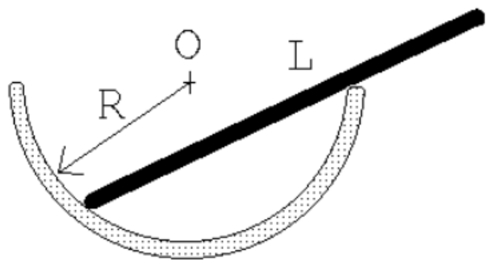
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Fisica
FI1002-5 Sistemas Newtonianos

# Pauta P4 Aux. 3- Unidad 4A

Profesor: Rene Garreaud
Auxiliares: Mauricio Carcamo, Ariel Figueroa, Carlos Mardones

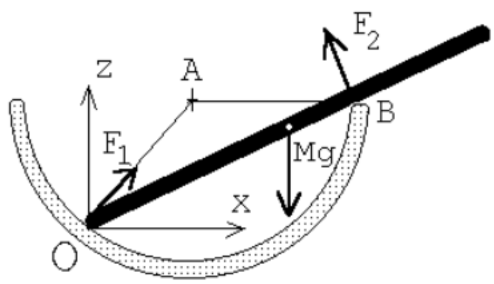
---

**P4.** Encuentre la posición de equilibrio de una varilla de largo L colocada dentro de un pocillo. Considere al pocillo como una semiesfera de radio R y asuma que entre éste y la varilla no hay roce.




## Pauta

Lo primero que se debe hacer es ver qué fuerzas están actuando en el sistema:

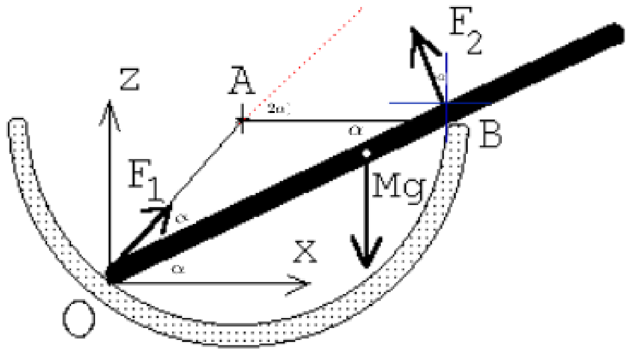



Es decir:

**-Fuerza de gravedad** que ejerce la barra sobre su centro de masa, es decir sobre la mitad de la barra (Mg).

**-Fuerzas de contactos** que actúan **perpendicular** al contacto, en este caso $F_1$ actúa perpendicular a la superficie del círculo, es decir apunta hacia el centro y $F_2$ es perpendicular a la barra.

La principal dificultad de este ejercicio es geométrica. Primero que todo notamos que OAB es un triángulo isósceles de ángulos $\alpha$. Además hacemos la proyección de la recta OA donde dicho ángulo será $2\alpha$. Por último $\alpha$ se repite en $F_2$ de la siguiente forma:




Para encontrar la posición de equilibrio de la varilla, utilizaremos las dos condiciones de estática, es decir:

$(1)\sum F = 0$

$(2)\sum \tau = 0$

Las fuerzas en el eje $\hat{x}$ :

$$F_1 cos(2\alpha) - F_2 sen(\alpha) = 0 \tag{1}$$

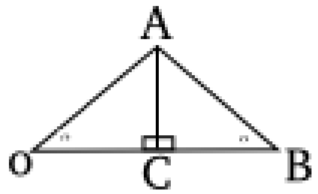
Las fuerzas en el eje $\hat{z}$:

$$F_1 sen(2\alpha) + F_2 cos(\alpha) - Mg = 0 \tag{2}$$

Para el torque veremos la posción de la varilla $r_v$. donde x será la posción donde se está ejerciendo la fuerza.

$$r_v = xcos(\alpha)\hat{x} + xsen(\alpha)\hat{z}$$

Como el origen es O. Las fuerzas que ejercen torque serán $Mg$ y $F_2$, entonces para $Mg$, x será igual L/2. Sin embargo para $F_2$ se tiene:




Al ser OAB isósceles, se tiene que la bisectriz es igual a la altura, por lo que la recta $CB = x/2$. Luego:

$cos(\alpha) = x/2 * R \Longrightarrow x = 2Rcos(\alpha)$

Ahora veremos el producto cruz:
$\tau_{Mg} = r_v X F_{Mg} =$

$$\begin{bmatrix} - & \hat{x} & \hat{z} \\ r_v & L/2cos(\alpha) & L/2sen(\alpha) \\ F_{Mg} & 0 & -Mg \end{bmatrix} = -MgL/2cos(\alpha)$$

$\tau_{F_2} = r_v X F_2 =$

$$\begin{bmatrix} - & \hat{x} & \hat{z} \\ r_v & 2Rcos(\alpha) * cos(\alpha) & 2Rcos(\alpha) * sen(\alpha) \\ F_2 & -F_2 sen(\alpha) & F_2 cos(\alpha) \end{bmatrix} = (2F_2Rcos(\alpha) * cos(\alpha)^2 + 2F_2Rcos(\alpha) * sen(\alpha)^2) = 2F_2Rcos(\alpha)$$

entonces la sumatoria de torques nos queda:

$$2F_2Rcos(\alpha) - MgL/2cos(\alpha) = 0 \tag{3}$$

De esta última ecuación (3) despejamos $F_2 = \frac{MgL}{4R}$. De la ecuación (1) se tiene que $F_1 = \frac{F_2 sen(\alpha)}{cos(2\alpha)}$. Reemplazando esto último en (2) queda que:

$$F_2 \frac{sen(\alpha)}{cos(2\alpha)} sen(2\alpha) + F_2 cos(\alpha) = Mg$$

de (3)

$$\frac{MgL}{4R}(tg(2\alpha)sen(\alpha) + cos(\alpha)) = Mg$$

$$\frac{4R}{L} = (tg(2\alpha)sen(\alpha) + cos(\alpha))$$

Si llegan hasta aquí está bien, ya que encontramos una relación con al ángulo $\alpha$. Lo que sigue se hace con las siguientes relaciones trigonométricas (que no tienen que saberlas).

$$tg(2\alpha) = \frac{2sen(\alpha)cos(\alpha)}{cos(\alpha)^2 - sen(\alpha)^2 2}$$
$$sen(\alpha)^2 = 1 - cos(\alpha)^2$$

Reemplazando estas relaciones en la última ecuación y un poco de álgebra queda:

$$\frac{4R}{L} = \frac{cos(\alpha)}{(2cos(\alpha)^2 - 1)}$$

y resolver la ecuación de segundo grado para $cos(\alpha)$