w por sobre r en un $1\,\%$, sólo permite sustituir en 0,5 unidades de capital (K) por 1 de trabajo (L), lo que hace difícil obtener el insumo que es más barato relativamente.

3.) El decano le dice que "La Facultad utiliza como medida de largo plazo 1 semestre académico". Por otra parte, el kioskero de la esquina le comenta: "Para mi kiosko considero como corto plazo 1 mes". Comente.
Respuesta
El corto plazo se define como el tiempo suficiente para que los factores de producción se

mantengan fijos y estables. En cambio, el largo plazo se define como el tiempo en que los factores se vuelven variables. Por lo tanto, hay que considerar que a la Facultad se le hace muy difícil cambiar los factores de producción (infraestructura, profesores, administrativos, etc) para 1 semestre. **Por lo mismo es inútil pensar en el largo plazo como 1 semestre para la Facultad, pues no alcanzan a cambiar sus factores de producción**. De la misma forma, el kioskero cambia sus factores de producción (capital en diarios, dulces, comida, etc) en un día, a lo más 1 semana. Pero 1 mes es plazo extremadamente largo porque su capital debe haber cambiado numerosas veces. **Por lo tanto, el kioskero debe considerar como largo plazo 1 día o 1 semana según cuánto se demore su capital en renovarse**.

Problema 1: Función de producción a función de Oferta

El gerente general de la empresa KapitalLabors le comunica que quieren salir al mercado, pero lo único que sabe de su empresa es que paga costos fijos iguales a CF, salarios w, que los valores de capital ascienden a r y que su producción sigue el siguiente modelo:

$$ln(cantidad) = ln(5) + \frac{2}{3}ln(capital) + \frac{4}{7}ln(trabajo)$$

Para ayudar a la empresa a obtener su curva de oferta para salir al mercado, realice lo siguiente:

a) Plantee el problema de optimización de la empresa y obtenga la relación óptima de factores. Interprete este resultado.(Analítica y geométricamente)
Respuesta
Tener en cuenta que para trabajar el modelo, se aplica $exp()$, de manera que queda una función Cobb-Douglas, con cantidad q, capital K y trabajo L:

$$q = f(K, L) = 5K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{4}{7}}$$

Así, sabemos que las empresas buscan maximizar utilidades, o bien minimizar costos. Por lo tanto, tomando los costos de los factores de producción:

$$\begin{aligned} \min_{K,L} C = Kr + Lw \\ s.a \\ q = 5K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

Utilizando el Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = Kr + Lw - \lambda(q - 5K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{4}{7}})$$

Y las CPO:

$$\begin{aligned}
CPO(K): \quad & r - \lambda 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot K^{-\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{4}{7}} = 0 \\
r = \quad & \lambda 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot K^{-\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{4}{7}} \\
CPO(L): \quad & w - \lambda 5 \cdot \frac{4}{7} \cdot K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{-\frac{3}{7}} = 0 \\
w = \quad & \lambda 5 \cdot \frac{4}{7} \cdot K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{-\frac{3}{7}}
\end{aligned}$$

Lo que al dividir los términos:

$$\begin{aligned}
\frac{w}{r} = & \frac{\lambda 5 \cdot \frac{4}{7} \cdot K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{-\frac{3}{7}}}{\lambda 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot K^{-\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{4}{7}}} \\
\frac{w}{r} = & \frac{6}{7} \cdot \frac{K}{L}
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que el mínimo costo se obtiene cuando la Tasa (marginal) de Sustitución Tecnológica (TST) se iguala a la razón de los precios de los factores. Esto quiere decir que la cantidad de unidades que se está dispuesto a cambiar de capital (K) por unidades de trabajo (K) debe ser igual a la razón entre sus precios.
Gráficamente, se comienza dibujando las rectas de isocosto (aquellas combinaciones de K y L que cuestan lo mismo; aunque producen distinto q).

$$\begin{aligned}
c \quad & = Kr + Lw \\
K \quad & = \frac{c}{r} - \frac{Lw}{r}
\end{aligned}$$

graficando las curvas isocosto:

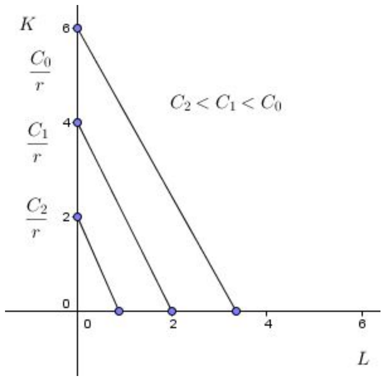

Figura 4: Curvas de isocosto

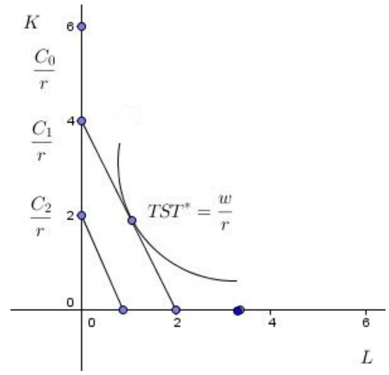

Figura 5: Tangencia de la TST

Notar que la pendiente de cada isocosto es $-\dfrac{w}{r}$ y mientras más cercana al origen, **menor es el costo**.
Las empresas buscarán isocuantas de producción que toquen las isocostos más cercanas al origen. El punto (K_0, L_0) determinará la tangencia entre la isocuanta y una recta de isocostos. Recordando que la tasa de sustitución marginal tecnológica $TST_{K,L}(K_0, L_0)$ es, por definición, la relación $-\dfrac{dK(L_0, q_0)}{dL}$. El punto de tangencia será cuando se igualen las pendientes:

$$-\frac{dK(L_0, q_0)}{dL} = -\frac{w}{r}$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{PMgL(K_0, L_0)}{PMgK(K_0, L_0)} &= \frac{w}{r} \\ \frac{f_L(K_0, L_0)}{f_K(K_0, L_0)} &= \frac{w}{r} \\ \frac{6}{7} \cdot \frac{K}{L} &= \frac{w}{r} \end{aligned}$$

con esto se obtiene entonces $f(K_0, L_0) = q_0$

b) Obtenga las demandas por factores de producción y la función de costos.
Respuesta
Con la relación anterior, se despeja:

$$K = \frac{7wL}{6r}$$

luego

$$\begin{aligned}
q &= 5\frac{K^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{4}{7}}} \\
q &= 5\frac{(\frac{7wL}{6r})^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{4}{7}}} \\
q &= 5\frac{(\frac{7w}{6r})^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{8}{21}}} \\
\Rightarrow L(q) &= [\frac{q}{5} \cdot (\frac{6r}{7w})^{\frac{2}{3}}]^{-\frac{21}{8}}
\end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo lo mismo para el capital:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{6rK}{7w} \\
\Rightarrow q &= 5\frac{K^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{4}{7}}} \\
q &= 5\frac{K^{\frac{2}{3}}}{(\frac{6rK}{7w})^{\frac{4}{7}}} \\
q &= 5\frac{K^{\frac{8}{21}}}{(\frac{6r}{7w})^{\frac{4}{7}}} \\
\Rightarrow K(q) &= [\frac{q}{5} \cdot (\frac{7w}{6r})^{\frac{4}{7}}]^{-\frac{21}{8}}
\end{aligned}$$

Luego reemplazando en los costos:

$$\begin{aligned}
C(q) &= K(q)r + L(q)w \\
C(q) &= [\frac{q}{5} \cdot (\frac{7w}{6r})^{\frac{4}{7}}]^{-\frac{21}{8}} r + [\frac{q}{5} \cdot (\frac{6r}{7w})^{\frac{2}{3}}]^{-\frac{21}{8}} w
\end{aligned}$$

c) Interprete las productividades marginales y medias.
Respuesta Por definición:

$$
\begin{aligned}
PMgL &= f_L = \frac{\partial f(K,L)}{L} = \frac{20K^{\frac{2}{3}}}{7L^{\frac{3}{7}}} \\
PMgK &= f_K = \frac{\partial f(K,L)}{L} = \frac{10L^{\frac{4}{7}}}{3K^{\frac{1}{3}}} \\
PMeL &= \frac{f(K,L)}{L} = \frac{5K^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{3}{7}}} \\
PMeK &= \frac{f(K,L)}{K} = \frac{5L^{\frac{4}{7}}}{K^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

Las productividades marginales describen la variación en la producción al aumentar (infinitesimalmente) unidades del factor productivo. En cambio, las productividades medias describen cuánto se está produciendo por cada unidad de factor.

d) Obtenga de la función de costos calculada en b) los costos marginales y medios. Grafíquelos
Respuesta
Con la función de costos $CT = CF + CV(q)$ tal que $CV(q) = [\frac{q}{5}\cdot(\frac{7w}{6r})^{\frac{4}{7}}]^{-\frac{21}{8}}r + [\frac{q}{5}\cdot(\frac{6r}{7w})^{\frac{2}{3}}]^{-\frac{21}{8}}w$, se tiene que, llamando $\alpha = \frac{7w}{6r}$:

$$
\begin{aligned}
CMg &= \frac{\partial C(q)}{\partial q} = \frac{21}{8}[(\frac{\alpha^{\frac{4}{7}}}{5})^{-\frac{21}{8}}q^{\frac{13}{8}}r + (\frac{\alpha^{-\frac{2}{3}}}{5})^{-\frac{21}{8}}q^{-\frac{13}{8}}w] \\
CMe &= \frac{CT}{q} = \frac{CF}{q} + \frac{[\frac{q}{5}\cdot(\alpha)^{\frac{4}{7}}]^{\frac{21}{8}}r}{q} + \frac{[\frac{q}{5}\cdot(\alpha)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{21}{8}}w}{q}
\end{aligned}
$$

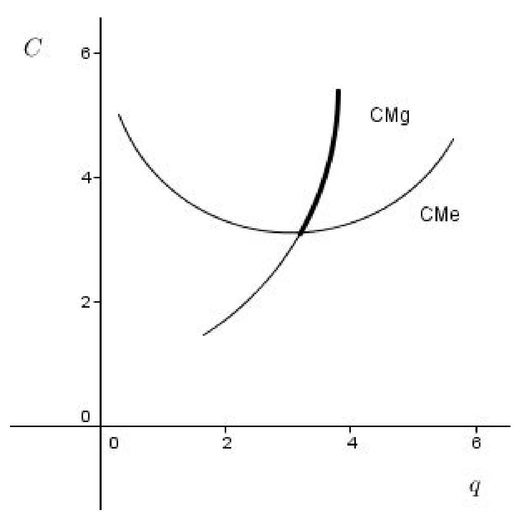

Figura 6: Curva de CMg y de CMe. Curva de Oferta

e) Plantee la curva de oferta de la empresa.
Respuesta
Se debe cumplir entonces, en el óptimo, que $P = CMg$ siempre y cuando $CMg > CMe(\underline{q})$ donde $\underline{q}$ sea el mínimo de los CMe.
Entonces debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
\underline{q} \quad &= \min_q CMe = \frac{CT}{q} = \frac{CF}{q} + \frac{[\frac{q}{5}\cdot(\alpha)^{\frac{4}{7}}]^{\frac{21}{8}} r}{q} + \frac{[\frac{q}{5}\cdot(\alpha)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{21}{8}} w}{q} \\
P \quad &= \frac{\partial C(q)}{\partial q} = \frac{21}{8}[(\frac{\alpha^{\frac{4}{7}}}{5}q)^{\frac{13}{8}} r + (\frac{\alpha^{-\frac{2}{3}}}{5}q) w^{\frac{13}{8}}] \\
& CMg > CMe(\underline{q})
\end{aligned}$$

Problema 2: Largo plazo y economías de escala

Considerando una competencia perfecta en el rubro de los commodities, una empresa tiene una función de costos:

$$C(q) = (1-q)q^2 + q^3 + 36$$

y perciben una demanda de:

$$3Q = 600 - 30P$$

a) Encuentre el equilibrio competitivo a largo plazo.
Respuesta
En el largo plazo se espera que las utilidades de las empresas sean nulas y no existan incentivos para que otras entren al mercado. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\pi = Pq - C(q) &= 0 \\
Pq &= C(q) \\
P &= \frac{C(q)}{q} \\
P &= CMe \\
P &= q - q^2 + q^2 + \frac{36}{q} \\
P &= q + \frac{36}{q}
\end{aligned}$$

Pero sabemos que la industria minimiza los costos medios, entonces:

$$
\begin{aligned}
\min_q CMe &= q + \frac{36}{q} \\
\Rightarrow 1 - \frac{36}{q^2} &= 0 \\
q^2 &= 36 \\
\underline{q} &= 6
\end{aligned}
$$

Luego al reemplazar el valor:

$$CMe(\underline{q}) = 6 + \frac{36}{6} = 12$$

Por lo tanto $P = 12$. Y reemplazando en la demanda $Q(P) = 200 - 10 \cdot 12 = 80$. Así, el número de firmas está dado por $n = \frac{Q}{q} = \frac{80}{6} = 13,\overline{3}$. Lo que indica que alcanzan a entrar en total 13 empresas al rubro durante el largo plazo (redondeando al número entero inferior). El equilibrio es entonces $(P_0, Q_0, q_0, n_0) = (12, 80, 6, 13)$.

El alza en la economía aumenta la demanda del commoditie a:

$$3q = 1200 - 30p$$

b) Explique qué sucede con el equilibrio a largo plazo. Utilice gráficos.
Respuesta
Al aumentar la demanda, en el corto plazo las funciones de oferta no cambian y las empresas producirán $q_1 > q_0$. Esta nueva producción les genera mayor utilidades. Las utilidades positivas ($\pi > 0$) atraen a más empresas, lo que desplaza la oferta de corto plazo hacia afuera. Esta nueva oferta hace que el precio baje y se devuelva a P_0. La cantidad total producida por la industria (Q_0) se expanderá a $Q_1 > Q_0$. El precio de equilibrio volverá a ser P_0 y cada firma vuelve a producir q_0. Así, el nuevo número de empresas $\frac{Q_1}{q_0} = n_1 > n_0 = \frac{Q_o}{q_0}$ aumenta.

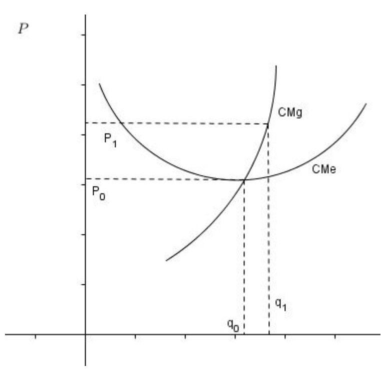

Figura 7: Funciones de costo

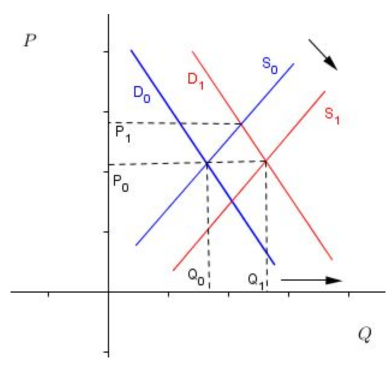

Figura 8: Desplazamiento de curvas

c) ¿Qué ocurre si las firmas tiene retornos constantes a escala?
Respuesta
Retornos constantes a escala se puede expresar como $f(\alpha K_0, \alpha L_0) = \alpha f(K_0, L_0)$ tomando en cuenta que α es una proporción. Luego:

$$\begin{aligned} C(\lambda q_0) &= \lambda C(q_0) \\ \Leftrightarrow \frac{C(\lambda q_0)}{\lambda} &= C(q_0) \\ \Leftrightarrow \frac{C(\lambda q_0)}{\lambda q_0} &= \frac{C(q_0)}{q_0} \\ \Leftrightarrow CMe(\lambda q_0) &= CMe(q_0) \end{aligned}$$

Lo que indica que la función CMe es constante. Por lo tanto, a pesar de poder obtener el precio, no se puede determinar la producción ni el número de firmas.

d) ¿Y si tienen retornos crecientes a escala?
Respuesta
Ahora se tiene que $f(\alpha K_o, \alpha L_0) > \alpha f(K_o, L_0)$ lo que indica que:

$$\begin{aligned} C(\lambda q_0) &< \lambda C(q_0) \\ \Leftrightarrow \frac{C(\lambda q_0)}{\lambda} &< C(q_0) \\ \Leftrightarrow \frac{C(\lambda q_0)}{\lambda q_0} &< \frac{C(q_0)}{q_0} \\ \Leftrightarrow CMe(\lambda q_0) &< CMe(q_0) \end{aligned}$$

Esto indica que la función de CMe es decreciente e irá sobre la de CMg, pero no se intersectan, lo que genera indeterminación en el equilibrio a largo plazo.
Sin embargo, los retornos de cualquier tipo se dan en distintos niveles de producción; por lo tanto pueden existir tramos con retornos decrecientes y otros con retornos crecientes.