UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

FI21A-2 MECANICA 2007-1

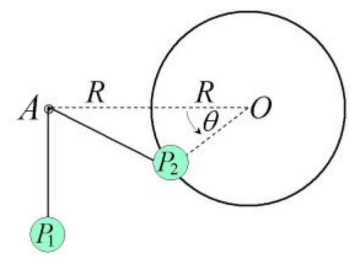
Prof. Patricia Sotomayor C.

CONTROL Nº1

11 de abril de 2007
Tiempo: 2:30 horas

Problema 1:

La partícula P_1 y el anillo P_2 están unidos por una cuerda ideal, de largo $L > 3R$, que pasa por una polea fija en A. La partícula P_1 puede moverse por una trayectoria rectilínea perpendicular a la recta $\overline{AO}$. La partícula P_2 puede moverse por un aro circular de centro O y radio R La polea está ubicada a una distancia R del aro, como se indica en la figura. Suponiendo que la cuerda se mantiene siempre tensa, se pide:

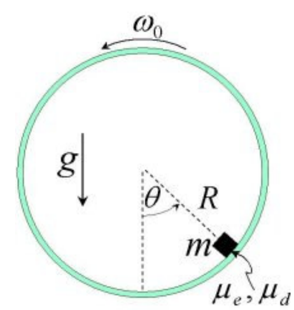


a) Si el anillo P_2 es movido con velocidad angular $\dot{\theta} = \omega_0 > 0$ constante, en el intervalo $0 < \theta < \pi$, determine la máxima rapidez de la partícula P_1.

b) Si a partir de la condición en que $\theta = \pi/2$ la partícula P_1 es alejada de la polea A con rapidez constante v_0, determine la aceleración y velocidad de P_2 cuando $\theta = \pi/3$.

Problema 2:

Considere un bloque de masa m que se encuentra sobre la superficie interior, rugosa, de un tambor cilíndrico de eje horizontal y radio R, el cual gira con velocidad angular constante ω_0 en torno a su eje. Los coeficientes de roce estático y dinámico entre el bloque y la superficie son μ_e y μ_d respectivamente.

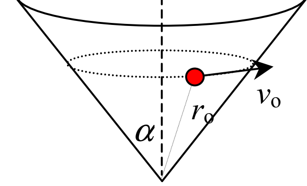


a) (2 puntos) ¿Qué valor tiene μ_d, si se observa que el bloque se mantiene en reposo formando un ángulo $\theta = \theta_0$ con la vertical?

b) (4 puntos) ¿Qué condición(es) debe(n) cumplir ω_0 y μ_e para que el bloque pueda mantenerse sin deslizar ni despegarse durante una vuelta completa del tambor?

Problema 3

Considere una superficie cónica como la indicada en la figura, que se encuentra en un ambiente **sin gravedad**. En un cierto instante se impulsa una partícula de masa m con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ sobre la superficie interior del cono, en dirección perpendicular al eje del cono. En ese momento la partícula está a una distancia r_0 del vértice del cono. El roce entre la partícula y la superficie es despreciable. El ángulo entre el eje del cono y la generatriz es α.

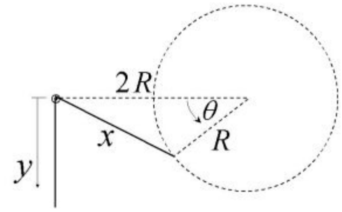


a) (2 puntos) Escriba las ecuaciones de movimiento de la partícula en un sistema de coordenadas que le parezca adecuado

b) (4 puntos) Determine la fuerza que la superficie cónica ejerce sobre la partícula cuando ésta se ha alejado hasta un distancia $r = 2r_0$ del vértice del cono y la rapidez de la partícula en ese momento

<u>Solución Pregunta 1:</u>

Por geometría: $x^2 = 4R^2 + R^2 - 4R^2\cos\theta = 5R^2 - 4R^2\cos\theta$



a) $$\dot{x} = \frac{2R^2 \operatorname{sen}\theta\, \omega_0}{\sqrt{5R^2 - 4R^2\cos\theta}} = \frac{R\omega_0 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(5/4) - \cos\theta}} = -\dot{y}$$

=> $\dot{y} < 0$ en todo el rango del movimiento (con y definido como en la figura)

$$\ddot{x} = R\omega_0 \frac{\cos\theta\omega_0 \sqrt{\ldots} - (\operatorname{sen}\theta\omega_0 / 2\sqrt{\ldots})\operatorname{sen}\theta}{(5/4) - \cos\theta} = R\omega_0^2 \frac{2\cos\theta((5/4) - \cos\theta) - \operatorname{sen}^2\theta}{2((5/4) - \cos\theta)^{3/2}} = \frac{R\omega_0^2}{2} \frac{\cos^2\theta - (5/2)\cos\theta + 1}{((5/4) - \cos\theta)^{3/2}} = -\ddot{y}$$

Las soluciones de la ecuación: $u^2 - (5/2)u + 1 = 0$ son $u_1 = 2$ y $u_2 = 1/2$, con solución en θ sólo para u_2.
El único valor θ^* que cumple la solución para u_2 en el rango estudiado es $\theta^* = \pi/3$, que se encuentra entre dos mínimos para la rapidez de P_1 (en $\theta \to 0$ y en $\theta \to \pi$). Por lo tanto la rapidez máxima de P_1 se obtiene para $\theta^* = \pi/3$

$$\left|\dot{y}\right|_{MÁX} = \frac{R\omega_0\sqrt{3}/2}{\sqrt{(5/4) - (2/4)}} = R\omega_0$$

b) $\dot{x} = \dfrac{R\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}}{\sqrt{(5/4) - \cos\theta}} = -v_0$ => $\dot{\theta} = -\dfrac{v_0}{R}\dfrac{\sqrt{(5/4) - \cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{v_0}{R} \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{\ldots}}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\sqrt{\ldots}}{\operatorname{sen}^2\theta}\dot{\theta} = -\frac{v_0}{R}\frac{\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos\theta((5/4) - \cos\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{(5/4) - \cos\theta}}\dot{\theta} = -\frac{v_0}{R}\frac{\cos^2\theta - (5/2)\cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{(5/4) - \cos\theta}} \quad \frac{-v_0}{R}\frac{\sqrt{(5/4) - \cos\theta}}{sen\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{v_0^2}{R^2}\frac{\cos^2\theta - (5/2)\cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}^3\theta}$$

velocidad de P_2: $\vec{v}(\theta) = -v_0 \dfrac{\sqrt{(5/4) - \cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta}\hat{\theta}$ => $\vec{v}(\pi/3) = -v_0 \dfrac{\sqrt{(5/4) - (2/4)}}{\sqrt{3}/2}\hat{\theta} = -v_0\hat{\theta}$

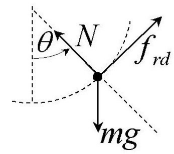
aceleración de P_2: $\vec{a}(\theta) = -\dfrac{v_0^2}{R}\dfrac{(5/4) - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\hat{r} + \dfrac{v_0^2}{R}\dfrac{\cos^2\theta - (5/2)\cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}^3\theta}\hat{\theta}$

=> $\vec{a}(\pi/3) = -\dfrac{v_0^2}{R}\dfrac{(5/4) - (2/4)}{3/4}\hat{r} + \dfrac{v_0^2}{R}\dfrac{(1/4) - (5/2)(1/2) + 1}{2\cdot 3\sqrt{3}/8}\hat{\theta} = -\dfrac{v_0^2}{R}\hat{r}$

Solución Pregunta 2:

a) $mg\cos\theta - N = 0$ (1.1)

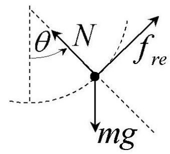
$f_{rd} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$ (1.2)



(1.1) => $N = mg\cos\theta$, en (1.2) => $\mu_d mg\cos\theta - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$ => $\mu_d = \tan\theta$

b) $mg\cos\theta - N = -mR\omega_0^2$ (2.1)

$f_{re} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$ (2.2)



(2.1) => $N = m(g\cos\theta + R\omega_0^2)$

Condición de no despegue $N > 0$ => $-g\cos\theta < R\omega_0^2$, cuyo valor límite ocurre cuando $\cos\theta = -1$ entonces la condición de no despegue es: $R\omega_0^2 > g$ (3)

(2.2) => $f_{re} = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$ donde $f_{re} \le \mu_e N$ => $mg\,\mathrm{sen}\,\theta \le \mu_e m(g\cos\theta + R\omega_0^2)$

=> $\mu_e \ge \dfrac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{g\cos\theta + R\omega_0^2}$, lo que debe verificarse para $0 \le \theta \le 2\pi$ (una vuelta completa del tambor)

es decir $\mu_e \ge f_{MÁX}(\theta) = f(\theta^*)$, con $f(\theta) = \dfrac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{g\cos\theta + R\omega_0^2}$

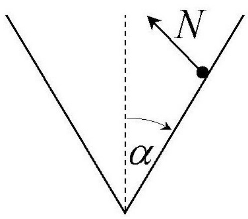
$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{g\cos\theta(g\cos\theta + R\omega_0^2) + g^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{(g\cos\theta + R\omega_0^2)^2}\right)_{\theta^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^2 + gR\omega_0^2\cos\theta^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta^* = -\frac{g}{R\omega_0^2}$$

donde θ^* está entre $\pi/2$ y π, es decir, con $\mathrm{sen}\,\theta^* > 0$

Reemplazando: $\mu_e \ge \dfrac{g\sqrt{1 - g^2/(R^2\omega_0^4)}}{-g^2/(R\omega_0^2) + R\omega_0^2} = \dfrac{g\sqrt{R^2\omega_0^4 - g^2}}{R^2\omega_0^4 - g^2}$

$\mu_e \ge \dfrac{g}{\sqrt{R^2\omega_0^4 - g^2}}$, donde $R^2\omega_0^4 > g^2$ por la condición de no despegue dada por la ecuación (3)

Solución Pregunta 3:



$\vec{v}(0) = v_0\ \hat{\phi}$

$\vec{r}(0) = r_0\ \hat{r}$

a) Ecuaciones del movimiento:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sen^2\theta) = 0 \qquad (1)$$

$$m(-r\dot{\phi}^2 sen\alpha \cos\alpha) = -N \qquad (2)$$

$$m\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\alpha}\frac{d}{dt}(r^2 sen^2\alpha\,\dot{\phi}) = 0 \qquad (3)$$

b)

de (3) $r^2\dot{\phi} = cte$ => $r_0^2\dfrac{v_0}{r_0\,\mathrm{sen}\,\alpha} = r^2\dot{\phi}$ => $\dot{\phi}(r) = \dfrac{r_0 v_0}{r^2\ \mathrm{sen}\ \alpha}$

en (2) $N(r) = mr\dfrac{r_0^2 v_0^2}{r^4\,\mathrm{sen}^2\,\alpha} sen\alpha\cos\alpha = \dfrac{m\ r_0^2 v_0^2 \cos\alpha}{r^3\,\mathrm{sen}\,\alpha}$ => $N(2r_0) = \dfrac{m v_0^2}{8r_0 \tan\alpha}$

Si escribimos las ecuaciones del movimiento en coordenadas intrínsecas:

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = N$$

$$m\ddot{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s} = cte$$

=> la rapidez de la partícula es v_0 en cualquier parte de su movimiento, y en particular para $r = 2r_0$