UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

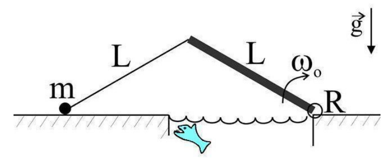
FI 21A-2 MECANICA 2005-1
Prof. Patricia Sotomayor C.

CONTROL N°1

13 de abril de 2005
Tiempo: 2:30 horas

Problema 1

Para hacer cruzar a una carga puntual de masa m desde un lado al otro lado de un río de ancho L, se utiliza el método esquematizado en la figura. La carga se ata mediante una cuerda de largo L al extremo de una barra también de largo L. La barra se hace girar con velocidad angular constante, ω_o, en torno a la rótula en R partiendo desde la posición horizontal. Despreciando todos los roces se pide:

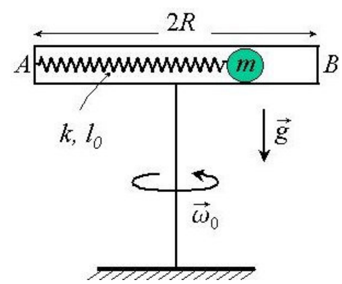


a) Mostrar que antes del despegue la tensión de la cuerda es constante y encontrar su valor.

b) Determinar la velocidad angular de la barra, tal que la carga se despegue del suelo justo antes de caer al río.

Problema 2

Una partícula P de masa m puede moverse sin roce por el interior de un tubo horizontal de largo $2R$. El tubo gira en torno a su punto medio con velocidad angular constante ω_0. La partícula está unida al extremo de un resorte de constante $k = 2m\omega_0^2$ y largo natural $l_o > R$, cuyo otro extremo está unido al tubo en el punto A, como se muestra en la figura.



Inicialmente P está en reposo, ubicada en el punto medio del tubo.

a) Determine la distancia de la partícula al centro del tubo, en función del tiempo.

b) Si $l_o = \alpha R$, encuentre el valor $\alpha_{MÁX}$ que asegura que P nunca choca con el punto B del tubo.

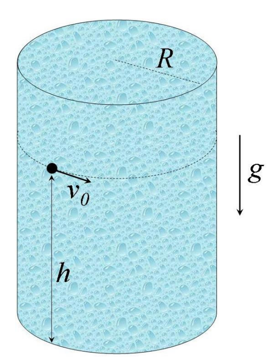
c) Encuentre la reacción que ejerce el tubo a la partícula, sus valores máximos y mínimos y los instantes en que esto ocurre.

Nota: Durante el movimiento la partícula nunca cruza el punto medio del tubo.

Problema 3

Una partícula P de masa m se lanza por el interior de un recipiente cilíndrico con eje vertical, radio R. El roce de P con la pared cilíndrica es despreciable; domina el roce viscoso de P con el fluido que llena el recipiente, que tiene la forma:

$$\vec{F}_{rv} = -c\,\vec{v}$$



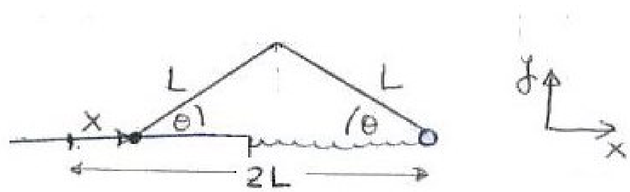
La partícula es lanzada en contacto con la superficie cilíndrica, a una altura h y con velocidad horizontal de magnitud v_0. Determine:

a) La velocidad vertical v_Z como función del tiempo y la función $z(t)$

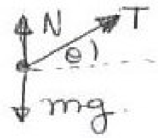
b) La velocidad angular de P como función del tiempo

c) valor que debe tener el coeficiente c para que P alcance justo a dar una sola vuelta en un descenso infinito.

P1



a) DCL:



Ecuaciones escalares del movimiento

$$m\ddot{x} = T\cos\theta \qquad (1)$$

$$0 = T\,\mathrm{sen}\,\theta + N - mg \qquad (2)$$

Por condición geométrica: $x = 2L - 2L\cos\theta$

$$\Rightarrow \dot{x} = 2L\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$$

pero sabemos que $\dot{\theta} = \omega_0 = cte \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2L\omega_0\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \ddot{x} = 2L\,\omega_0^2\cos\theta \end{cases}$

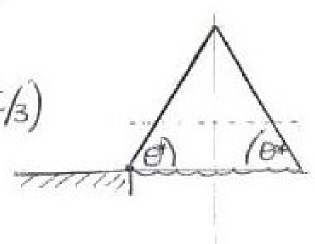
$$\text{en}(1) \Rightarrow 2mL\omega_0^2\cos\theta = T\cos\theta \Rightarrow \boxed{T = 2mL\omega_0^2 = cte}$$

b) Reemplazando la expresión de T en (2) y despejando N

$$N(\theta) = mg - 2mL\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Se pide que para el instante en que la carga pasa por el borde se produzca el despegue, es decir: $N(\theta^*) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \cancel{m}g - 2\cancel{m}L\omega_0^2\,\mathrm{sen}(\pi/3)$$



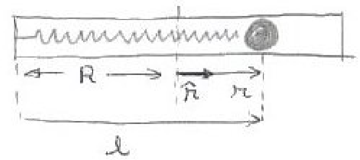
$\theta^* = \pi/3$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\cancel{2}L\,\sqrt{3}/\cancel{2}}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{L\sqrt{3}}}$$

P2

Usando coordenadas polares con origen en el centro del tubo:



Ecuaciones del movimiento
(considerando que $\dot{\phi} = \omega_0 = cte$)

$$\hat{r})\quad F_e = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\ \omega_0^2 \quad (1)$$
$$\hat{\phi})\quad N_\phi = m(2\dot{r}\dot{\phi})\ \omega_0 \quad (2)$$
$$\hat{k})\quad N_z - mg = 0 \quad (3)$$

donde: $\vec{F}_e = -k(l - l_0)\hat{r} = -k((R+r) - \alpha R)\hat{r}$

además $k = 2m\omega_0^2 \Rightarrow F_e = 2m\omega_0^2((\alpha-1)R - r)$

en (1) $\cancel{m}(\ddot{r} - r\omega_0^2) = 2\cancel{m}\omega_0^2((\alpha-1)R - r) \Rightarrow \ddot{r} + \omega_0^2 r = 2\omega_0^2(\alpha-1)R$

$$\Rightarrow r(t) = A\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + \frac{2\cancel{\omega_0^2}(\alpha-1)R}{\cancel{\omega_0^2}}$$

Conds. iniciales: $\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow A\omega_0 = 0 \Rightarrow A = 0$
$r(0) = 0 \Rightarrow B + 2(\alpha-1)R = 0 \Rightarrow B = -2(\alpha-1)R$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) = 2(\alpha-1)R\left[1 - \cos\omega_0 t\right]} \quad (*)$$

b) El máximo de $r(t)$ ocurre para $\omega_0 t = (n+1)\pi$ y su valor es: $r_{MAX} = 4(\alpha-1)R$

Se pide que $r_{MAX} < R \Rightarrow 4(\alpha-1) < 1 \Rightarrow \alpha < 1 + 1/4 \Rightarrow \alpha_{MAX} = 1{,}25$

c) La reacción es $\vec{N} = N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k}$.

de (2) y (3): $\vec{N}_\phi = 2m\dot{r}\omega_0$
$N_z = mg$.

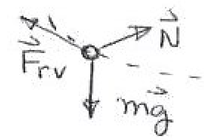
derivando (*): $\dot{r}(t) = 2(\alpha-1)R\omega_0\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

$\Rightarrow \|\vec{N}\|^2 = N_\phi^2 + N_z^2 \Rightarrow$ los máximos ocurren para $\omega_0 t = n\pi + \pi/2$
los mínimos ocurren para $\omega_0 t = n\pi$

P3

Fuerzas que actúan sobre P:

DCL



En coordenadas cilíndricas:

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{k}$$
$$\vec{N} = -N\hat{\rho}$$
$$\vec{F}_{rv} = -c\,\vec{v} = -c\left(R\dot{\phi}\,\hat{\phi} + \dot{z}\,\hat{k}\right)$$

Ecuaciones del movimiento:

$$\hat{\rho}: \quad -N = -mR\dot{\phi}^2 \qquad (1)$$
$$\hat{\phi}: \quad -cR\dot{\phi} = mR\ddot{\phi} \qquad (2)$$
$$\hat{k}: \quad -mg - c\dot{z} = m\ddot{z} \qquad (3)$$

de (3): $m\dfrac{d\dot{z}}{dt} = -(c\dot{z} + mg) \Rightarrow \displaystyle\int_{\dot{z}_0=0}^{\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{\left(\frac{c}{m}\dot{z} + g\right)} = -\int_0^t dt \Rightarrow \frac{m}{c}\ln\left(\frac{\frac{c}{m}\dot{z} + g}{g}\right) = -t$

$$\frac{c}{mg}\dot{z} + 1 = e^{-\frac{c}{m}t} \Rightarrow \dot{z}(t) = \frac{mg}{c}\left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right) = \frac{dz}{dt}$$

$$\int_h^z dz = \frac{mg}{c}\int_0^t \left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right)dt \Rightarrow z(t) = h - \frac{mg}{c}t - \frac{m^2 g}{c^2}\left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right)$$

b) El movimiento segun $\hat{\phi}$ está dado por la ecuación (2)

$$(2) \Rightarrow m\cancel{R}\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -c\cancel{R}\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\frac{c}{m}dt$$

$$\dot{\phi}(0) = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0}\right) = -\frac{c}{m}t \Rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{v_0}{R}e^{-\frac{c}{m}t}$$

Integrando nuevamente: $\phi(t) = -\dfrac{mv_0}{cR}e^{-\frac{c}{m}t}\Big|_0^t = \dfrac{mv_0}{cR}\left[1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right]$

observamos que $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\phi(t) = \frac{mv_0}{cR} = \phi_F$

Se pide que cuando $t\to\infty$ la partícula alcance a dar una sola vuelta

es decir: $\phi_F = 2\pi \Rightarrow 2\pi = \dfrac{mv_0}{cR} \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{mv_0}{2\pi R}}$