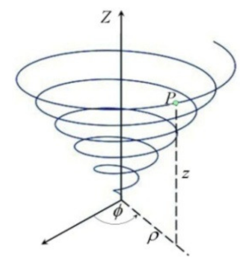
FI2001 Mecánica | Tiempo: 3 Horas
Escuela de Ingeniería y Ciencias | 6 de Abril de 2011
Universidad de Chile | Prof.: Patricia Sotomayor C.

CONTROL N°1

PROBLEMA 1



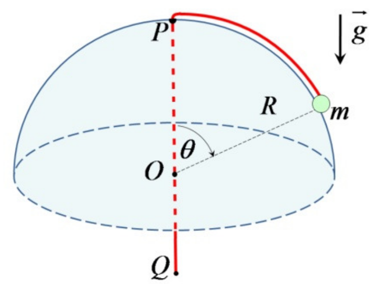
Un punto P describe una trayectoria espiral cónica, de semiángulo $\pi/4$ y paso constante. En coordenadas cilíndricas, su movimiento satisface $z(t)=\rho(t)$, $dz/d\phi = R$ y $\phi = \omega t$, donde R y ω son constantes conocidas, y además $z(t=0)=0$.

a) Escriba los vectores posición y velocidad en función del tiempo t.

b) Determine la magnitud de la aceleración en función del tiempo t.

c) Obtenga el vector tangente a la trayectoria, $\hat{t}$, y el radio de curvatura asociados a cada punto de la trayectoria de P.

PROBLEMA 2

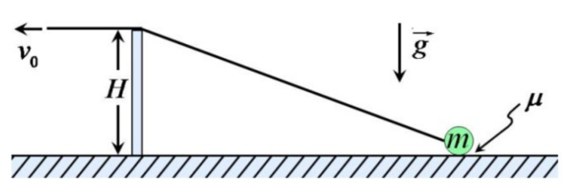


Una partícula de masa m puede deslizar sin roce sobre un cascarón semiesférico hueco de radio R. La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto, P, como muestra la figura.

a) Si el extremo Q de la cuerda se mantiene fijo, tal que el ángulo cenital se mantiene siempre en $\theta = \pi/3$, determine la máxima velocidad angular en torno al eje OP que puede tener la partícula, tal que ella no se separe del cascarón.

b) En un segundo experimento se da a la partícula una velocidad angular inicial ω_0 en torno a OP, menor que el valor determinado en a), y además el extremo Q de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_0, constante. Encuentre expresiones, en función de θ, para: la velocidad angular en torno a OP que adquiere la partícula, y la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula, mientras ésta no se separe del cascarón.

PROBLEMA 3



Una partícula de masa m es tirada por una cuerda ideal que es recogida a tasa v_0 pasando por el extremo superior de una barrera vertical de altura H como muestra la figura. La partícula desliza sobre una superficie horizontal con la cual tiene un coeficiente de roce dinámico de constante μ.

a) Demuestre que la magnitud de la aceleración horizontal de la partícula es inversamente proporcional al cubo de su distancia a la barrera. Determine la constante de proporcionalidad.

b) Encuentre la distancia a la barrera, en que la partícula se separa de la superficie horizontal.

Nota: posición, velocidad y aceleración en coordenadas esféricas:

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \quad ; \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} \;\; ; \; \vec{a} = a_r\,\hat{r} + a_\theta\,\hat{\theta} + a_\phi\,\hat{\phi} \quad ,$$

$$\text{donde:} \quad a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta \; ; \;\; a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \;\; ; \;\; a_\phi = \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

a) Del enunciado se conocen las siguientes condiciones:

$\phi = \omega t \Rightarrow \dot{\phi} = \omega$; $\quad \frac{dz}{d\phi} = R$, con $z(0) = 0 \Rightarrow\ z = R\phi = R\omega t \Rightarrow \dot{z} = R\omega$; $\quad \rho(t) = z(t) = R\omega t \Rightarrow \dot{\rho} = R\omega$

De donde podemos escribir $\vec{r}$ y $\vec{v}$ en función del tiempo, en coordenadas cilíndricas:

$\boxed{\vec{r} = R\,\omega\, t\,(\hat{\rho} + \hat{k})}$ $\quad \boxed{\vec{v} = R\omega\,((\hat{\rho} + \omega t\,\hat{\phi} + \hat{k}\,)}$

b) De las condiciones del enunciado, se desprende además que: $\ddot{\rho} = \ddot{\phi} = \ddot{z} = 0$

$\Rightarrow\quad \vec{a} = R\omega^2\left(-\omega t\,\hat{\rho} + 2\,\hat{\phi}\right) \Rightarrow \boxed{\|\vec{a}\| = R\omega^2\sqrt{(\omega t)^2\ + 4} = R\omega^2\sqrt{\phi^2\ + 4}}$ (*)

c) El vector tangente: $\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{R\omega\,(\hat{\rho}+\omega t\,\hat{\phi}+\hat{k}\,)}{R\omega\sqrt{(\omega t)^2+2}} = \frac{\hat{\rho}\,+\,\phi\,\hat{\phi}\,+\,\hat{k}}{\sqrt{\phi^2+2}}$.

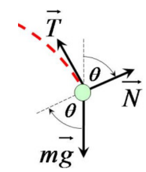
El radio de curvatura: Sabemos que $\|\vec{a}\|^2$ también se expresa como: $\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho_C^2}$, con $\ddot{s} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{R\omega^2\,\phi}{\sqrt{\phi^2+2}}$

Igualándolo con (*): $\quad R^2\omega^4\,(\phi^2+4) = R^2\omega^4\left[\frac{\phi^2}{\phi^2+2} + \frac{R^2\,(\phi^2+2)^2}{\rho_C^2}\right] \Rightarrow \boxed{\rho_C\ = R\sqrt{\frac{(\phi^2+2)^3}{\phi^4+5\phi^2+8}}}$

También pudimos obtenerlo con: $\rho_C\ = \frac{\dot{s}^3}{\|\vec{a}\times\vec{v}\|}$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

DCL:



a) En coordenadas esféricas, con $r = \text{cte} = R$ y $\theta = \text{cte} = \pi/3$, las ecuaciones escalares del movimiento son:

$N - mg\cos(\pi/3) = m\,a_r = -m\,R\text{sen}^2(\pi/3)\dot{\phi}^2 = -\frac{3}{4}mR\dot{\phi}^2$ (1)

$mg\ \text{sen}(\pi/3) - T = m\,a_\theta = -m\,R\ \text{sen}(\pi/3)\cos(\pi/3)\ \dot{\phi}^2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}m\,R\,\dot{\phi}^2$ (2)

$0 = m\,a_\phi = m\,R\ \text{sen}(\pi/3)\ddot{\phi}$ (3)

Condición de contacto: $N > 0$. En (1): $N = \frac{1}{2}mg - \frac{3}{4}mR\dot{\phi}^2 > 0\ \Rightarrow\ \boxed{\dot{\phi} < \dot{\phi}^* = \sqrt{2g/3R}}$

b) Ahora $r = \text{cte} = R$ y $\theta \neq \text{cte}$.

Además la cuerda es inextensible $\Rightarrow \overline{PQ} + R\theta = \text{cte}\ \Rightarrow\ R\dot{\theta} = -v_0$ (*)

Las ecuaciones según $\hat{r}$ y según $\hat{\phi}$ quedan como sigue:

$N - mg\cos\theta = m\,a_r = -mR\ \text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2 - mR\ \dot{\theta}^2$ (1')

$0 = m\,a_\phi = \frac{m}{R\,\text{sen}\theta}\frac{d}{dt}\left(R^{\,2}\text{sen}^2\theta\ \dot{\phi}\right)$ (3')

(3') $\Rightarrow \text{sen}^2\theta\ \dot{\phi} = \text{cte}$. Pero inicialmente: $\text{sen}^2\theta(0) = 3/4$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}(\theta) = \frac{3\,\omega_0}{4\text{sen}^2\theta}}$ (**)

(*) y (**) en (1') obtenemos la normal: $\boxed{N(\theta) = m\left[g\ \cos\theta - \frac{9\,R\omega_0^2}{16\ \text{sen}^2\theta} - \frac{v_0^2}{R}\right]}$

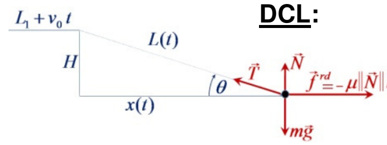
SOLUCIÓN PROBLEMA 3

a) Por Pitágoras: $x^2(t) = L(t)^2 - H^2$ (1)

Cuerda inextensible: $L_1 + v_0 t + L(t) = \text{cte} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \dot{L} = -v_o$ (2)

Hacemos $\frac{d}{dt}$ en (1) : $\quad 2x\,\dot{x} = 2L\,\dot{L} = -2Lv_0$ (3)

DCL:



Derivamos nuevamente: $\Rightarrow \dot{x}^2 + x\,\ddot{x} = -\dot{L}v_0 = v_0^2$

de (3) $\dot{x}^2 = \left[\frac{Lv_0}{x}\right]^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{1}{x}\left[v_0^2 - \frac{(x^2+H^2)v_0^2}{x^2}\right] = -\frac{H^2v_0^2}{x^3}}$ (4)

b) En coordenadas cartesianas, con la notación del DCL, las ecuaciones escalares del movimiento son:

$$\left.\begin{array}{l} m\,\ddot{x} = f^{rd} - T\cos\theta = \mu N - T\,\frac{x}{L} \\ m\,\ddot{y} = N + T\sin\theta - mg = 0\ \Rightarrow T = \frac{mg-N}{\sin\theta} = \frac{mg-N}{H/L} \end{array}\right\} \Rightarrow m\,\ddot{x} = \mu N - \frac{(mg-N)L}{H}\frac{x}{L} \Rightarrow N\left(\mu + \frac{x}{H}\right) = m(\ddot{x} + g\,\frac{x}{H})$$

Reemplazando $\ddot{x}$ de (4): $N\left(\mu + \frac{x}{H}\right) = m(-\frac{H^2v_0^2}{x^3} + g\,\frac{x}{H})$

La condición de despegue ($N = 0$) se obtiene cuando $g\,\frac{x}{H} = \frac{H^2v_0^2}{x^3}$; lo que ocurre para $\boxed{x^4 = \frac{H^3v_0^2}{g}}$