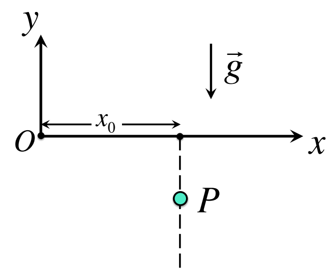
Universidad de Chile
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Física

CONTROL Nº 1

FI2001- 2 Mecánica
Prof. Patricia Sotomayor C.

9 de abril de 2014
Tiempo: 3 horas

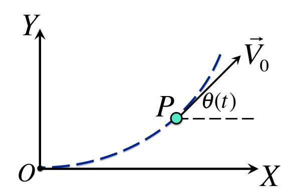
[P1] Se tiene los ejes cartesianos (x,y), con x horizontal e y vertical hacia arriba. En el punto $(x = x_0\ , y = 0)$ se suelta una partícula P, desde el reposo, sometida únicamente a la acción de la gravedad g.



a) Obtenga la velocidad angular vectorial $\vec{\omega}(t)$ que la partícula tiene con respecto al origen O.

b) Obtenga el máximo valor que alcanza la magnitud de $\vec{\omega}$ y el tiempo que transcurre hasta alcanzar tal valor.

[P2] Una partícula P se mueve en el plano (X,Y) con rapidez constante V_0, siguiendo una trayectoria tal que el ángulo θ que forma su velocidad con el eje X es una función conocida del tiempo $\theta(t)$ (ver figura).



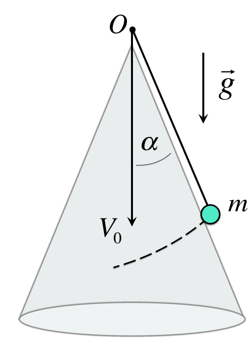
a) Si $\theta(t) = \omega t$, con ω constante conocida, muestre que la trayectoria es una circunferencia y determine su radio.

b) Si $\theta(t) = \alpha t^2$, con α constante conocida, muestre que el producto de la longitud recorrida desde el instante inicial ($s(t)$) por el radio de curvatura ($\rho_C(t)$) es una constante C. Determine C.

c) Haga un bosquejo de la forma de la trayectoria de P en el caso (b) y determine el valor del radio de curvatura de esa trayectoria cuando la coordenada Y de P alcanza su máximo valor.

Indicación: Una forma de determinar el radio de curvatura de una trayectoria es: $\rho_C = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{a}\times\vec{v}\|}$

[P3] Una partícula de masa m se mueve sin roce sobre la superficie externa de un cono de ángulo α (ver figura). La partícula está unida a un hilo que pasa por un orificio en el vértice del cono, de donde es recogida con velocidad constante V_0, tal como se indica en la figura.



Inicialmente, la partícula está a una distancia L del vértice O, y la velocidad angular en torno al eje vertical es ω_0 ($\dot{\phi}(t = 0) = \omega_0$).

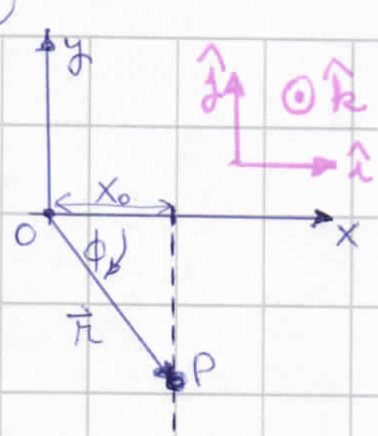
a) Determine la distancia al vértice en que la partícula se despega de la superficie del cono. **4 ptos**

b) Calcule la tensión de la cuerda en ese instante. **2 ptos**

Coordenadas cilíndricas: $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\,\hat{k}$; $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\,\hat{k}$

Coordenadas esféricas: $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$; $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}((r\sin\theta)^2\dot{\phi})\hat{\phi}$

P1



El movimiento de P es caída libre desde el reposo, partiendo de la posición inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$.

Entonces, los vectores posición y velocidad, en función del tiempo, son:

$$\vec{r}(t) = x_0\hat{i} - \frac{gt^2}{2}\hat{j} \quad ; \vec{v} = -gt\hat{j}.$$

a) $$\vec{\omega}(t) = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\|^2} = \frac{(x_0\hat{i} - \frac{gt^2}{2}\hat{j})\times(-gt\hat{j})}{x_0^2 + g^2t^4/4} = -\frac{4x_0 gt}{4x_0^2+g^2t^4}\hat{k}$$

b) Sea t_M el tiempo en que ocurre $\omega_{máx}$, entonces:

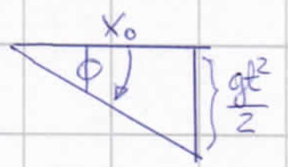
$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{t_M} = \left(\frac{-4x_0g(4x_0^2+g^2t^4)+4g^2t^3\cdot 4x_0gt}{(4x_0^2+g^2t^4)^2}\right)_{t_M} = \left(\frac{4x_0g(3g^2t^4-4x_0^2)}{(4x_0^2+g^2t^4)^2}\right)_{t_M} = 0$$

de donde: $3g^2t_M^4 = 4x_0^2 \Rightarrow t_M = \left(\frac{4x_0^2}{3g^2}\right)^{1/4}$

$$\omega_{máx} = \omega(t=t_M) = \frac{\cancel{4x_0}\,g\,t_M}{\cancel{4x_0^2}+\cancel{g^2}\,\frac{4x_0^2}{3\cancel{g^2}}} = \frac{g}{(4/3)x_0}\cdot\left(\frac{4x_0^2}{3g^2}\right)^{1/4}.$$

— o —

Otra manera de obtener la velocidad angular es de la geometría:



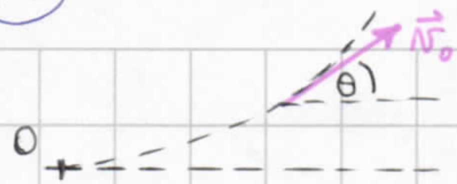
$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt}(-\hat{k})$ La dirección $(-\hat{k})$ la asignamos porque el giro de ϕ es según el sentido de los punteros del reloj.

De la geometría: $\operatorname{tg}\phi = \frac{gt^2/2}{x_0} \Rightarrow \frac{d(\operatorname{tg}\phi)}{dt} = \frac{gt}{x_0}$ (1)

Por otra parte: $\frac{d(\operatorname{tg}\phi)}{dt} = \underbrace{\frac{d(\operatorname{tg}\phi)}{d\phi}}_{1+\operatorname{tg}^2\phi}\cdot\underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\dot{\phi}} = (1+\operatorname{tg}^2\phi)\,\dot{\phi} = \left(1+\left(\frac{gt^2/2}{x_0}\right)^2\right)\dot{\phi}$ (2)

$$(1)=(2) \Rightarrow \left(1+\frac{g^2t^4}{4x_0^2}\right)\dot{\phi} = gt/x_0 \Rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{gt/x_0}{1+g^2t^4/4x_0^2} = \frac{4x_0gt}{4x_0^2+g^2t^4} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}(t) = \frac{4x_0gt}{4x_0^2+g^2t^4}(-\hat{k})}$$

(P2)



Podemos expresar $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas cartesianas:

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta\,\hat{\imath} + v_0\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} \quad (1)$$

$$\vec{a} = (-v_0\,\text{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} + (v_0\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath} = v_0\dot{\theta}(-\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) \quad (2)$$

En intrínsecas:

$\vec{v} = v_0\hat{t} = \dot{s}\,\hat{t}$ (3) (con $\dot{s} > 0$ en todo el movimiento).

$$\vec{a} = \underbrace{\cancel{\ddot{s}\,\hat{t}}}_{\substack{0 \\ (\dot{s}=\text{cte})}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n} = \frac{v_0^2}{\rho_c}\hat{n} \quad (4)$$

Igualamos $\|\vec{a}\|$ obtenido de (2) y de (4)

$$\|\vec{a}\| = \frac{v_0^2}{\rho_c} = v_0\dot{\theta}\sqrt{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta} \Rightarrow \rho_c = \frac{v_0^2}{v_0\dot{\theta}} = \frac{v_0}{\dot{\theta}}$$

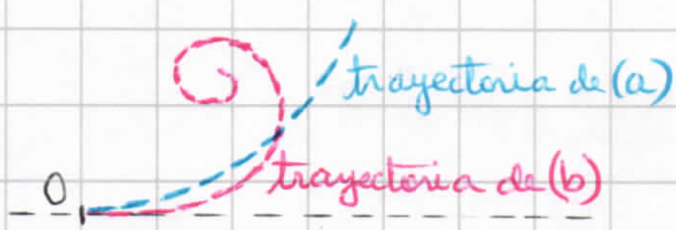
a) Si $\theta(t) = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \rho_c = \frac{v_0}{\omega} = \text{cte}$

Entonces la trayectoria es una circunferencia de radio $R = \rho_c = \frac{v_0}{\omega}$.

b) Si $\theta(t) = \alpha t^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 2\alpha t \Rightarrow \rho_c = \frac{v_0}{2\alpha t}$

de (2) $\dot{s} = v_0 = \text{cte} \Rightarrow s(t) = \int_0^t \dot{s}(t)\,dt = \int_0^t v_0\,dt = v_0 t =$ (longitud recorrida desde el instante inicial)

c)



en (a) $\rho_c = \text{cte} = \frac{v_0}{\omega}$

en (b) $\rho_c = \frac{v_0}{2\alpha t}$

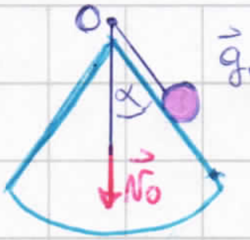
La coordenada y es máx/mín cuando $v_y = 0$, esto es: $v_0\,\text{sen}\,\alpha t^2 = 0$

Es mínimo cuando $\alpha t_m = 0$ (segunda derivada >0); es máximo cuando $\alpha t_M^2 = \pi$ (segunda derivada <0)

$\therefore$ $y_{máx}$ ocurre en $t_M^2 = \frac{\pi}{\alpha}$ ($y_{máx}$: el máximo valor que toma y en la trayectoria)

En este instante $\rho_c(t_M) = \frac{v_0}{\alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha\pi}}$

(P3)



DCL:

Usamos coordenadas esféricas 

(Aquí $\theta = cte = \alpha$)

Condiciones iniciales: $r(0)=L$; $\dot{\phi}(0) = \omega_0$

Condiciones cinemáticas: $\dot{r}(t) = -v_0 = cte \Rightarrow \ddot{r}(t) = 0$

(Observación:
$\dot{r}(t) = -v_0 \ \forall t \Rightarrow \dot{r}(0) = -v_0 \Rightarrow \dot{z}(0) = -v_0 \cos\alpha$. Sin embargo $\dot{z}(0)$ no se utiliza en la solución de este problema)

Ecuaciones del movimiento:

$$F_r = mg\cos\alpha - T = -mr\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \quad (1)$$

$$F_\theta = N - mg\operatorname{sen}\alpha = -mr\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \quad (2)$$

$$F_\phi = 0 = \frac{1}{r\operatorname{sen}\alpha}\frac{d}{dt}(r^2\operatorname{sen}^2\alpha\,\dot{\phi}) \quad (3)$$

a) de (3) $\Rightarrow r^2\operatorname{sen}^2\alpha\,\dot{\phi} = cte$; Sabemos que $r(0)=L$ y $\dot{\phi}(0)=\omega_0 \Rightarrow r^2 \cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}\,\dot{\phi} = L^2 \cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}\,\omega_0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L^2\omega_0}{r^2}$

en (2): $N = mg\operatorname{sen}\alpha - mr\frac{L^4\omega_0^2}{r^4}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = mg\operatorname{sen}\alpha\left(g - \frac{L^4\omega_0^2\cos\alpha}{r^3}\right)$

Si r_D es la posición de P cuando despega $\Rightarrow N(r=r_D)=0 \Rightarrow r_D^3 = \frac{L^4\omega_0^2\cos\alpha}{g}$.

b) de (1): $T(r) = mg\cos\alpha + mr\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\alpha = mg\cos\alpha + mr\frac{L^4\omega_0^2}{r^4}\operatorname{sen}^2\alpha$

$$T(r=r_D) = mg\cos\alpha + m\frac{L^4\omega_0^2}{r_D^3}\operatorname{sen}^2\alpha = mg\cos\alpha + mL^4\omega_0^2 \cdot \frac{g\operatorname{sen}^2\alpha}{L^4\omega_0^2\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}$$