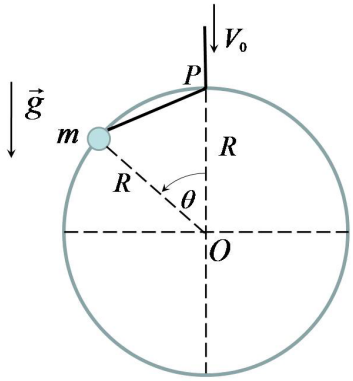
CONTROL N° 1

P 1

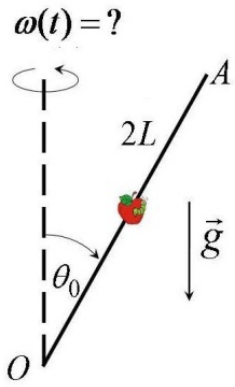


Una partícula de masa m está constreñida a moverse sin roce por un aro vertical de radio R. La partícula está unida también a un hilo ideal inextensible que atraviesa el aro por el punto superior P como muestra la figura. El extremo superior del hilo desciende con rapidez constante V_0 como indica la figura.

a) Suponiendo que el hilo se mantiene tenso, encuentre expresiones para $\dot{\theta}(\theta)$ y $\ddot{\theta}(\theta)$

b) Si $V_0 = \frac{1}{2}\sqrt{gR}$, determine el ángulo θ en el momento en que la tensión del hilo se hace cero.

P 2



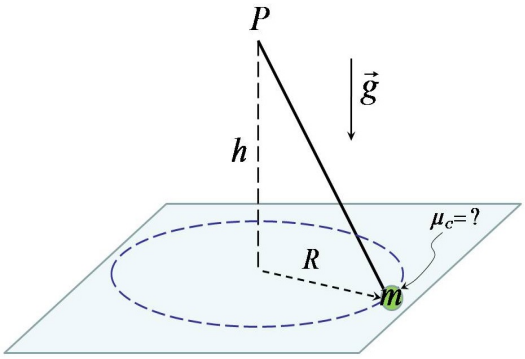
La varilla OA de largo $2L$ gira en torno a un eje vertical con velocidad angular $\omega(t)$ desconocida, formando un ángulo θ_0 con este eje. En el instante inicial, a una distancia L del punto de rotación O de la varilla, se encuentra una manzana puntual de masa m, que puede deslizar sin roce por la varilla.

a) Determine la velocidad angular dependiente del tiempo $\omega(t)$, que debe tener la varilla, para que la manzana deslice por ella hacia arriba con rapidez constante v_0 relativa a la varilla.

b) En estas condiciones, determine el ángulo ϕ recorrido en el giro de la varilla desde $t = 0$ hasta que la manzana abandona la varilla por el extremo superior A.

c) Determine la fuerza total que ejerce la varilla a la manzana en función del tiempo.

P 3



Una partícula de masa m describe una circunferencia de radio R, apoyada sobre una mesa horizontal y sujeta a una cuerda inextensible, cuyo extremo fijo P se encuentra a una altura h de la mesa. Despreciando el roce viscoso con el aire, determine:

a) La rapidez máxima $v_{MÁX}$, que le permite a la partícula mantenerse en contacto con la mesa.

b) Si la rapidez inicial de la partícula es $\frac{1}{2}v_{MÁX}$, determine el valor que debe tener el coeficiente de roce cinético μ_C, tal que la partícula se detenga justo al terminar una vuelta completa.

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_\phi\hat{\phi}$$

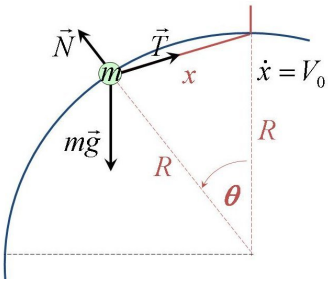
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta;\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\ ;\ a_\phi = r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta$$

Solución P1:

a) Sea x el largo de la recta que va desde el punto P hasta la partícula.

=> $x = 2R\sin(\theta/2)$ y $\dot{x} = V_0$ => $V_0 = 2R\cos(\theta/2)(1/2)\dot{\theta}$

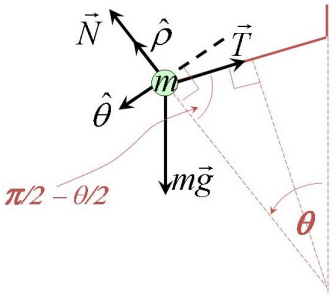
de donde: $\dot{\theta}(\theta) = \dfrac{V_0}{R\cos(\theta/2)}$



Además, $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$ =>

$$\ddot{\theta}(\theta) = \frac{-\sin(\theta/2)(-1/2)\,V_0}{R\cos^2(\theta/2)}\,\frac{V_0}{R\cos(\theta/2)} = \frac{V_0^2\sin(\theta/2)}{2R^2\cos^3(\theta/2)}$$

b) Ecuaciones del movimiento en coordenadas polares



$\hat{\rho}$: $N - mg\cos\theta - T\sin(\theta/2) = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -mR\,\dot{\theta}^2$ (1)

$\hat{\theta}$: $mg\sin\theta - T\cos(\theta/2) = m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = mR\,\ddot{\theta}$ (2)

Reemplazando $\ddot{\theta}(\theta)$ en (2):

$$mg\sin\theta - T\cos(\theta/2) = mR\,\frac{V_0^2\sin(\theta/2)}{2R^2\cos^3(\theta/2)}$$

Pero $V_0^2 = \dfrac{gR}{4}$ => $2mg\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) - T\cos(\theta/2) = \dfrac{mg\sin(\theta/2)}{8\cos^3(\theta/2)}$ => $T = mg\sin(\theta/2)\left[2 - \dfrac{1}{8\cos^4(\theta/2)}\right]$

Las soluciones para $T = 0$ son:

1) $\sin(\theta/2) = 0$ => $\theta/2 = N\pi$ => $\theta = 2N\pi$: En posición P => No inicia movimiento en el anillo

2) $8\cos^4(\theta/2) = 1/2$ => $\cos^4(\theta/2) = 1/16$ => $\cos(\theta/2) = 1/2$ => $\theta/2 = \pi/3$ => $\theta = 2\pi/3$ (Valor buscado)

Solución P2: En coordenadas esféricas, por enunciado tenemos las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{r} = v_0 \Rightarrow r = L + v_0 t\,;\ \ddot{r} = 0 \\ \dot{\phi} = \omega(t) \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = ? \\ \theta = \theta_0 = cte \Rightarrow \ \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = -r\sin^2\theta_0\,\omega^2\,\hat{r} - r\sin\theta_0\cos\theta_0\omega^2\,\hat{\theta} + (2v_0\sin\theta_0\omega + r\dot{\omega}\sin\theta_0)\hat{\phi}$$

a) $F_r = -mg\cos\theta_0 = -m\,r\sin^2\theta_0\,\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{g\cos\theta_0}{r\sin^2\theta_0}$ => $\omega(t) = \sqrt{\dfrac{g\cos\theta_0}{(L + v_0 t)\sin^2\theta_0}}$

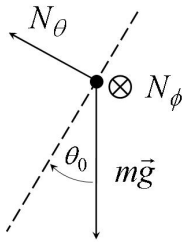
b) Si t_F es el tiempo que tarda en llegar a A => $L + v_0 t_F = 2L$ => $t_F = \dfrac{L}{v_0}$

$$\Rightarrow \phi(t_F) = \int_0^{t_F}\omega(t)dt = \frac{\sqrt{g\cos\theta_0}}{\sin\theta_0}\int_0^{t_F}\frac{dt}{\sqrt{L + v_0 t}} = \frac{\sqrt{g\cos\theta_0}}{\sin\theta_0}\,\frac{1}{v_0}\underbrace{\int_0^{t_F}(L + v_0 t)^{-1/2}\,d(L + v_0 t)}_{2\left((L + v_0 t_F)^{1/2} - L^{1/2}\right) = 2\sqrt{L}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$\Rightarrow \phi(t_F) = \frac{\sqrt{g\cos\theta_0}}{\sin\theta_0}\,\frac{2\sqrt{L}\left(\sqrt{2} - 1\right)}{v_0}$$

c) $F_\theta = mg\sin\theta_0 - N_\theta = -m\,r\sin\theta_0\cos\theta_0\omega^2 \Rightarrow N_\theta = mg\sin\theta_0 + m\,r\sin\theta_0\cos\theta_0\omega^2$

$F_\phi = N\phi = m(2v_0\sin\theta_0\omega + r\,\dot{\omega}\sin\theta_0)$

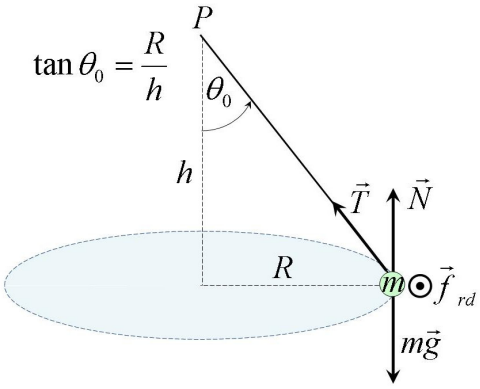


Con $\dot{\omega} = \dfrac{\sqrt{g\cos\theta_0}}{\sin\theta_0}\dfrac{d}{dt}(L+v_0 t)^{-1/2} = -\dfrac{\sqrt{g\cos\theta_0}}{2\sin\theta_0}(L+v_0 t)^{-3/2}$

$$\Rightarrow N_\theta = mg\sin\theta_0 + \frac{mg\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0} = \frac{mg}{\sin\theta_0} \quad \text{y} \quad N_\phi = m\left[2v_0\sin\theta_0\sqrt{\frac{g\cos\theta_0}{(L+v_0 t)\sin^2\theta_0}} - \sqrt{\frac{g\cos\theta_0}{4(L+v_0 t)}}\right]$$

Solución P3:

Ecuaciones del movimiento en cilíndricas:



$\hat{\rho}$: $\quad -T\sin\theta_0 = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -mR\,\dot{\phi}^2 \qquad (1)$

$\hat{\phi}$: $\quad -f_{rd} = m(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) = mR\,\ddot{\phi} \qquad (2)$

$\hat{k}$: $\quad N + T\cos\theta_0 - mg = 0 \qquad (3)$

De (1): $T = \dfrac{mR\,\dot{\phi}^2}{\sin\theta_0}$ en (3) $\boxed{N = mg - T\cos\theta_0 = mg - \dfrac{mR\,\dot{\phi}^2}{\tan\theta_0} = m(g - h\dot{\phi}^2)}$ (4)

a) Contacto => $N > 0$ => $\boxed{\dot{\phi}^2 < g/h \quad \text{, o bien, } V^2 < gR^2/h}$

b) Parte con $\dot{\phi}_0^2 = g/4h$

de (2) $mR\,\ddot{\phi} = -\mu_C N$; De (4) : $mR\,\ddot{\phi} = \mu_C\, m(h\dot{\phi}^2 - g)$ => $\dot{\phi}\dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \dfrac{\mu_C}{R}(h\dot{\phi}^2 - g)$

$$\frac{1}{2h}\int_{\phi_0}^{0}\frac{2h\,\dot{\phi}\,d\dot{\phi}}{(h\dot{\phi}^2 - g)} = \frac{\mu_C}{R}\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$\frac{1}{2h}\ln\left(\frac{-g}{(g/4) - g}\right) = \frac{\mu_C}{R}2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_C = \frac{R\ln(4/3)}{4\pi h}}$$