



Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Magallanes

Diseño de Controladores I.

Apuntes del curso de Control Automático

Roberto Cárdenas Dobson

*Ingeniero Electricista Msc. Ph.D.
Profesor de la asignatura*

Este apunte se encuentra disponible en la página web <http://ona.fi.umag.cl/~rcd>

I. Controladores “Tradicionales”

Los controladores utilizados en forma industrial son los controladores proporcional (P), proporcional integral (PI) y el proporcional integral derivativo (PID). Estos controladores se pueden explicar en mejor forma tomando en cuenta el lazo de control que se muestra en la siguiente figura:

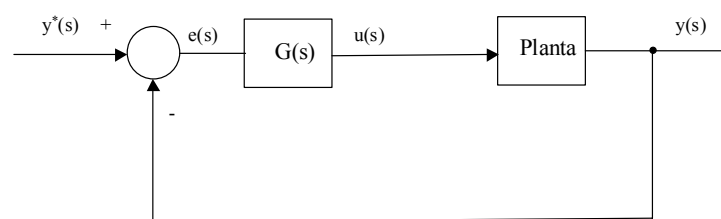


Figura 1. Lazo de control típico.

Al utilizar el controlador P, la salida $u(s)$ es proporcional al error $e(s)$ de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$u(s) = K_p e(s) \quad (1)$$

El controlador P no cambia la forma del lugar de la raíz (condición de ángulo). Además, un controlador P no entrega cero error en estado estacionario (a entrada escalón) para plantas tipo cero. Como ya se ha discutido anteriormente, el controlador PI utiliza un polo en el origen. La función de transferencia para un controlador PI puede escribirse como:

$$u(s) = K_p e(s) + \frac{1}{T_i s} e(s) \quad (2)$$

Donde a T_i se le denomina constante de tiempo integral y K_p es la constante proporcional. El controlador PI entrega cero error en estado estacionario a entrada escalón para plantas tipo cero (o superior). El controlador PI se discutió en el apunte anterior.

Existe otro controlador que es utilizado extensamente en forma industrial. Este es el controlador proporcional integral derivativo (PID). El controlador PID puede representarse por la siguiente ecuación:

$$u(s) = \left(K_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(s) \quad (3)$$

Este controlador tiene tres grados de libertad, K_p , T_i y T_d , **lo que permite colocar dos ceros en cualquier lugar dentro del plano complejo**, mas un polo en el origen. La función de transferencia puede escribirse como:

$$u(s) = K_p \frac{(s^2 + as + b)}{s} \quad (4)$$

Donde a y b son ajustados variando la constante de tiempo integral y derivativo. La principal ventaja de un controlador PID es que puede ser utilizado para compensar plantas con polos complejos mal amortiguados. Suponga que se tiene una planta cuya función de transferencia es dada por:

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)(s^2 + 1.4s + 100)} \quad (5)$$

Esta planta es difícil de compensar apropiadamente utilizando controladores PI. Esto se debe a que no es apropiado compensar polos complejos utilizando solo elementos reales, como es el cero introducido por el controlador PI. Esto se muestra en mayor detalle en Fig. 2.

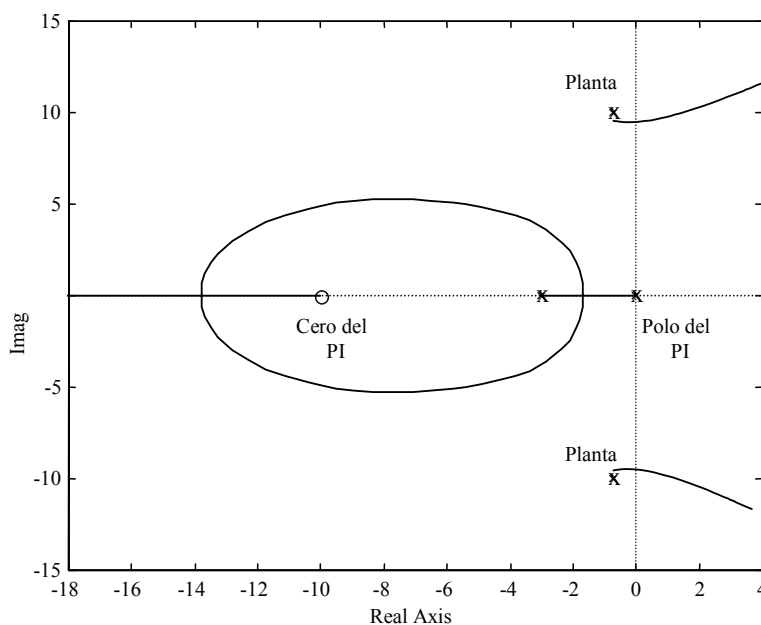


Figura 2. Diagrama de la raíz considerando la planta dada por (5)+controlador PI.

Como se muestra en la figura anterior, los polos complejos tienen muy poco factor de amortiguamiento y el lugar de la raíz se desplaza, casi inmediatamente, hacia el semiplano derecho.

Diseñando adecuadamente un controlador PID, se pueden cancelar los polos inestables, obteniéndose el siguiente lugar de la raíz:

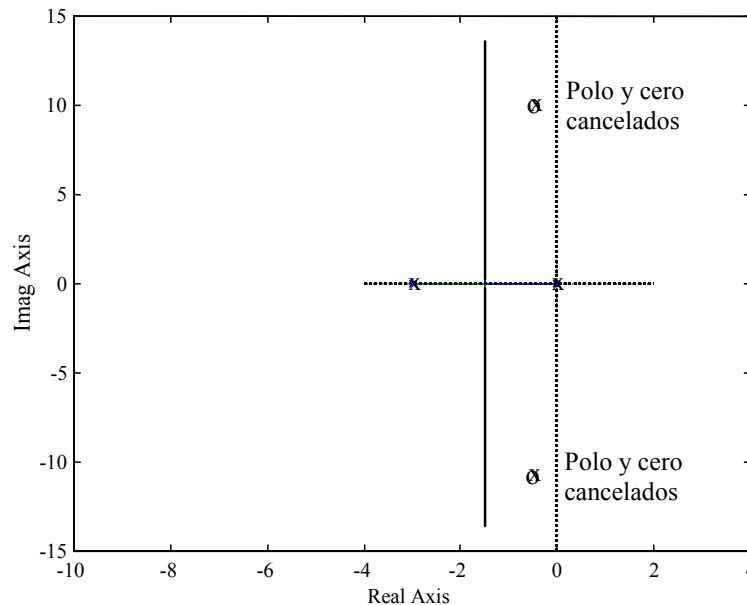


Figura 3. Lugar de la raíz considerando la planta de (5)+ controlador PID.

Esto significa que el controlador PID utilizado es:

$$G_c(s) = K_p \frac{(s^2 + 1.41s + 100)}{s} \quad (6)$$

Esta no es una buena elección de controlador debido a que el numerador tiene mayor grado que el denominador. Si se implementara un controlador como éste su ganancia en el dominio de la frecuencia sería la mostrada en la Fig. 4. Puede observarse en esta figura, que un controlador, como el de (6), tiene ganancia casi infinita a altas frecuencias.

En general **cualquier controlador utilizado debe tener un número de polos mayor o igual que el número de ceros**. El controlador de (6) debe ser corregido a por ejemplo:

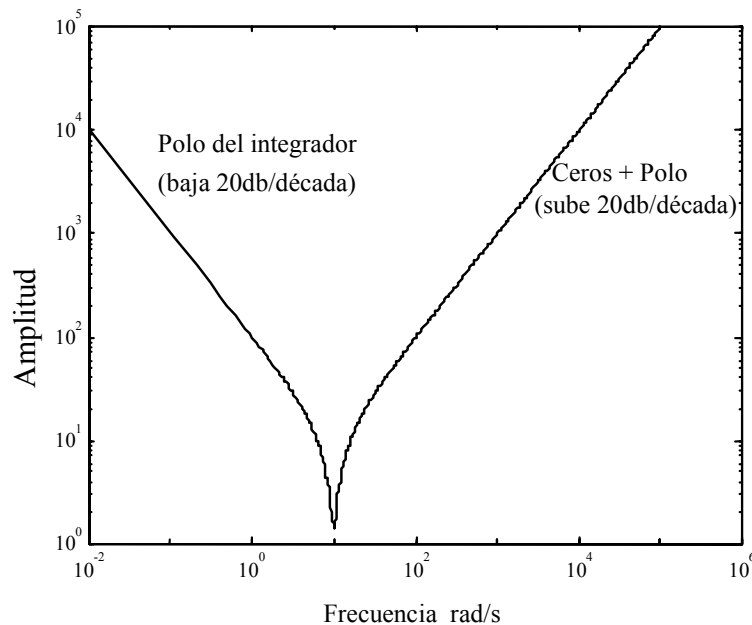


Figura 4. Amplitud y frecuencia para el PID de (6)

$$G_c(s) = K_p \frac{(s^2 + 1.41s + 100)}{s(s + 30)} \quad (7)$$

Colocando un polo extra a lazo abierto, relativamente alejado de los polos dominantes no se afecta mayormente el lugar de la raíz pero se reduce considerablemente la amplificación del ruido de alta frecuencia. Esto se muestra en la Fig. 5.

Cuando utilice un PID recuerde que no se pueden cancelar polos de lazo abierto que estén ubicados en el semiplano derecho.

I.1 Antiwinding Up

En los sistemas de control, la energía está limitada físicamente por los actuadores o la capacidad del sistema. Por ejemplo la corriente de un devanado debe ser limitada para evitar sobrecalentamientos, el voltaje máximo a aplicar depende de las especificaciones de los dispositivos de electrónica de potencia, la energía a aplicar a un sistema está dado por las capacidades de tuberías, transformadores, etc. Es decir existen límites que deben ser

considerados en el diseño de un sistema de control. La Fig. 6 muestra la representación de un limitador en un sistema de control.

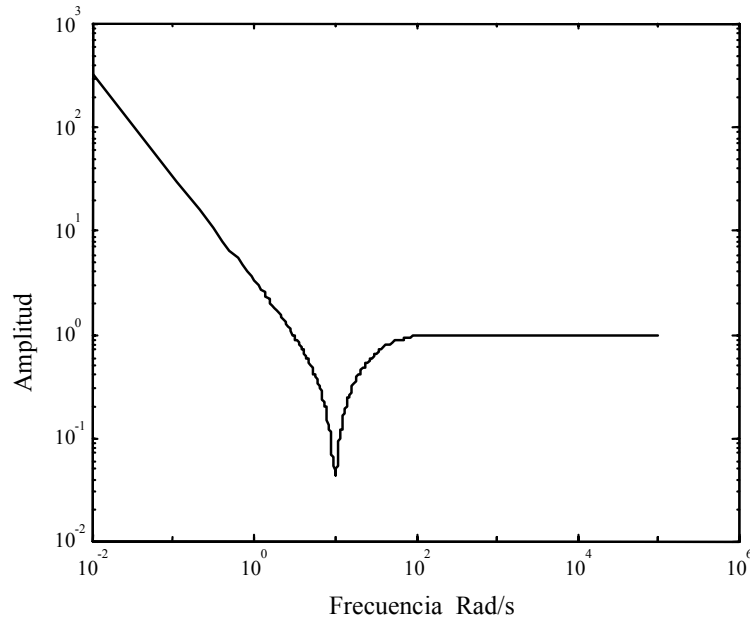


Figura 5. Amplitud vs. Frecuencia para el PID de (7).

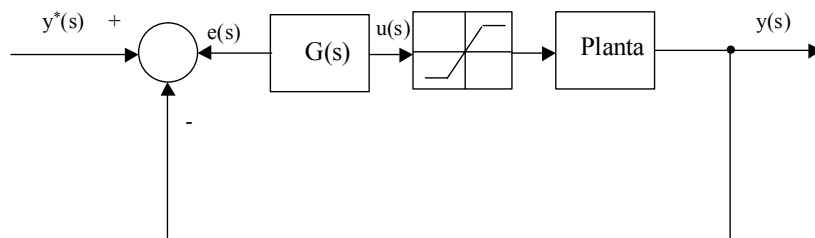


Figura 6. Lazo de control típico considerando limitador.

El símbolo mostrado en la Fig. 6, indica que la entrada de la planta está limitada entre un valor máximo y mínimo. En todos los otros casos la entrada a la planta es igual a la salida del controlador. El controlador PI y en general todos los controladores que consideran elementos integrales pueden tener mal desempeño al ser utilizados con limitadores. Esto se explica a continuación.

La ecuación de un controlador PI, en el dominio del tiempo, puede escribirse como:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \approx K_p e(t) + \frac{1}{T_i} \sum e(t) \Delta t \quad (9)$$

Como es bien conocido, una integral puede aproximarse a una sumatoria. Esto significa que el elemento integral no puede cambiar bruscamente su salida. Por ejemplo si la salida de la componente integral del controlador alcanza un valor tres veces mayor que el máximo permitido en la planta, reducir esta salida necesitará un tiempo, algunas veces considerable, hasta que la sumatoria esté en el rango de operación permitido.

Por ejemplo suponiendo una planta dada por:

$$G(s) = \frac{10}{s+10} \quad (10)$$

El rango de operación a la entrada de la planta está entre -10 y 10 (unidades). Suponga que se diseña un controlador PI considerando $\omega_n=300$, $\zeta=0.707$. Uno de los controladores posible es:

$$G_c(s) = 41.83 \frac{(s + 212.13)}{s} \quad (11)$$

El sistema de control se implementa en SIMULINK de acuerdo a lo mostrado en la Fig. 7. Un escalón de entrada entre 0 a 5 se aplica en $t=0.1$. Figuras 8,9 y 10 muestran la salida del controlador y la entrada a la planta, la evolución del error y la salida del sistema respectivamente.

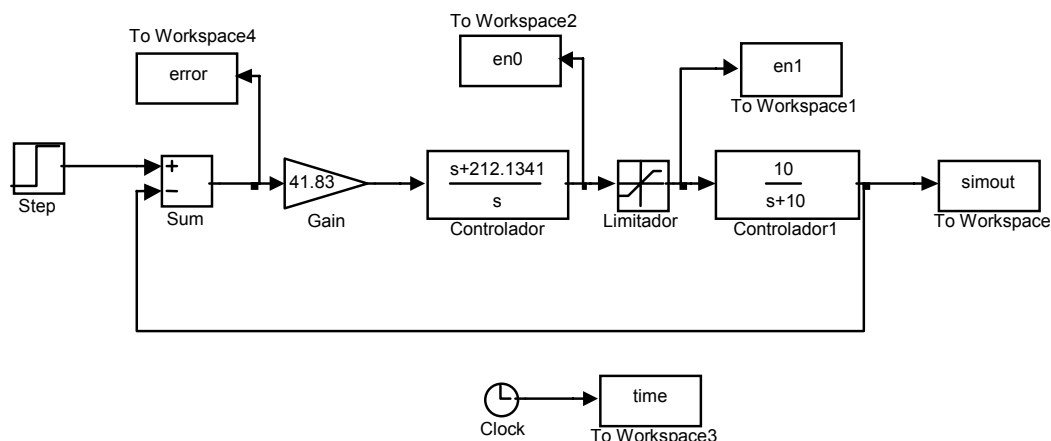


Figura 7. Sistema de control considerando la planta+PI.

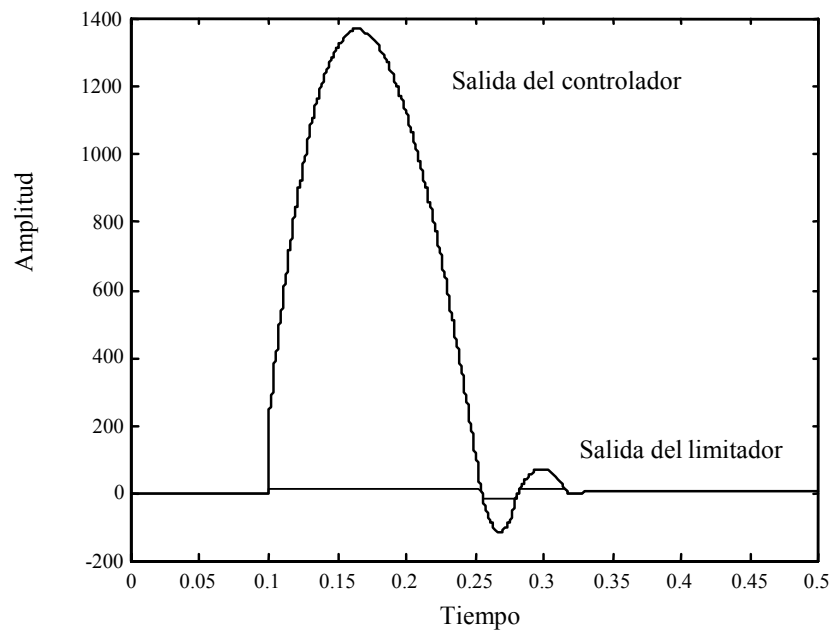


Figura 8. Salida del controlador y entrada a la planta.

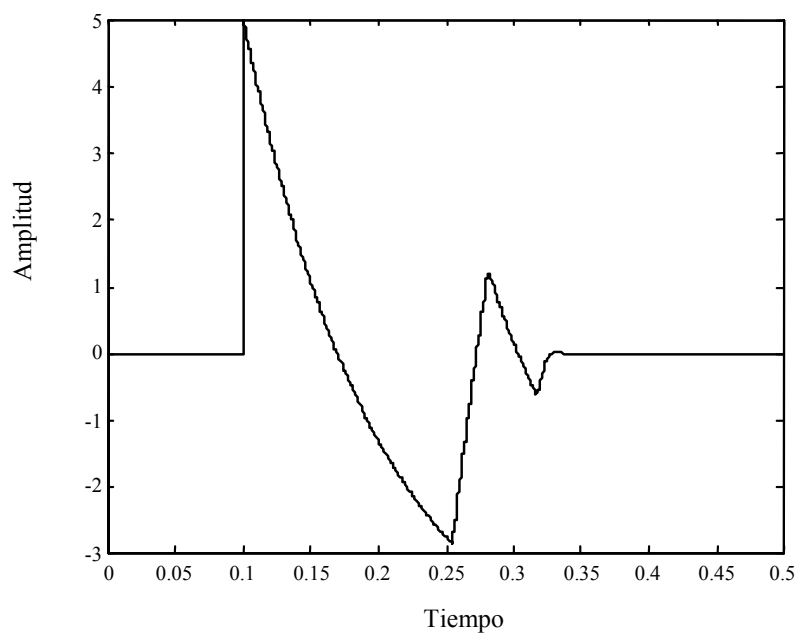


Figura 9. Evolución del error.

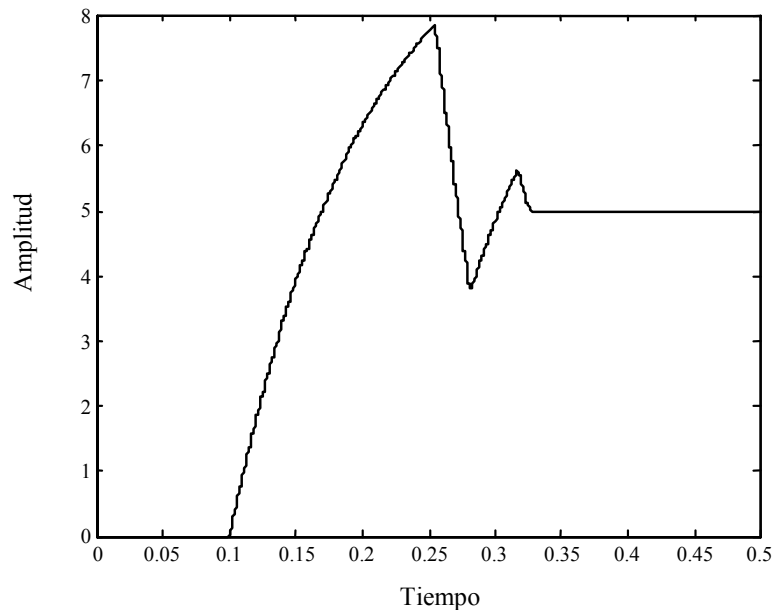


Fig. 10. Salida del sistema de control (ver Fig. 7).

Como muestra la Fig. 8, la salida del controlador esta muy por encima del máximo permitido durante aproximadamente 0.15 seg. Durante este tiempo se le esta aplicando a la planta la entrada máxima a pesar de que el error se hace negativo (en $t \approx 0.18$ Seg.). Esto se debe a que la salida del elemento integral se encuentra muy por encima del límite superior y su valor no cambia instantáneamente.

Para evitar los problemas relacionados con el integrador se utiliza ‘anti winding up’, lo que significa que el integrador se detiene cuando la salida del controlador esta fuera de rango. Fig. 11 muestra el sistema de control de la Fig. 7 considerando antiwinding up. En este caso el controlador PI se ha dividido en dos partes. La parte proporcional y la parte integral. La entrada al componente integral se multiplica por uno o cero, dependiendo si la salida del controlador esta en el rango permitido a la entrada de la planta. La función $f(u)$ utilizada en la figura es una función lógica de la forma:

$$f(u) = (u < \max) * (u > \min) \quad (12)$$

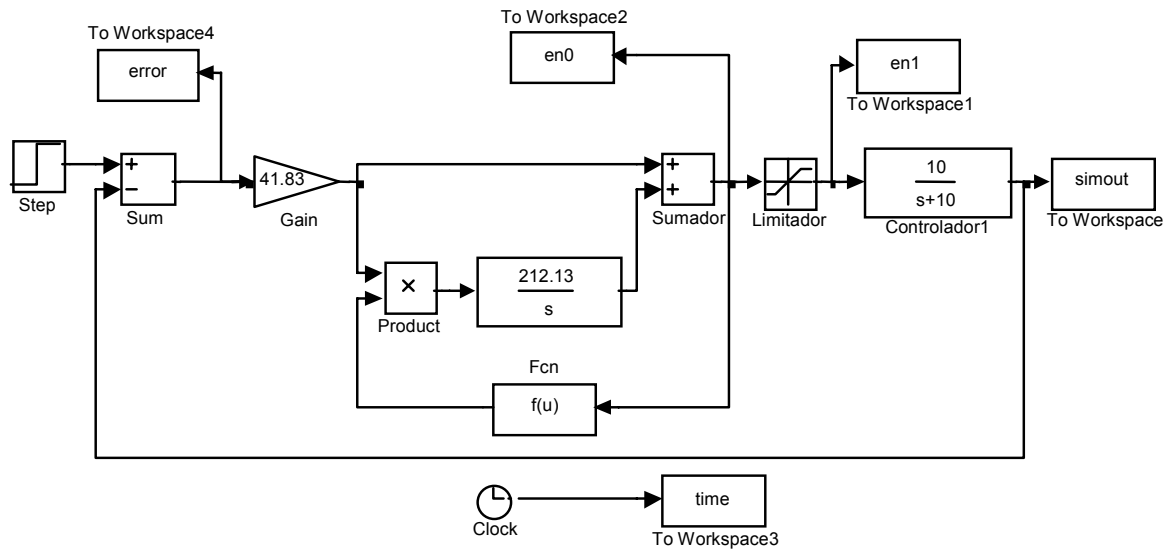


Fig. 11. Lazo de control considerando antiwinding-up.

Aunque otras funciones pueden ser utilizadas. La función $f(u)$ de (12) toma el valor uno cuando $u(t)$, la salida del controlador, esta en el rango $[\min, \max]$. En todo otro caso $f(u)$ toma el valor cero. Fig. 12 muestra la salida del controlador y la entrada de la planta, Fig. 13 muestra la evolución del error y finalmente Fig. 14 muestra la salida del sistema.

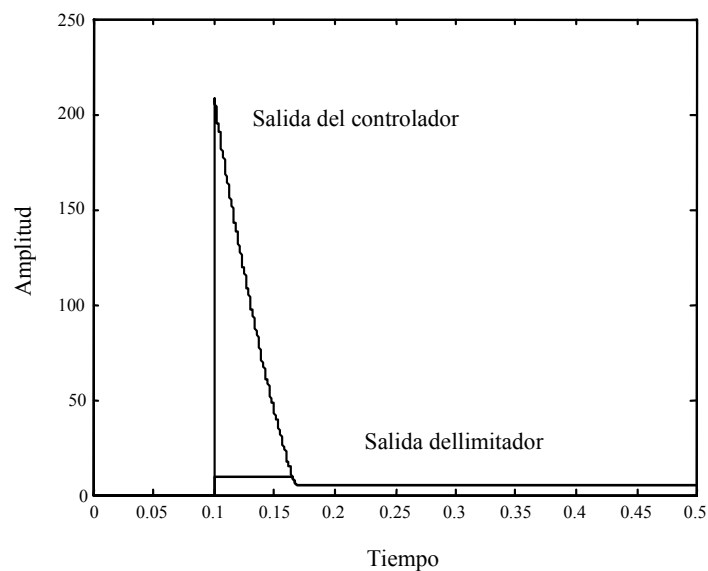


Fig. 12. Salida del controlador y entrada a la planta cuando se considera antiwinding up.

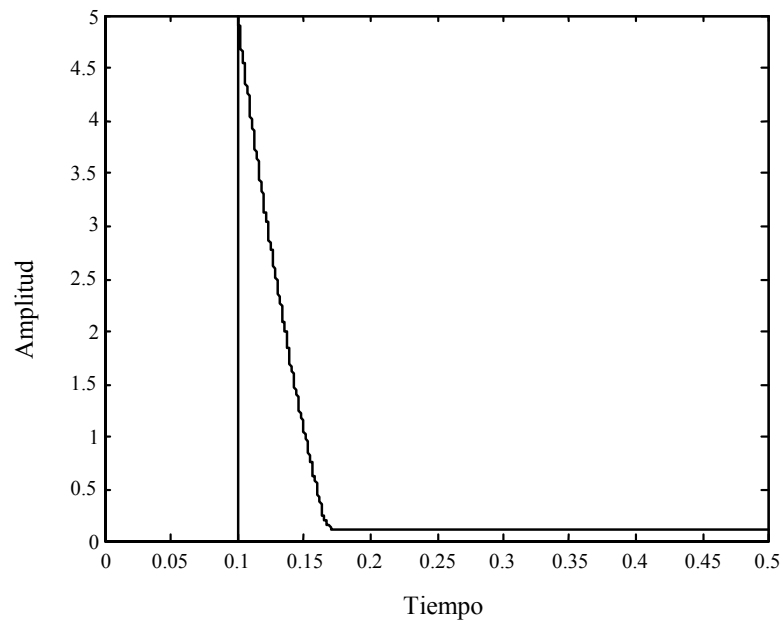


Figura 13. Evolución del error.

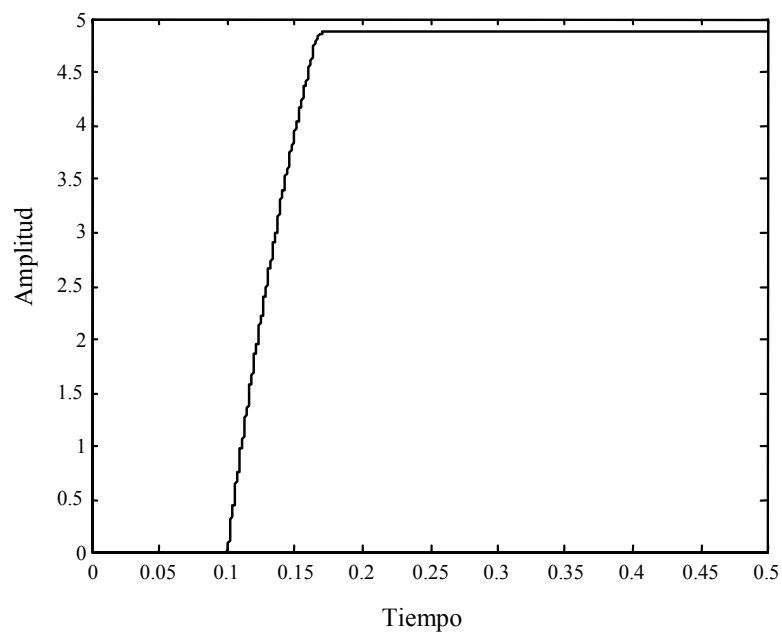


Fig. 14. Salida del sistema.

Como muestra la Fig. 11, la salida del controlador nuevamente alcanza valores superiores a los permitidos por la planta (los cuales son recortados por el limitador), pero esto se debe a la

amplificación del error efectuado por la constante proporcional del controlador ($K_p e(t)$). El integrador nunca se encuentra operando fuera del rango de entrada de la planta.

Dado que la parte proporcional del controlador puede cambiar instantáneamente su salida, no existen mayores retardos en la operación de este controlador y no existe error negativo (compare con lo mostrado en la Fig. 9). Además, la salida alcanza a la referencia de entrada en $t \approx 0.17s$. Cuando el sistema no considera antiwinding up, el valor es $t \approx 0.35s$.

II. Compensación Generalizada.

Hasta el momento el alumno podría tener la impresión equivocada que los únicos controladores que existen son el P, PI y PID. Esto no es exacto. Al menos en teoría no existen límites al momento de implementar un compensador, y se pueden implementar controladores con muchos ceros y polos (inteligentemente ubicados por supuesto). En general los elementos de compensación se dividen en:

- Redes en atraso (lag).
- Redes en adelanto (lead).
- Redes en atraso-adelanto, adelanto-atraso (lag-lead, lead-lag).

El concepto de redes de adelanto o atraso se deriva de la condición de ángulo del lugar de la raíz. Suponga que usted necesita que los polos de lazo cerrado pasen por un punto determinado en el plano s. Utilizando la Fig. 14, y la condición de ángulo, podemos ver que para tener lugar de la raíz en el punto deseado, se necesita que:

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pm 180 \quad (13)$$

Si es que la condición de ángulo no se cumple, se debe agregar o substraer fase de (13). En el caso de la Fig. 14 se debe agregar fase, lo que significa incorporar un elemento que tenga fase positiva. En otras palabras una malla en adelanto.

La malla en adelanto tiene la siguiente función de transferencia:

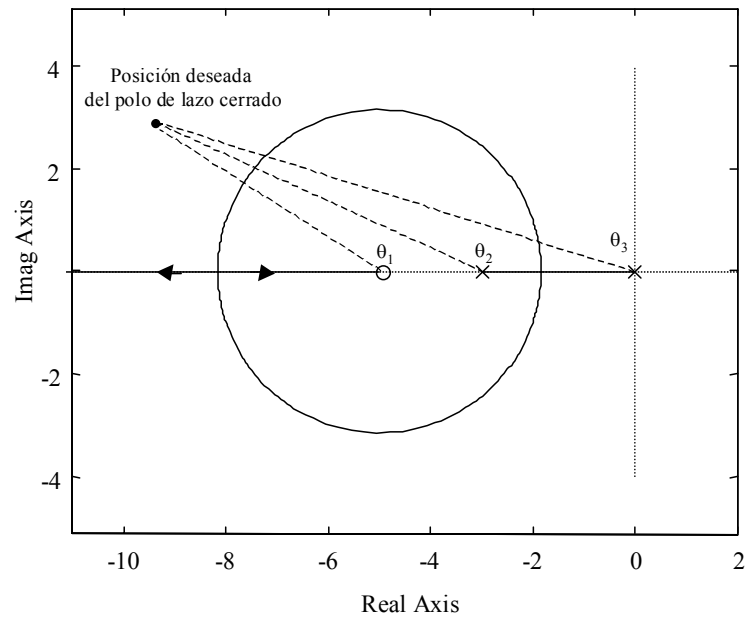


Fig. 14. Lugar de la raíz para polos y ceros.

$$G_{lead} = K \frac{(s + a)}{(s + b)} \quad (14)$$

con $b > a$. En el plano s la malla en adelante tiene la siguiente representación:

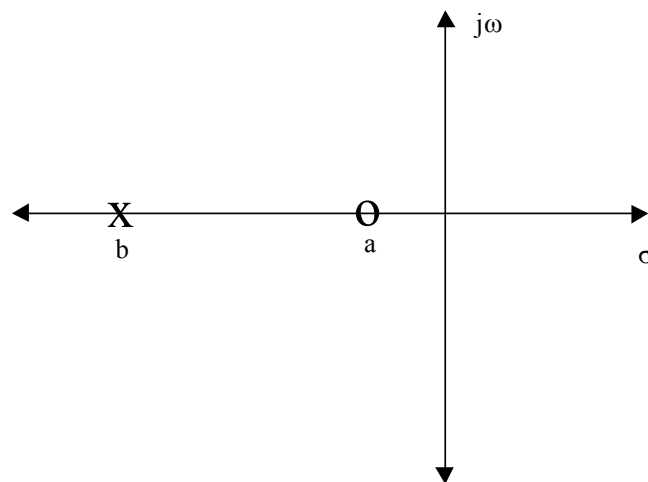


Fig. 15. Malla en adelante.

En general la malla en adelante amplifica el ruido en alta frecuencia por lo que la razón entre b/a debe ser pequeña (el polo no debe estar muy separado del cero). Valores típicos de b/a están

entre cinco a quince. La siguiente tabla muestra el máximo ángulo de fase que se puede obtener al utilizar una malla en adelanto:

Tabla I. Máximo ángulo a inyectar

Razón b/a	∞	10	5	3.33	2.5	2
Fase (grados)	90	54.9	41.8	32.6	25.4	19.5

Por lo tanto en algunas aplicaciones puede ser necesario utilizar mas de una malla en adelanto (si las condiciones de ruido lo permiten) para lograr la frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento deseadas.

Las mallas en atraso tienen idéntica representación que las mallas en adelanto, es decir:

$$G_{lead} = K \frac{(s + a)}{(s + b)} \quad (15)$$

Pero en este caso $a > b$. La malla en atraso en el plano s es la siguiente:

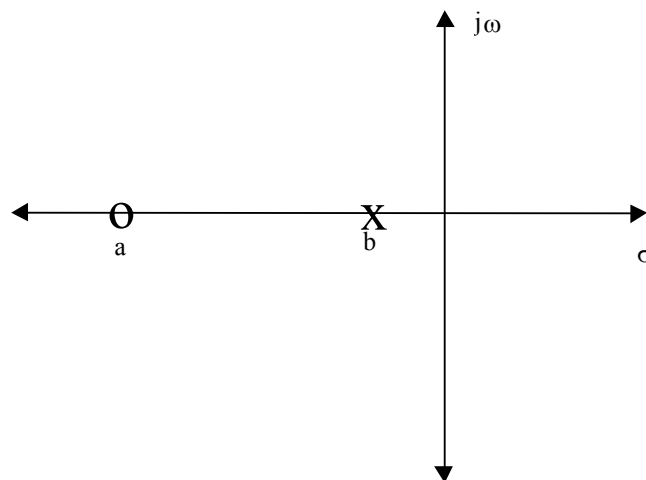


Fig. 15. Malla en adelanto.

En este elemento de compensación también se recomienda que el polo y el cero se encuentren cercanos. En general un polo desplaza el lugar de la raíz hacia el semiplano derecho (reduciendo la respuesta dinámica). Por este motivo se coloca un cero a la izquierda del polo, (en lo posible cercano a el), para aminorar la perdida de dinámica producida por el polo ubicado cerca del origen.

La malla en adelanto se utiliza para mejorar las condiciones dinámicas de un sistema, es decir mejorar la frecuencia natural, el tiempo de establecimiento, tiempo de subida etc. En cambio la malla en atraso se utiliza para mejorar el coeficiente de error. Por ejemplo el controlador PI es un caso especial de malla en atraso.

La compensación adelanto-atraso y atraso-adelanto se utiliza en algunos sistemas donde una sola malla no es suficiente para cumplir con las condiciones de lazo cerrado. En este tipo de compensación se utiliza, por ejemplo, una malla en atraso (o varias) para mejorar el error en estado estacionario y luego una malla en adelanto (o varias) para mejorar las características dinámicas del sistema a lazo cerrado. Esto se muestra en el siguiente ejemplo:

Se tiene la siguiente planta que debe ser controlada para entregar cero error en estado estacionario a entrada escalón, frecuencia natural superior a 20 rads^{-1} y coeficiente amortiguamiento de 0.8.

$$G(s) = \frac{10}{(s+3)(s+6)} \quad (16)$$

Para cumplir con la condición de cero error en estado estacionario lo primero que hacemos es insertar en cascada con la planta un controlador PI diseñado utilizando cancelación. La forma de este controlador es

$$G_{lag}(s) = K_p \frac{s+3}{s} \quad (17)$$

Con esta malla cancelamos el polo mas lento del sistema pero no podemos alcanzar la frecuencia natural con el coeficiente de amortiguamiento especificado. Para lograr los polos de lazo cerrado especificados necesitamos añadir una malla en adelanto cuya función de transferencia es:

$$G_{lead} = \frac{s+6}{s+32} \quad (18)$$

El lugar de la raíz queda entonces como se muestra en la Fig. 16.

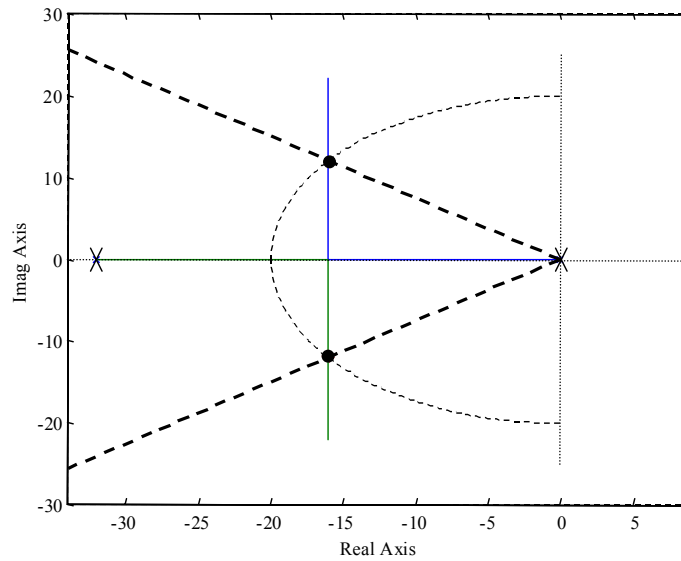


Fig. 16. Compensación lead-lag.

El controlado final se obtiene colocando en cascada la malla en adelante y la de atraso. Utilizando la ganancia obtenida desde MATLAB, el controlador final es:

$$G_c(s) = 40 \frac{(s+6)(s+3)}{(s+32)s} \quad (19)$$

Simulando el sistema en SIMULINK y aplicando un escalón en $t=0.1$, la respuesta a lazo cerrado es:

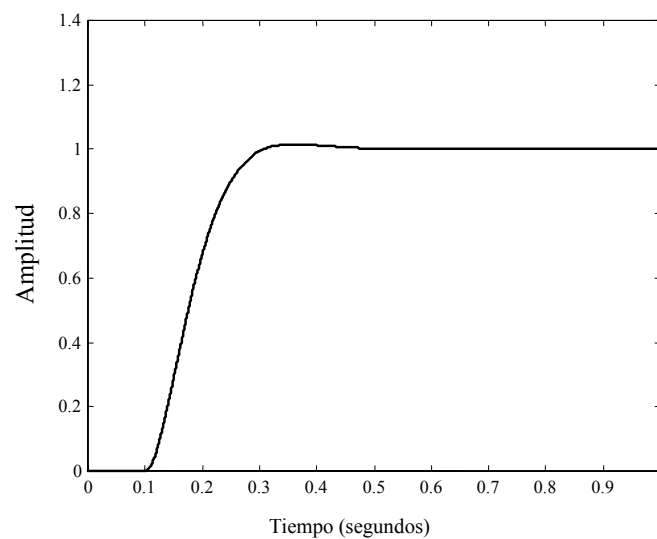


Fig. 17. Respuesta escalón del sistema con compensación lead-lag.

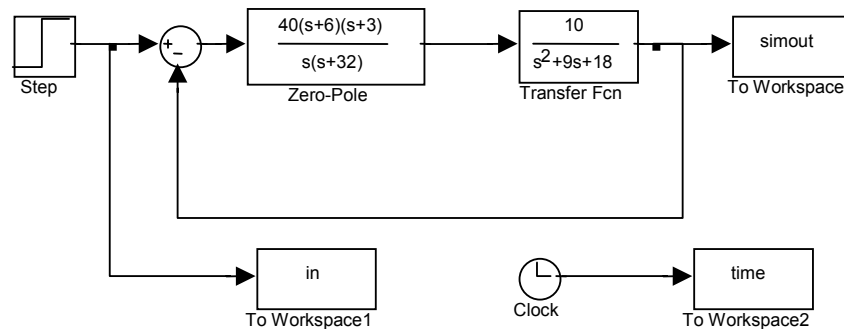


Fig. 17. Modelo de simulink utilizado para compensación lead-lag.

III. Retardos de Transporte

Un retardo de transporte esta definido, en el plano s, como:

$$G(s) = e^{-sT} \quad (20)$$

Donde T es el tiempo de retardo. Figura 18a y b muestra la respuesta escalón de una planta de primer orden sin considerar y considerando un retardo en cascada.

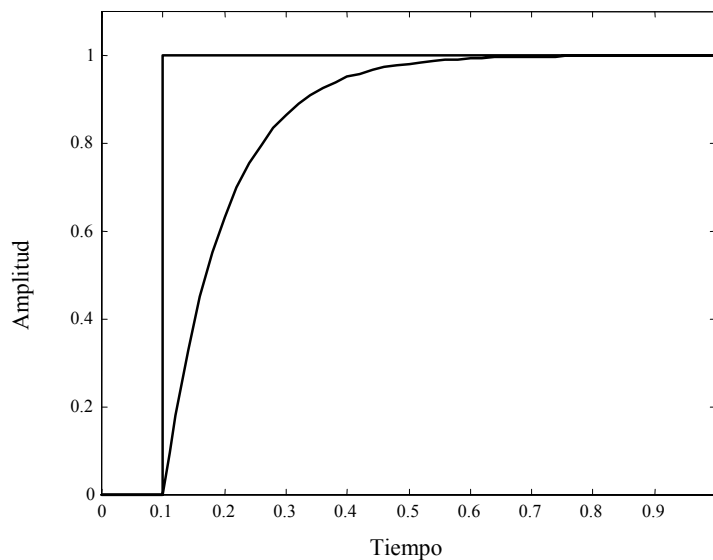


Fig. 18a. Respuesta escalón de una planta de primer orden sin considerar retardo.

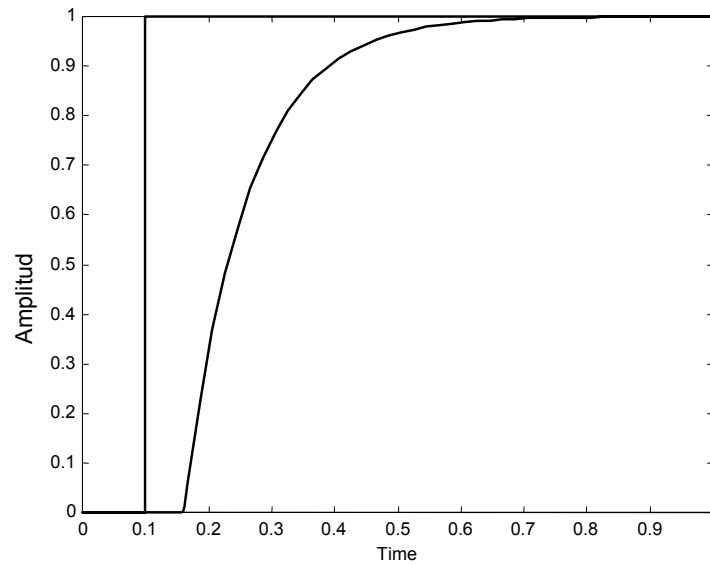


Fig. 18b. Respuesta escalón de una planta de primer orden considerando un retardo de 60ms.

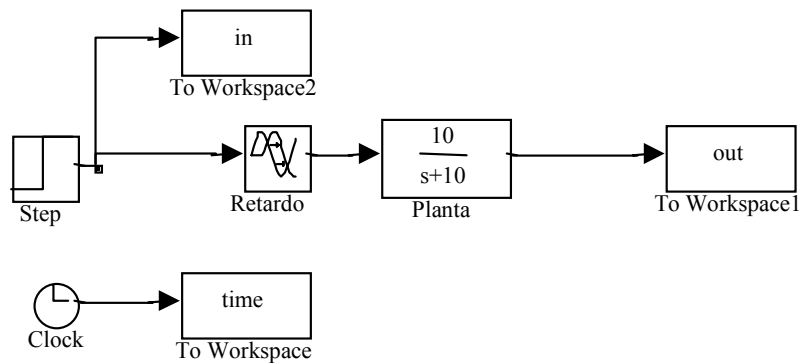


Fig. 18c. Modelo Simulink considerando la planta y el retardo de transporte.

Como se observa en la Fig. 18b, el sistema con retardo no responde instantáneamente a las excitaciones de entrada sino que retarda en T segundos su respuesta. Los retardos de transporte son comunes en los sistemas de control. En el ámbito de ingeniería eléctrica, los retardos de transportes son producidos por dispositivos como tiristores, choppers y otros elementos.

Al diseñar sistemas de control utilizando el método del lugar de la raíz los retardos deben ser implementados utilizando la aproximación de Padé. Por ejemplo, al utilizar Padé de primer orden, el retardo queda expresado como:

$$e^{-sT} = \frac{e^{-\frac{sT}{2}}}{e^{\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}} \quad (21)$$

Aproximaciones de Padé de mayor orden son posibles. MATLAB utiliza el comando 'pade(T,n)' para generar representaciones de Padé de orden n y T seg. de retardo en forma simple. De (21) podemos observar que la aproximación de Padé es una malla en adelante que, sin embargo, empeora las características dinámicas de un sistema. Esto se debe a:

- *Un polo en el semiplano izquierdo que desplaza el lugar de la raíz hacia el semiplano derecho.*
- *Un cero en el semiplano derecho que atrae el lugar de la raíz hacia ese semiplano.*

Por lo tanto un retardo desplaza el lugar de la raíz hacia el semiplano derecho disminuyendo la velocidad y estabilidad del sistema. Esto también es obvio si analizamos el sistema desde otro punto de vista. No es posible que un retardo, que disminuye la velocidad de respuesta del sistema, mejore las características dinámicas de este.

III.1 Errores en la Aproximación de Padé

La aproximación de Padé es válida solo cuando los retardos son pequeños. Para analizar el error cometido por la aproximación de Padé utilizaremos la transformada de Fourier y la identidad de Euler. La representación en modulo y ángulo de un retardo es:

$$\begin{aligned} e^{-j\omega T} &= \cos(\omega T) - j\sin(\omega T) \\ \text{Modulo} &= \sqrt{(\cos(\omega T))^2 + (\sin(\omega T))^2} = 1 \\ \text{Angulo} &= -\omega T \end{aligned} \quad (22)$$

En otras palabras un retardo no afecta al módulo de la respuesta pero si produce un retardo de fase.

La aproximación de Padé también tiene módulo unitario (vea (21)) pero su respuesta de fase es diferente a la de un retardo ideal. Figura 19 muestra el error de fase producida entre el retardo y la aproximación de Padé:

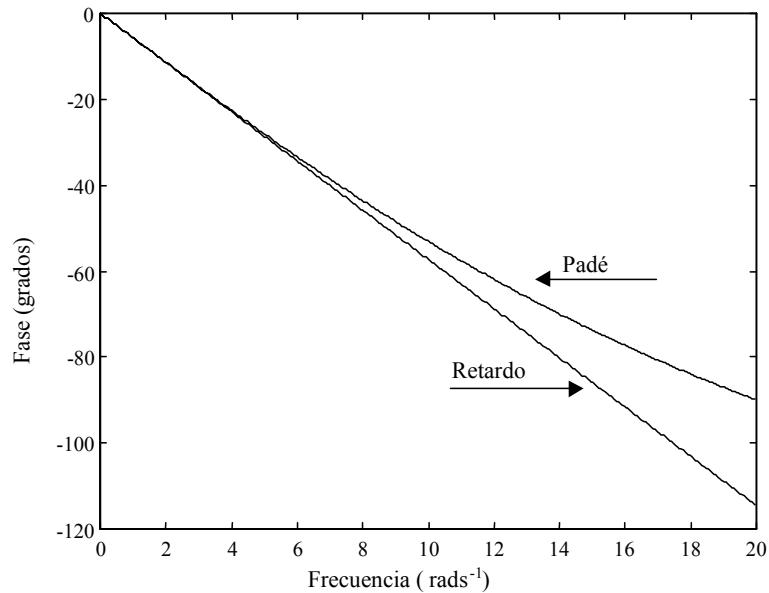


Fig. 19a. Fase del retardo ideal y de la representación de Padé.

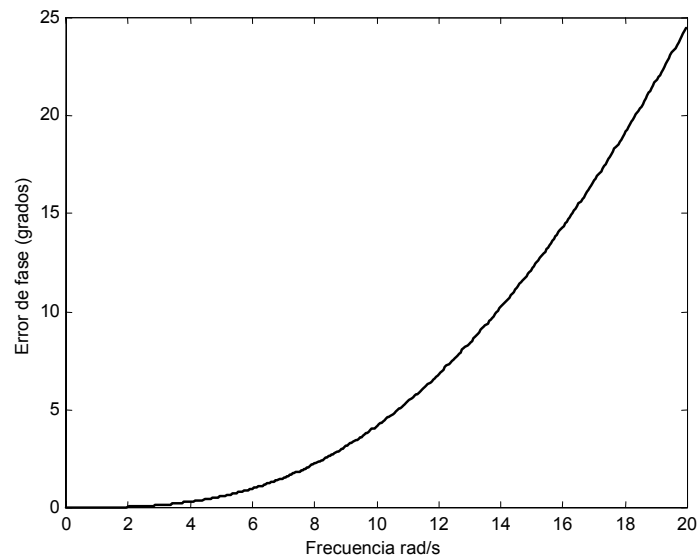


Fig. 19b. Error de fase producido por la representación de Padé.

Las curvas de la Fig. 19 fueron obtenidas utilizando un retardo de $T=100\text{ms}$. Puede observarse que para una frecuencia de 10rad/s^{-1} ($1/T$) el error es ligeramente menor a los 5 grados. Para

frecuencias mayores el error aumenta considerablemente. Este error puede disminuirse utilizando una aproximación de mayor orden, pero en general la aproximación de Padé es válida para retardos pequeños comparados con el ancho de banda.

Aunque se utilizara una representación exacta del retardo no es simple la tarea de diseñar sistemas de alta dinámica cuando se tienen retardos considerables. Representaciones exactas del retardo son posibles de utilizar al diseñar sistemas de control utilizando métodos como diagramas de Bode y Nyquist.

III.2 Diseño de Sistemas de Control Considerando Retardos.

Suponga que se quiere diseñar un controlador para el siguiente sistema:

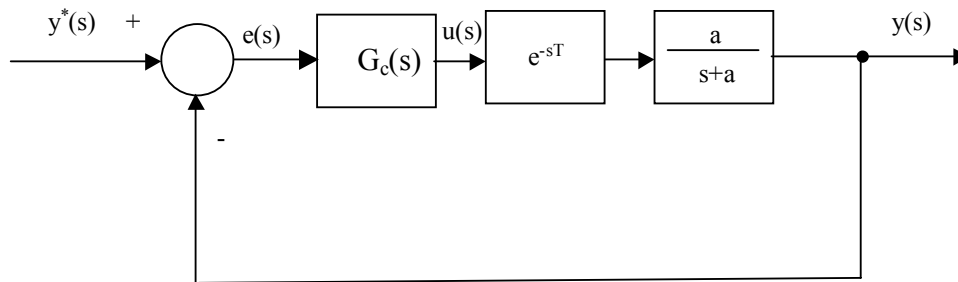


Fig. 20. Sistema de control considerando retardos.

La función de lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = G_c(s) e^{-sT} \frac{a}{s+a} \approx G_c(s) \frac{1-sT/2}{1+sT/2} \frac{a}{s+a} = -G_c(s) \frac{(-1+sT/2)}{(1+sT/2)} \frac{a}{(s+a)} \quad (23)$$

Ecuación (23) indica que al utilizar la aproximación de Padé, el compensador debe diseñarse utilizando el root locus para sistemas con ganancia negativa. Por ejemplo supongamos que se quiere diseñar un controlador para un sistema similar al mostrado en la Fig. 20. El valor de $a=20$ y el retardo de transporte es de 30ms. El sistema debe ser diseñado para cero error a estado estacionario, entrada escalón, frecuencia natural de 15 rads^{-1} y coeficiente de amortiguamiento de 0.8.

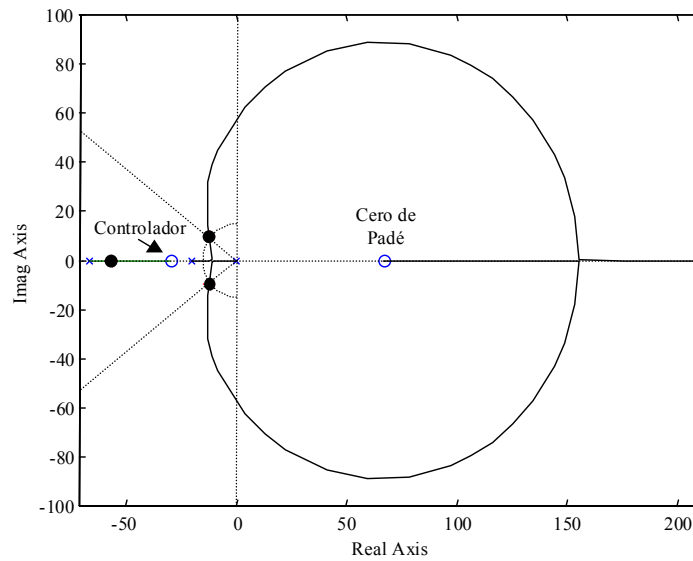


Fig. 20. Root-locus considerando Padé.

La respuesta del sistema se obtiene del siguiente modelo implementado en SIMULINK:

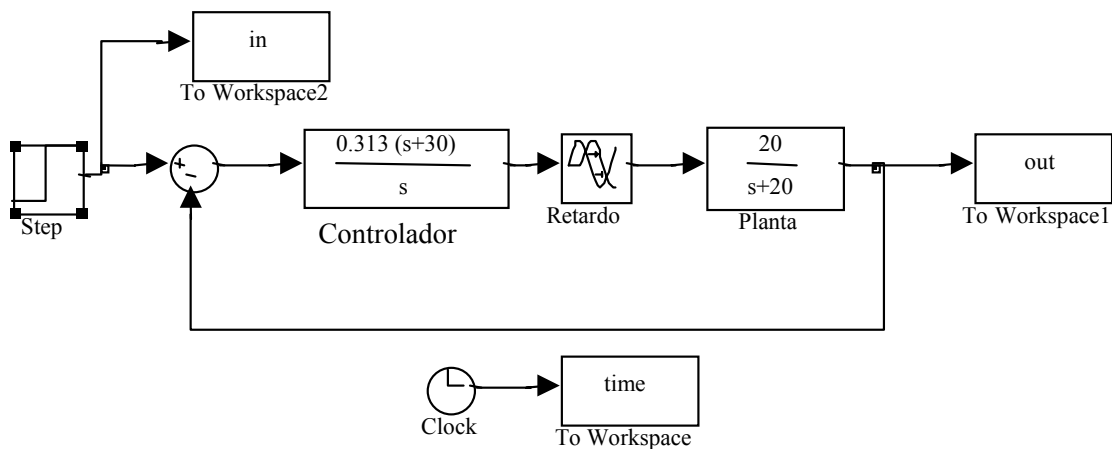


Fig. 21. Modelo en SIMULINK utilizado para simular un sistema con retardo.

La aproximación de Padé se utiliza habitualmente para diseñar sistemas de control. Sin embargo al momento de simular se debe utilizar una representación en lo posible exacta. Afortunadamente SIMULINK puede representar retardos exactos utilizando el bloque que se muestra en la Fig. 21.

Finalmente, Fig. 22 muestra la respuesta escalón del sistema mostrado en la Fig. 21.

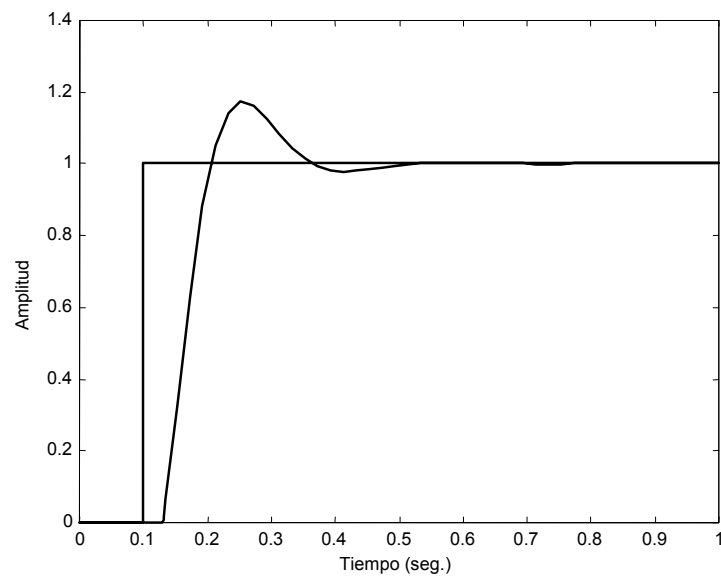


Fig. 22. Respuesta en el tiempo para el sistema diseñado en la Fig. 20.