

Auxiliar Recuperativa: Teoría de la Firma

Miércoles 1 de Octubre de 2014

Problema 1

Determine la elasticidad de sustitución $\sigma_{K,L}$ de las siguientes funciones de producción:

1. $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$
2. $F(K, L) = (K^{\frac{1}{3}} + L^{\frac{1}{3}})^3$

Solución

1. recordamos que la elasticidad se define como

$$\sigma = \frac{\% \Delta \frac{K}{L}}{\% \Delta TST_{L,K}}$$

Por las definiciones tenemos que:

$$\% \Delta X = \frac{\Delta X}{X_{inicial}} \times 100$$

$$\% \Delta \left(\frac{K}{L} \right) = \frac{\Delta \left(\frac{K}{L} \right)}{\left(\frac{K}{L} \right)} \times 100$$

$$\% \Delta TST_{L,K} = \frac{\Delta TST_{L,K}}{TST_{L,K}} \times 100$$

Entonces

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta \left(\frac{K}{L} \right)}{\left(\frac{K}{L} \right)}}{\frac{\Delta TST_{L,K}}{TST_{L,K}}} = \frac{\Delta \left(\frac{K}{L} \right)}{\left(\frac{K}{L} \right)} \cdot \frac{TST_{L,K}}{\Delta TST_{L,K}}$$

Por otro lado

$$TST_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Usando la funcion original obtenemos los productos marginales:

$$Q = AK^\alpha L^\beta \implies MP_L = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta$$

$$MP_K = \beta AK^\alpha L^{\beta-1}$$

$$\implies TST_{L,K} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

$$\implies \sigma = \frac{\Delta \left(\frac{K}{L} \right)}{\Delta TST_{L,K}} \cdot \frac{\frac{\alpha K}{\beta L}}{\frac{K}{L}}$$

$$\implies \sigma = \frac{\Delta \left(\frac{K}{L} \right)}{\Delta TST_{L,K}} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

Finalmente, es facil ver que como α y β son constantes:

$$\Delta TST_{L,K} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \left(\Delta \frac{K}{L} \right)$$

Y reemplazando llegamos al resultado:

$$\sigma = 1$$

2. Para esta parte primero usamos la siguiente condicion de optimalidad:

$$TST = \frac{w}{r}$$

Reordenando:

$$\frac{PM_L}{w} = \frac{PM_K}{r}$$

Derivando, igualando y simplificando a ambos lados obtenemos:

$$\frac{L^{-\frac{2}{3}}}{K^{-\frac{2}{3}}} = \frac{w}{r} \implies \frac{K}{L} = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

A continuacion, realizamos un cambio de variable:

$$\begin{aligned} \frac{K}{L} &= V \\ \frac{w}{r} &= Z \end{aligned}$$

Y con la relacion encontrada anteriormente tenemos:

$$\implies V = Z^{\frac{3}{2}}$$

Ahora volvemos a la ecuacion de elasticidad y notamos que puede escribirse como:

$$\sigma = \frac{dV}{dZ} \cdot \frac{Z}{V}$$

Donde simplemente reemplazamos el delta de la parte 1 del problema por el operador diferencial. Derivando y reemplazando obtenemos lo pedido

$$= \frac{3}{2} Z^{\frac{3}{2}-1} \cdot \frac{Z}{Z^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} Z^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{Z}{Z^{\frac{3}{2}}}$$

Y con un poco de algebra llegamos al resultado:

$$\sigma = \frac{3}{2}$$

Nota: Este tipo de funcion de produccion (sumas de factores de produccion elevados a un numero y luego la suma elevada al inverso de lo de adentro) se llama CES (Constant Elasticity of Substitution), y se caracterizan por tener valores constantes para sus tasas de elasticidad, si ven una funcion de ese estilo, ahora saben que la elasticidad sera un numero constante. Mas informacion en Wikipedia.

Problema 2

Usted es el gerente de una empresa que usa capital, trabajo y tierra para producir uvas de exportación. En el corto plazo usted no puede cambiar la cantidad de tierra invertida. La cantidad de tierra que usted posee es T_0 . La cantidad de uva producida está dada por:

$$q = f(K, L, T) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{6}}$$

El precio de mercado del trabajo es $w = 1$, del capital $r = 2$ y el precio de la tierra es 3.

1. Encuentre la función de costos de la firma en el corto plazo.
2. Encuentre la oferta de corto plazo de la firma.

Solucion

1. Resolviendo como el problema 2 de la auxiliar 5.

$$TST_{L,K} = \frac{PM_L}{PM_K} \tag{1}$$

$$\frac{\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{3} L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{6}}} = \frac{3K}{2L} \tag{2}$$

Entonces, sabemos tambien que esto es igual a

$$TST = \frac{3K}{2L} = \frac{1}{2} \implies K^* = \frac{L^*}{3}$$

Reemplazando en la funcion de produccion

$$q = L^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{3} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{6}}$$

Por otro lado la funcion de costos general nos entrega la segunda ecuacion que necesitamos para despejar, despejamos L en la ecuacion anterior y obtenemos la funcion de costos

$$C(q) = L + 2K + 3T = \frac{5}{3} (q^{\frac{6}{5}} 3^{\frac{2}{5}} T^{\frac{-1}{5}}) + 3T$$

2. Notamos que

$$C_{mg} = 2(q^{\frac{1}{5}} 3^{\frac{2}{5}} T^{\frac{-1}{5}})$$

y, por otro lado

$$CV_{me} = \frac{5}{6} C_{mg} \implies CV_{me} < C_{mg}$$

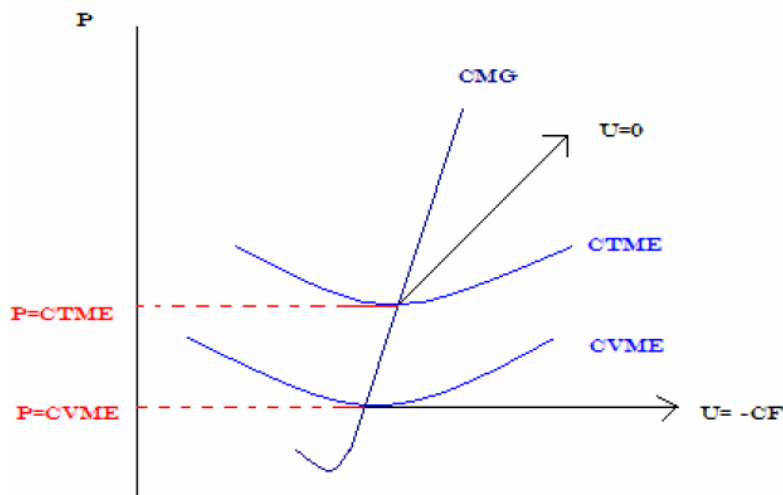
Por esto y sabiendo que para mercados competitivos $P = C_{mg}$, tenemos que la oferta es:

$$q = \left(\frac{P}{2 \cdot 3^{\frac{2}{5}}} \right)^5 T$$

Problema 3

Utilizando las curvas de costo, explique cuando conviene cerrar una fabrica en el corto plazo y por qué. ¿Qué haría usted en aquel punto donde el precio es igual al coste medio?

Solucion



Conviene cerrar la fabrica en el corto plazo cuando el precio es igual o menor al Costo Variable Medio (CV_{me}). Esto porque al no producir se incurren los costos fijos.

Veamos por qué:

$$\pi_p = PQ - CV - CF \quad (3)$$

$$\pi_{np} = -CF \quad (4)$$

Luego cierro si

$$-CF > PQ - CV - CF \quad (5)$$

$$\implies P < CV_{me} \quad (6)$$

Observando el grafico se puede notar que el punto donde $P = CT_{me}$ es mayor que el punto de cierre, por lo que no conviene cerrar la fabrica.

Problema 4

Una empresa de cepillos de dientes tiene la siguiente funcion de producción:

$$C(q) = 240 + 5q + 0,5q^2$$

1. Identifique el CF, CV, CMeV, CMeT, Cmg.
2. Si existe competencia perfecta y el precio es $P = 20$, ¿Cuanto produce la empresa?
3. ¿Qué resultado produce la empresa? ¿Debe seguir operando en el corto plazo?

Solucion

1.

$$CF = 240$$

$$CV = 5q + 0,5q^2$$

$$C_{MeV} = 5 + 0,5q$$

$$C_{MeT} = \frac{240}{q} + 5 + 0,5q$$

$$C_{mg} = 5 + q$$

2. sabemos que en competencia perfecta

$$P = c_{mg}$$

$$\implies 20 = 5 + q \implies q = 15$$

3.

$$Beneficio = 300 - 240 - 75 - 112,5 = -127,5$$

$$C_{MeV} = 12,5$$

Vemos que como el costo medio variable es menor al precio, lo cual nos indica que conviene seguir produciendo, pues la perdida por producir (-127.5), es menor que lo que se pierde al no producir nada (-240).

Sin embargo, en el largo plazo se debe considerar el cierre.

Problema 5

1. Suponga que una firma está produciendo con la combinación óptima de capital y trabajo. ¿Qué le recomendaría usted al dueño de esa firma si el precio del trabajo aumenta y a la vez un cambio tecnológico hace que la productividad marginal del trabajo aumente?
2. Comente: Un productor que maximiza sus beneficios siempre producira en el tramo decreciente de su curva de costo marginal.
3. Comente: El equilibrio de una empresa esta dado por el punto en que el ingreso marginal se iguala con el costo marginal, cualquiera que sea el mercado de la empresa.

Solucion

1. Depende de la magnitud del cambio. Sabemos que:

$$TST_{L,K} = \frac{w}{r}$$

Entonces , si esta relacion se altera, por ejemplo

$$\frac{PMg_L}{PMg_K} = TST_{L,K} > \frac{w}{r}$$

Entonces habria que contratar trabajadores (disminuyendo la productividad marginal de trabajo).

2. Falso, al haber 2 cantidades, se elige la mayor de ambas, es decir, cuando la curva de costos marginales esta en su tramo creciente.
3. Verdadero, sin embargo, lo anterior no implica que el PRECIO sea igual al costo marginal, para esto se requiere que el mercado sea competitivo.