Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Fisica
FI1002-5 Sistemas Newtonianos

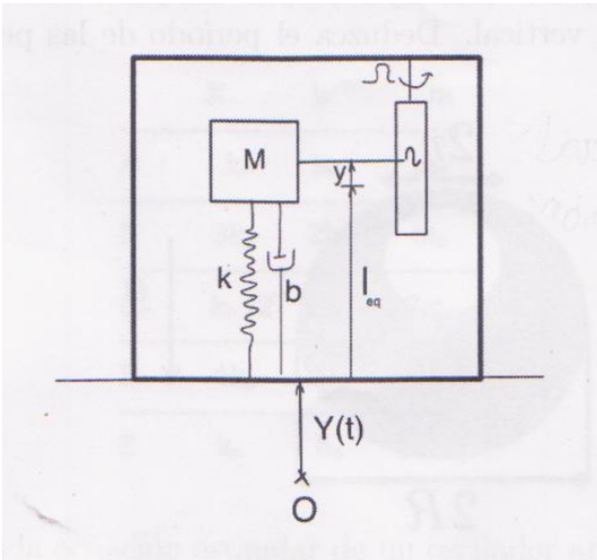
Pauta auxiliar unidades 5C-6A

Profesor: Rene Garreaud
Auxiliares: Mauricio Carcamo, Ariel Figueroa, Carlos Mardones

---

P1. Se estudiará un modelo de un sismógrafo simplificado (como el que se muestra en la figura). Se supone que un sismo hace que el piso oscile verticalmente con respecto a un sistema inercial O la desviación de la altura con el piso corresponde a $Y(t) = \delta sen(wt)$, la que es conocida y válida a partir de $t = 0$. Despreciando los efectos de gravedad, responda:

Considerando solo la masa M que está unida al resorte de constante k y largo natural l_{eq} y que además sufre amortiguamiento con un roce viscoso proporcional a la velocidad b. Defina y como la posición relativa de la masa M respecto a la posición de equilibrio. Encuentre el comportamiento estacionario de $y(t)$ cuando actúa un temblor.



P2. Se observa una onda que se transporta a lo largo de una cuerda, caracterizada por la ecuación

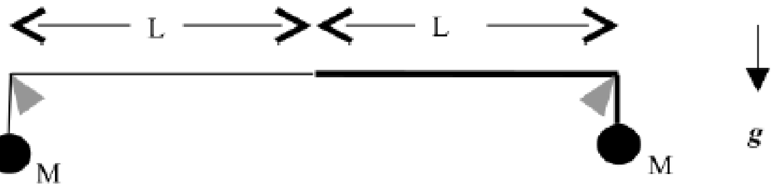
$$y(x,t) = 4sen(2x - 3t).$$

a) Verifique que esta función soluciona la ecuación de ondas
b) ¿en qué sentido se propaga la onda?
c) Determine su velocidad, longitud de onda y periodo
d) ¿cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de la cuerda?

P3. Un gusanito está a 2.5 cm del extremo de un tendedero cuando un estudiante que está colgando su ropa al otro extremo lo ve. El estudiante le da un golpe a la cuerda de modo que se propaga un pulso de 3 cm de altura que se dirige hacia el gusano. La cuerda tiene 25 m de longitud una masa de 0.25 kg, y se mantiene tensa gracias a una masa de 10 kg. Además se sabe que el estudiante está a 5 m del extremo opuesto. Si el gusano se mueve a 2.5 cm/s ¿llegará al extremo más cercano de la cuerda antes de que lo alcance el pulso enviado?

P4. Una cuerda de masa M y longitud L se pone bajo tensión cuando se le hace girar por un extremo a velocidad angular constante ω . Si ignoramos los efectos de la gravedad. Determine la velocidad del pulso.

P5. Dos cuerdas de densidad lineal de masa R y 2R se unen entre sí, con la cuerda de mayor densidad en el lado derecho. Los extremos de la cuerda están unidos a sendas masas M . Se dispone de dos pivotes, separados una distancia 2L, sobre los cuales posa la cuerda en forma horizontal como se indica en la figura. En un cierto instante se generan dos pulsos idénticos y simétricos en cada uno de los extremos de la cuerda. Determine la distancia, medida desde el extremo izquierdo de la cuerda, donde se encuentran los puntos centrales de ambos pulsos.



Pauta

P1. Como se puede observar el sismo genera el forzante, por lo que como vimos para este tipo de ejercicios la idea es llegar a ecuación de movimiento de un forzado, es decir:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} sen(\omega t)$$

Se debe dejar el $\ddot{x}$ sólo y posteriormente reconocer los elementos de la ecuación (i.e τ, ω_0, etc.)

$Y(t) = \delta sen(\omega t)$ es el movimiento generado por el sismo, mientras que $y(t)$ es el que tiene la masa M respecto a la posición de equilibrio l_{eq}, entonces se definirá la posición de M respecto al sistema inercial O como:

$$z(t) = y(t) + l_{eq} + Y(t)$$

$$z(t) = y(t) + l_{eq} + \delta sen(\omega t) \tag{1}$$

La ecuación de movimiento es:

$$M\ddot{z} = f_{rocevicoso} + f_{resorte} \tag{2}$$

Notar que tanto $f_{roceviscoso}$ como $f_{resorte}$ están siendo afectados por el moviento de la masa M dentro del sismógrafo (i.e el movimiento respecto al equilibrio del resorte), por lo que $f_{roceviscoso} = -b\dot{y(t)}$ y $f_{resorte} = -ky(t)$, reemplazando esto en (2), queda:

$$M\ddot{z} = -b\dot{y(t)} - ky(t) \tag{3}$$

derivando 1 respecto al tiempo dos veces, se tiene:

$$\dot{z}(t) = \dot{y(t)} + \omega\delta cos(\omega t)$$

$$\ddot{z}(t) = \ddot{y(t)} - \omega^2 \delta sem(\omega t) \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (3):

$$M\ddot{y(t)} - M\omega^2\delta sem(\omega t) + b\dot{y(t)} + ky(t) = 0$$

$$M\ddot{y(t)} + b\dot{y(t)} + ky(t) = M\omega^2\delta sem(\omega t)$$

dejando $\ddot{y(t)}$ sólo:

$$\ddot{y(t)} + \frac{b}{M}\dot{y(t)} + \frac{k}{M}y(t) = \omega^2\delta sem(\omega t)$$

Con esto hemos llegado al movimiento de un forzado, por lo que reconociendo los elementos de la ecuación queda que $\tau = M/b$, $\omega_0^2 = k/M$, $F_0/M = \delta\omega^2$, por lo que el comportamiento estacionario está definido por:

$$y_{est}(t) = \frac{\delta\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - k/M)^2 + (\omega/\tau)^2}} sen(\omega t - \beta)$$

$$tg(\beta) = \frac{w}{\frac{M}{B}(w^2 - k/M)}$$

P2. a)
Tal como se vio en clases la ecuación de ondas está definada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{5}$$

Entonces para verificar la ecuación de ondas sólo hay que reemplazar $y(x,t) = 4sen(2x - 3t)$ en la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 4cos(2x - 3t) * -3 = -12cos(2x - 3t)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -12 * (-sen(2x - 3t)) * -3 = - - 36sen(2x - 3t)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4cos(2x - 3t) * 2 = 8cos(2x - 3t)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 8(-sen(2x - 3t)) * 2 = -16sen(2x - 3t)$$

Entonces:

$$-36sen(2x - 3t) = -c^2 16sen(2x - 3t) \Rightarrow c^2 = 9/4$$

*Notar que la ecuación de ondas nos plantea una solución (una función que depende de x y t), las soluciones con las que se trabajará en este curso son:

- **Sol 1 - D' lambert:** $f(x - ct) + g(x + ct)$ [una función genérica cualquiera]
- **Solución 2:** $Asen(kx - \omega t)$ [k es el vector de onda, $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$]

Si reescribimos $4sen(2x - 3t) = 4sen(2(x - 3/2t))$ queda como la solución D'lambert donde $c = 3/2$. Además de la solución 2 queda que $c = \omega/k \Rightarrow c = 3/2$. Por lo tanto se satisface la ecuación de ondas.
b)

Es importante notar que en la solución de la ecuación de ondas cuando los signos que acompañan a x y t son distintos, entonces el pulso se mueve a la derecha. Si los signos son iguales entonces el pulso se mueve a la izquierda.

- $f(x - ct) \Rightarrow$ Derecha
- $g(x + ct) \Rightarrow$ Izquierda

Entonces para el caso del problema el pulso se mueve a la derecha. Una forma de comprobarlo (si es que no creen) es ver dónde está el pulso en un $t = 0$ y en un $t = 1$ para lo que utlizaremos una altura $y = 0$.

$$y(x,0) = 4sen(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 2n\pi \Rightarrow x = n\pi$$
$$y(x,1) = 4sen(2x - 3) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 2n\pi \Rightarrow x = 3/2 + n\pi$$

Es decir el pulso se mueve a la derecha.

c)

Como vimos arriba longitud de onda $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/2 = 3{,}144[m]$, frecuencia $f = \omega/2\pi = 3/2\pi = 0{,}77[Hz]$, Periodo $T = 1/f = 2{,}096$

d)

Para la velocidad máxima hay que derivar la ecuación y encontrar el máximo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 4cos(2x - 3t) * -3 = -12cos(2x - 3t)$$

Como $cos(x)\epsilon[-1, 1]$, entonces la velocidad máxima será 12 m/s

P3.

Notar que el gusanito se mueve a 2,5 cm/s y está a 2,5 cm de uno de los extremos, por lo que tiene 1 s para escapar.

Por otro lado hay que determinar la velocidad del pulso que en una cuerda se determina como $v_{pulso} = \sqrt{T/\rho}$, donde T es la tensión de la cuerda y ρ es la densidad de la cuerda.

$$\rho = \frac{masacuerda}{largo} = \frac{0{,}25}{25} = 0{,}001\ kg/m$$

La tensión está generada por la masa colgada $M = 10\ kg$, donde al estar en equilibrio nos queda:

$$T - Mg = 0 \Rightarrow T = Mg = 10 * 10 = 100$$

Reemplazando T y ρ para determinar la velocidad del pulso, queda $v_{pulso} = \sqrt{T/\rho} = \sqrt{100/0{,}01} = 100\ m/s$. Como el pulso se genera a 5 m de un extremo se tiene que el tiempo que demora en llegar al otro extremo será.

$$t = \frac{20}{100} = 0{,}2\ s$$

Es decir el gusanito no alcanza a escarpar.

P4.

Siempre en una cuerda la velocidad será $v = \sqrt{T/\rho}$, Con T tensión y ρ densidad.

Notar que la tensión de la cuerda depende de la posición en que nos encontremos, siendo mínima (cero) en el extremo. Por lo que tomaremos un pedacito de cuerda, donde las únicas fuerzas que actúan son la Tensión, ya que se ha despreciado el efecto de la gravedad. Es decir:

$$dT = dF$$

Se pone dT y dF, ya que vamos a ver como es la tensión en un espacio infinitesimal, es decir para casos anteriores teníamos $T = F = Ma$, ahora quedará:

$$dT = dF = dMa$$

Donde a es la acelaración centrípeta $a_c = \omega^2 x$ (x será la posición de la cuerda donde nos encontramos). Además $dM = \rho dx$ (es la masa en un espacio pequeño donde ρ es la densidad, dx el espacio infinitesimal). Luego:

$$dT = \omega^2 \rho x dx$$

Para saber como se comporta la tensión en toda la cuerda nos queda integrar, entonces:

$$T(x) = \int_x^L dT = \omega^2 \rho \int_x^L x dx = \omega^2 \rho \frac{x^2}{2}|_x^L = \omega^2 \rho (L^2 - x^2)/2$$

Finalmente $v = \sqrt{T/\rho} = \sqrt{\omega^2(L^2 - x^2)/2}$

P5.

Notar que al haber distinta densidad, entonces se tienen velocidades distintas en cada trozo de la cuerda. La tensión en ambas está definida como:

$$T - Mg = 0 \Rightarrow T = Mg$$

Luego:

$$c_1 = \sqrt{T/\rho} = \sqrt{Mg/R}$$
$$c_2 = \sqrt{T/\rho} = \sqrt{Mg/2R}$$

Con esto notamos que c_1 es más rápido, por lo que el tiempo que demora el pulso de la izquierda en llegar al centro de la cuerda, será:

$$t_1 = L/c_1 = \frac{L}{\sqrt{Mg/R}} = L\sqrt{\frac{R}{Mg}}$$

ahora en este mismo tiempo t_1 veremos cuánto ha avanzado el pulso de la derecha, es decir:

$$d = t_1 c_2 = L\sqrt{\frac{R}{Mg}}\sqrt{Mg/2R} = L/\sqrt{2}$$

El pulso de la izquierda se encuentra en el trozo de la cuerda donde la densidad es igual a $2R$, es decir ambos están en el mismo medio, por lo que donde se encuentran ambos pulsos será el punto medio:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{L+(2L-L/\sqrt{2})}{2}$$

Recomendaciones: Si tienen tiempo lean el libro Física para la Ciencia y Tecnología Vol 1 y 2 (Tipler - Mosca) que está en la web. Si bien la dificultad de los ejercicios de ahí es menor a la de los controles, les servirá para que tengan más claros algunos conceptos.