

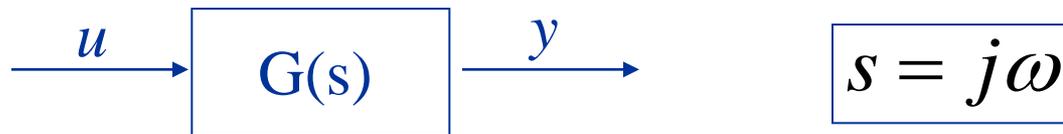
Métodos Clásicos para el Diseño de Controladores: en el Dominio de la Frecuencia

Elaborado por: D. Sáez

R. Cárdenas

Colaboradores: G. Sáez & S. Sippa
1

Análisis en Frecuencia



Si $u(t) = A \sin(\omega_0 t) \longrightarrow y(t) = B \sin(\omega_0 t + \alpha)$

amplitud frecuencia amplitud frecuencia

$$B = A|G(j\omega)| \quad \alpha = \angle G(j\omega)$$

Análisis en Frecuencia

Caso general

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

↑
real

↑
imaginario

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)} = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

$$\phi(j\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$$

Diagrama de Bode

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

$$[d_B]$$

Ganancia logarítmica

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right)$$

Diagrama de Bode

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10} \left| \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega T)^2}} \right| = -10 \log(1 + (\omega T)^2)$$

Diagrama de Bode

Si

$$\left. \begin{array}{l} \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -10 \log(1) = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(\omega T) \\ \omega = \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -10 \log(2) = -3 \text{ dB} \end{array} \right\} \omega = \frac{1}{T}$$

frecuencia de corte

Diagrama de Bode

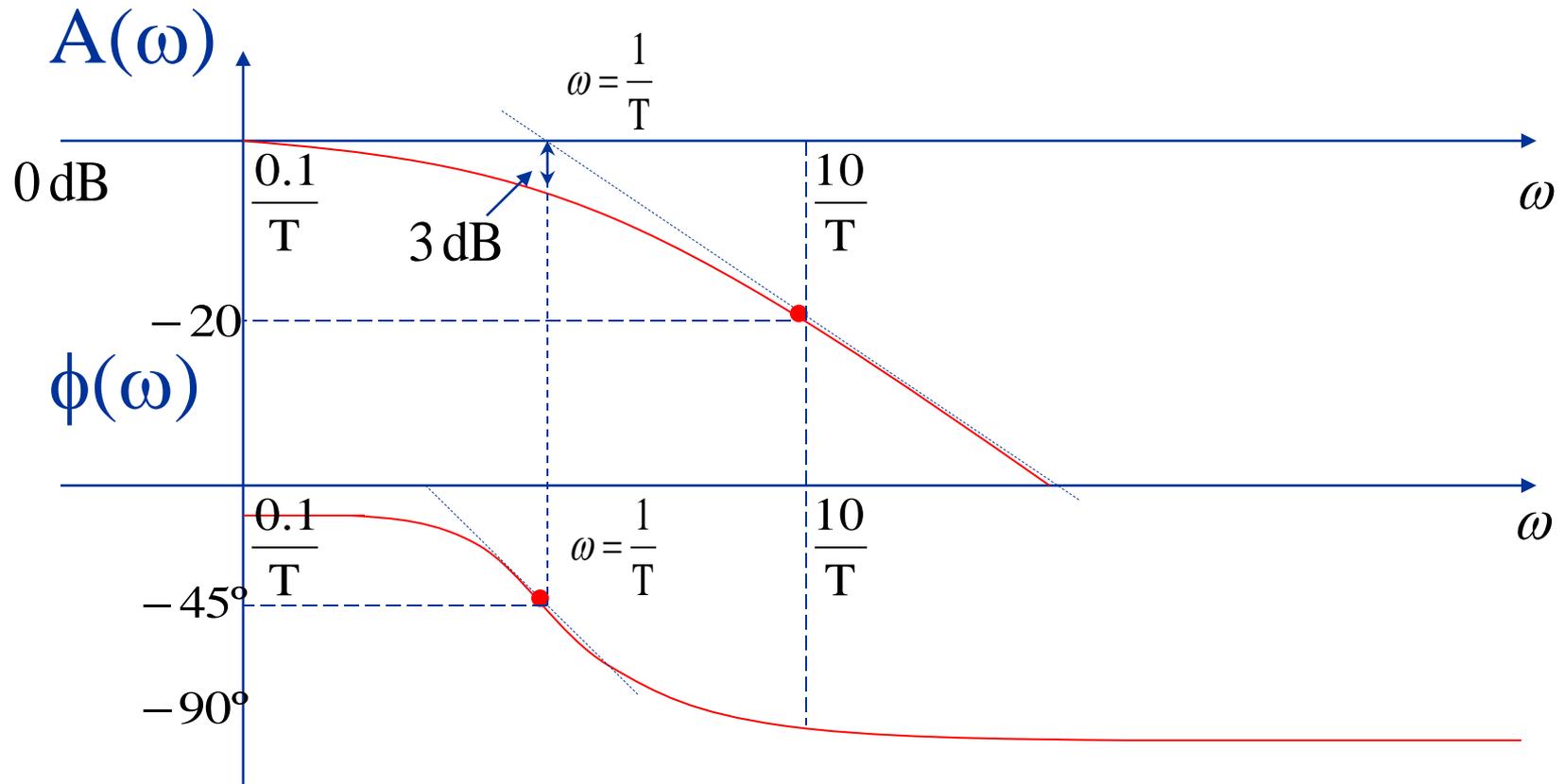


Diagrama de Bode

Definiciones:

En los diagramas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas.

- Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$, en donde ω_1 es cualquier frecuencia
- Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$, en donde, ω_1 es cualquier frecuencia.

Diagrama de Bode

Construcción de Diagrama de Bode

Factores básicos de $G(j\omega)$

Ganancias K.

1. Factores de integral y de derivada $(j\omega)^{\pm 1}$
2. Factores de primer orden $(1 + j\omega)^{\pm 1}$
3. Factores cuadráticos $\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^{\pm 1}$

Diagrama de Bode

1. Ganancia K $G(j\omega) = K$

$$A(\omega) = 20 \log K [dB]$$

$$\phi(\omega) = 0$$

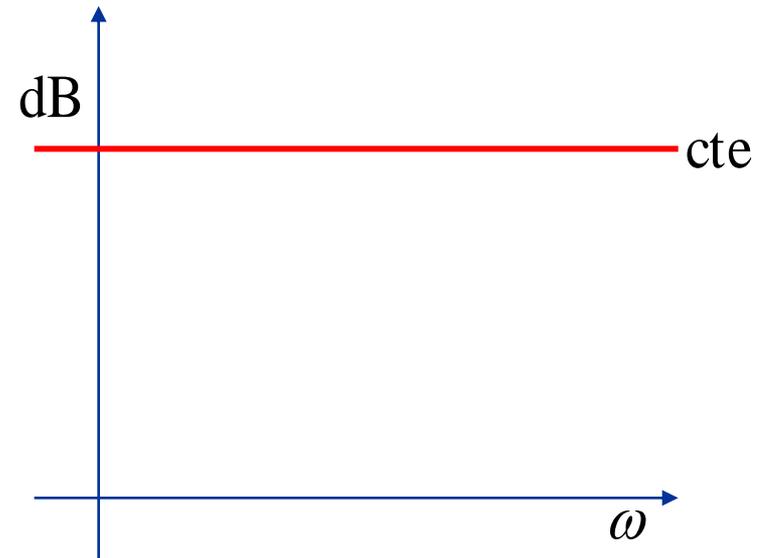
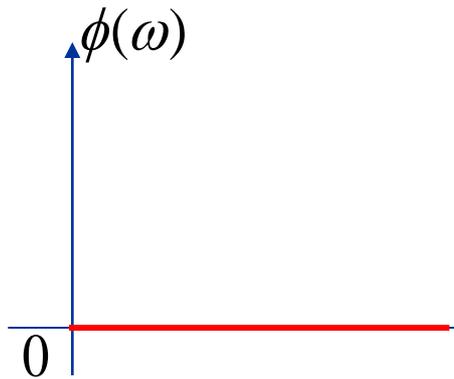


Diagrama de Bode

2. Factores de de integral y de derivada $(j\omega)^{\pm 1}$
(polos y ceros en el origen).

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log(\omega) \text{ [dB]} \quad \text{pendiente} = -20 \frac{dB}{dec}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

Diagrama de Bode

Polo en el origen

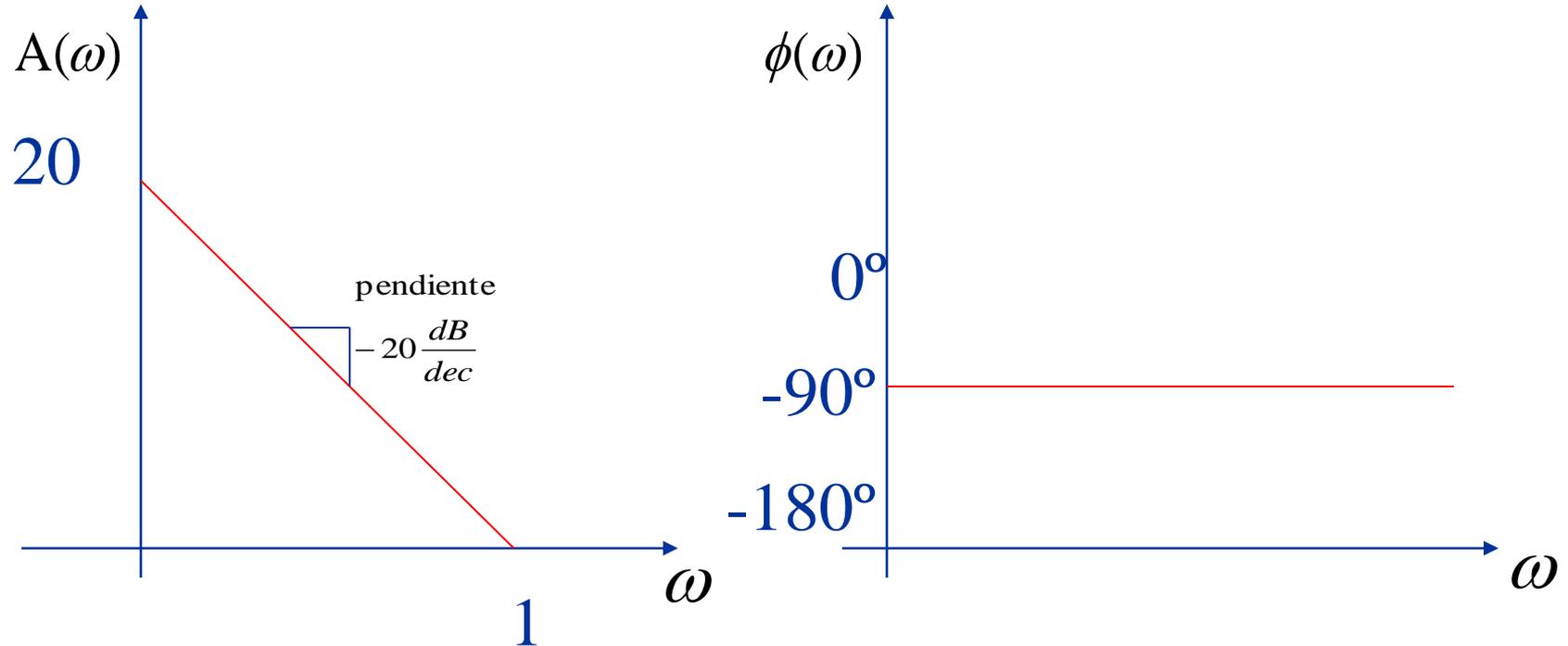


Diagrama de Bode

Polos en origen múltiples: $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| = -20N \log(\omega) [dB]$$

$$\phi(\omega) = -90N$$

$$\text{pendiente} = -20N \frac{dB}{dec}$$

Diagrama de Bode

Cero en origen $G(j\omega) = j\omega$

$$A(\omega) = 20 \log|j\omega| = 20 \log(\omega) [dB]$$

$$\phi(\omega) = 90^\circ$$

$$\text{pendiente} = 20 \frac{dB}{dec}$$

Diagrama de Bode

Cero en el origen

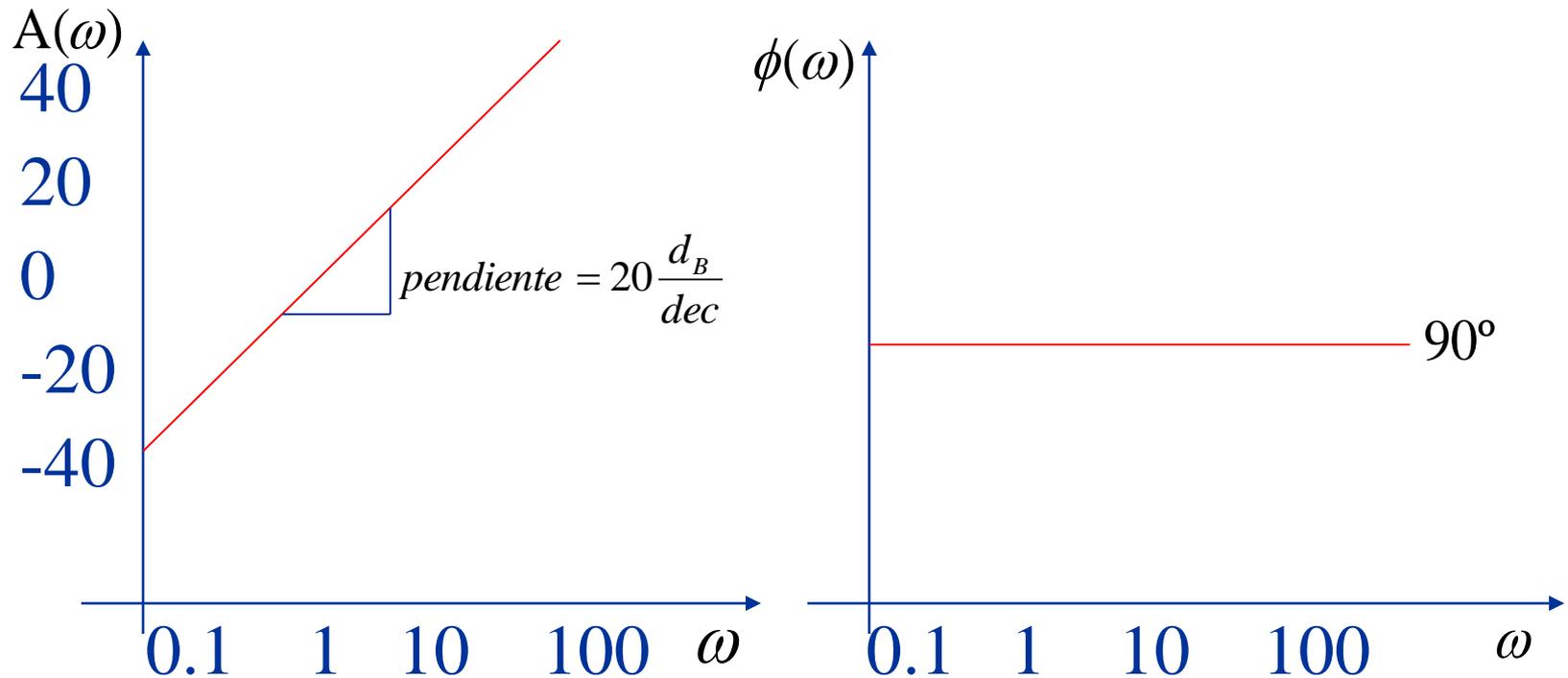


Diagrama de Bode

Ceros en origen múltiples $G(j\omega) = (j\omega)^N$

$$A(\omega) = 20 \log |(j\omega)^N| = 20N \log(\omega) [dB]$$

$$\phi(\omega) = 90N$$

$$\text{pendiente} = 20N \frac{dB}{dec}$$

Diagrama de Bode

$$\text{Ej: } 20 \log |(j\omega)^2| = 40 \log(\omega)$$

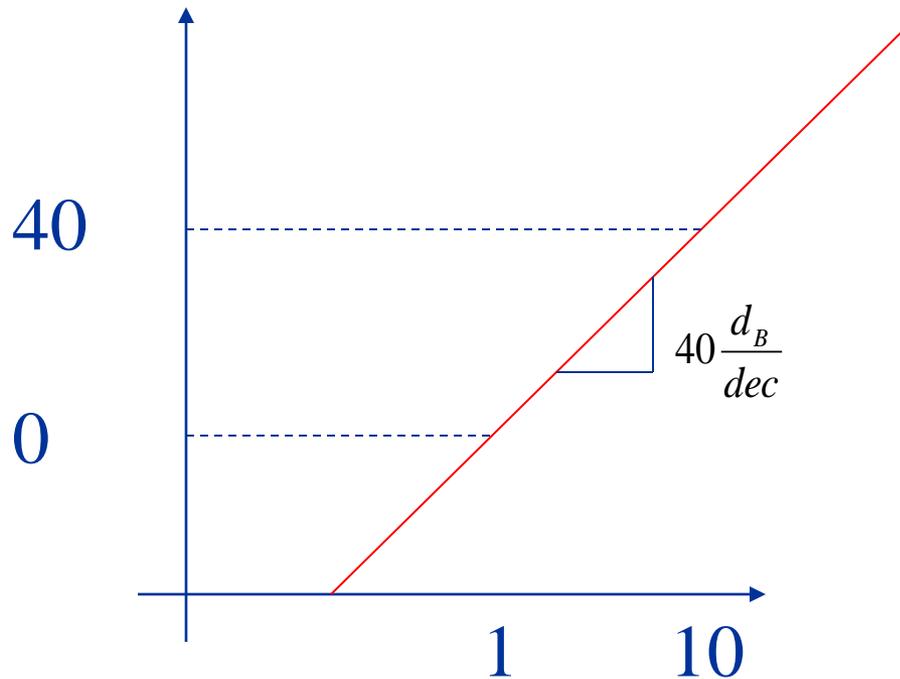


Diagrama de Bode

3. Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$
(Polos o ceros en eje real)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right)$$

Diagrama de Bode

- Polo en el eje real

$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = -20 \log(\omega T) \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ$$

Diagrama de Bode

Angulo de fase exacto del factor $\frac{1}{1 + j\omega T}$ es:

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

si $\omega = \frac{1}{T}$ $\phi = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$

y $A(\omega) = -20 \log(\sqrt{2}) = -3 \text{ [dB]}$

Diagrama de Bode

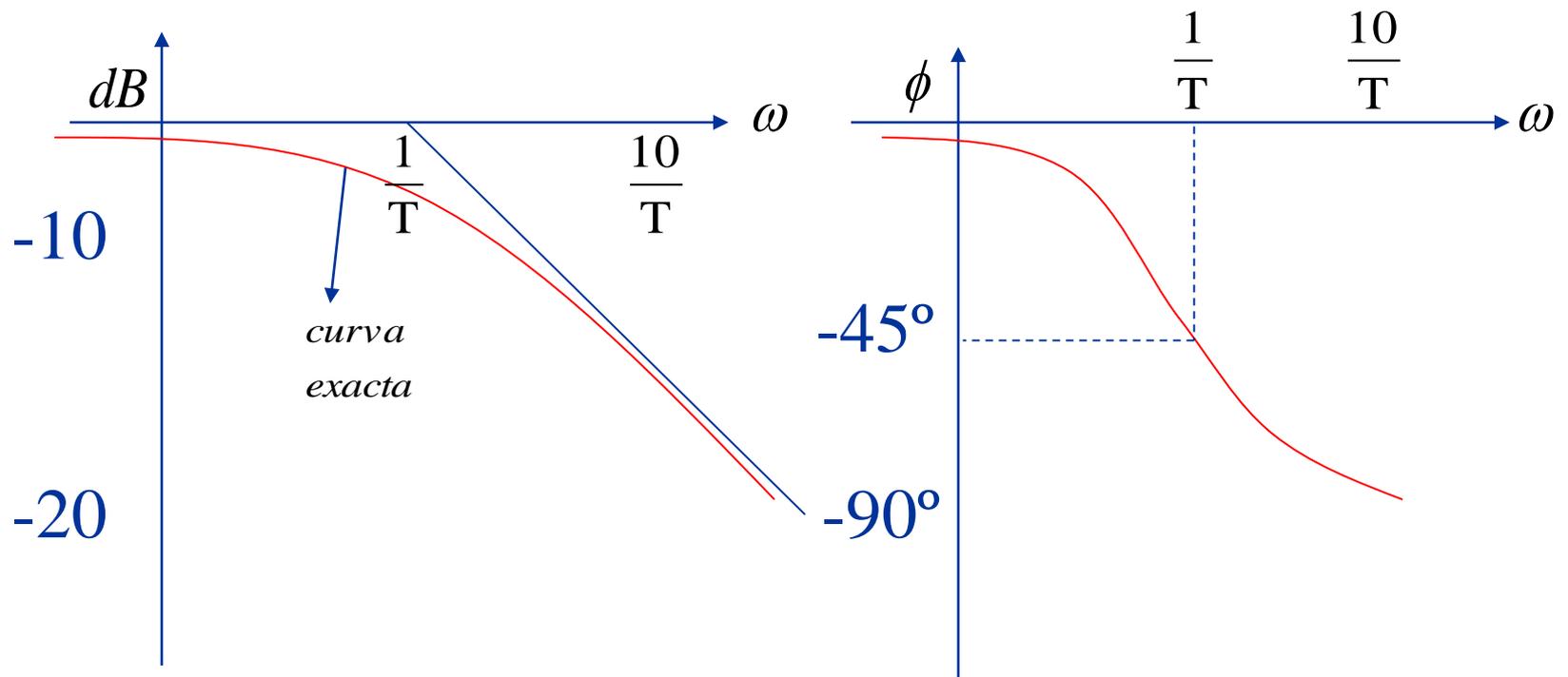


Diagrama de Bode

Cero en eje real:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$A(\omega) = +20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

Diagrama de Bode

si

$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = +20\log(1) = 0 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = 20\log(\omega T) \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 90^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{T} \rightarrow A(\omega) = +20\log(\sqrt{2}) \cong 3 \text{ [dB]} \Rightarrow \phi(\omega) = 45^\circ$$

Diagrama de Bode

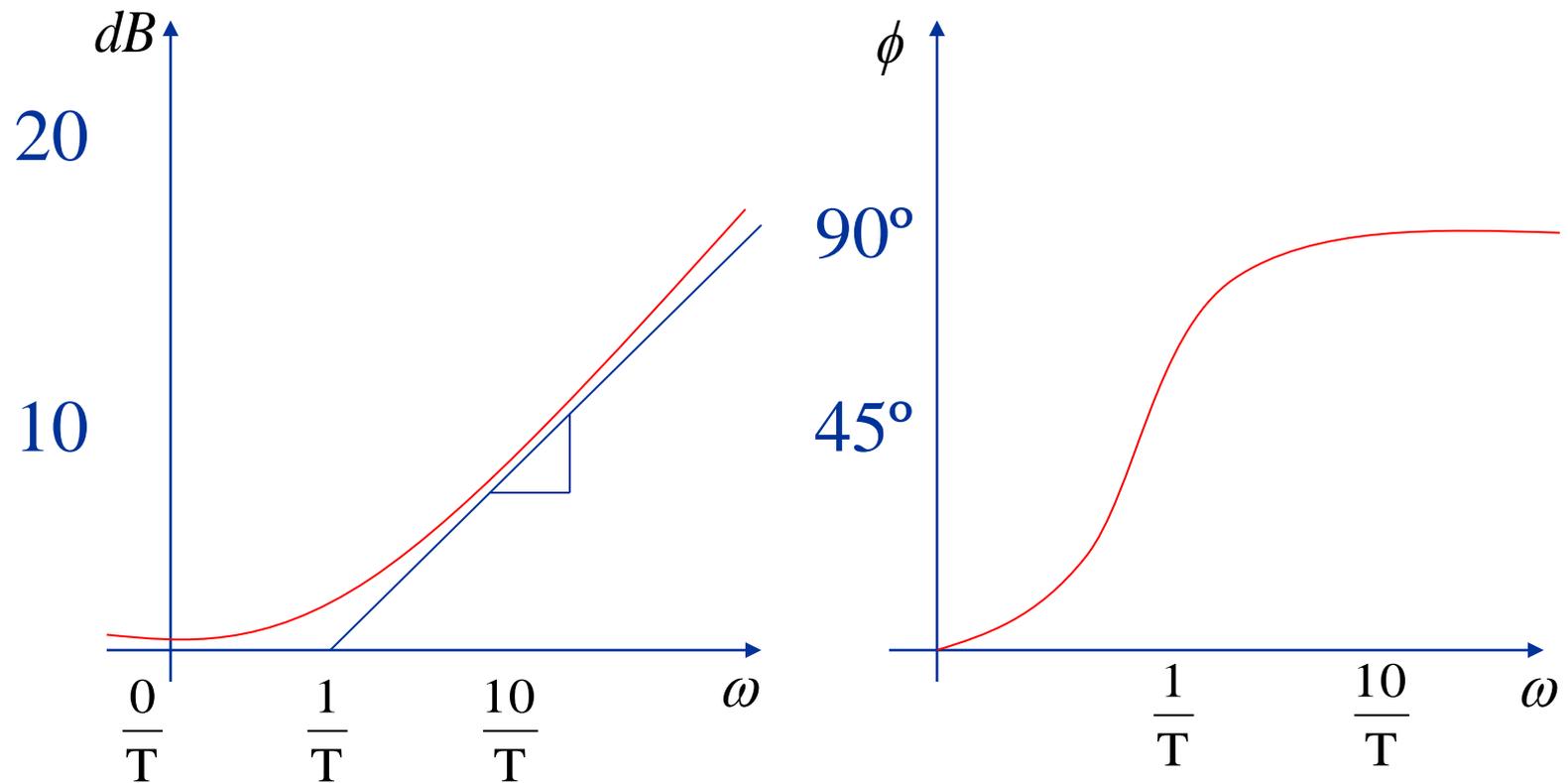


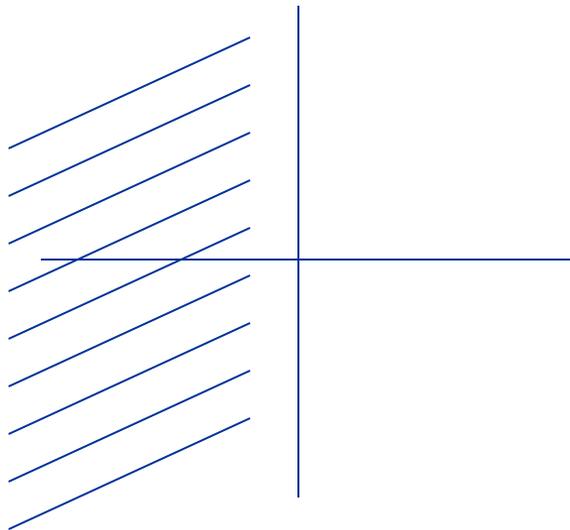
Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Transformación Bilineal:

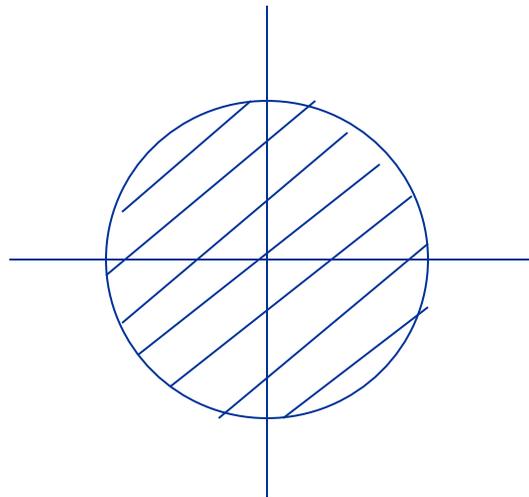
$$Z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}$$

Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Plano s



Plano z



Plano w

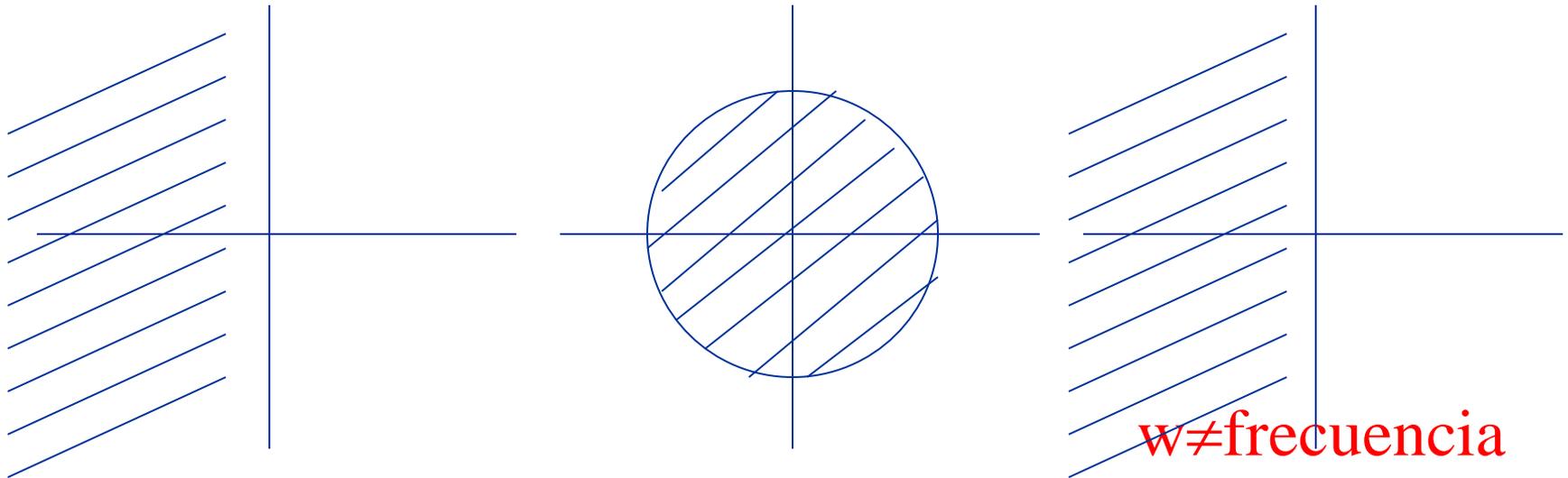


Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

Con $G(w) \rightarrow G(j\omega)$ con $w = j\omega$

ω : frecuencia

El diagrama de Bode de $G(j\omega)$ se realiza con el mismo procedimiento que para sistemas continuos.

Diagrama de Bode

Ejemplo:

$$G(z) = \frac{2(0.01873z + 0.01752)}{z^2 - 1.8187z + 0.8187}$$

$$T = 0.2$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

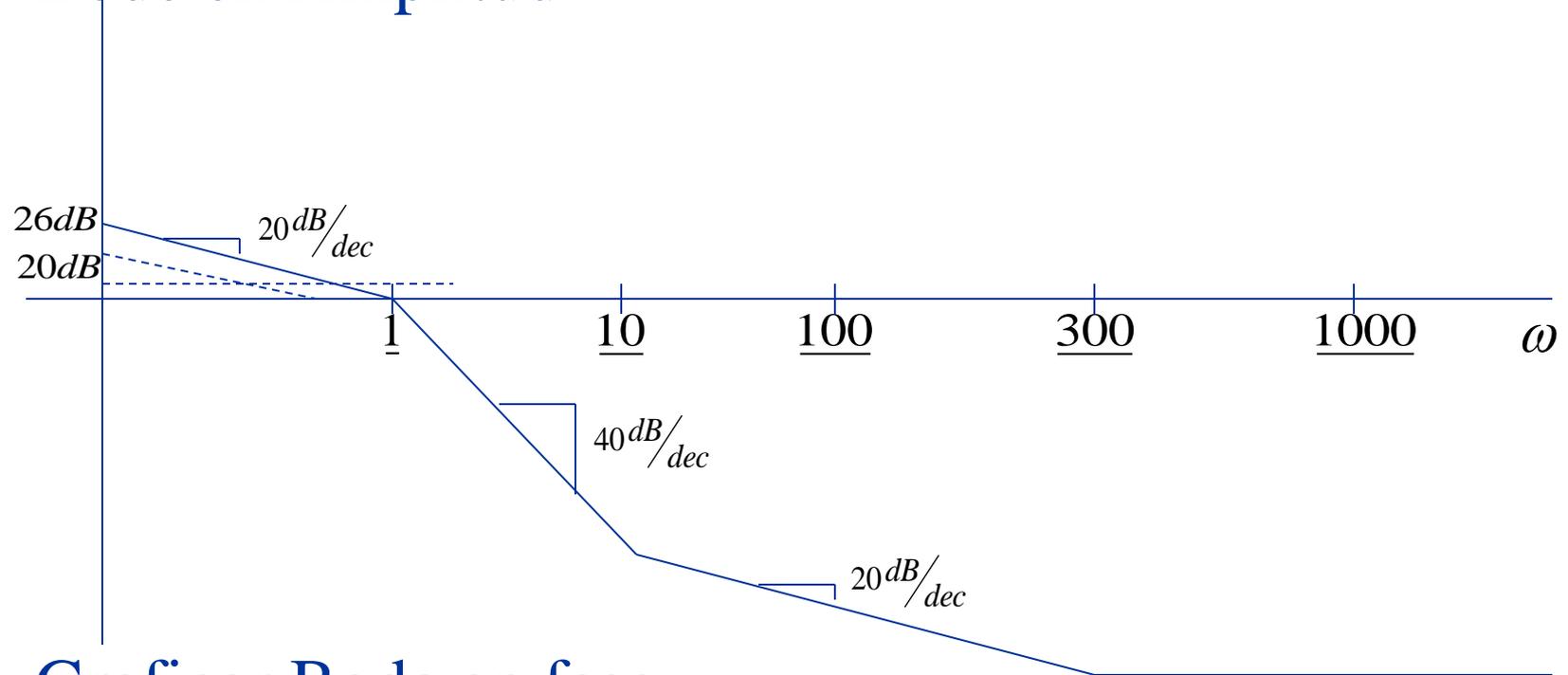
Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

$$\rightarrow G(w) = \frac{2\left(1 + \frac{w}{300}\right)\left(1 - \frac{w}{10}\right)}{w(w + 1)}$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{2\left(1 + \frac{j\omega}{300}\right)\left(1 - \frac{j\omega}{10}\right)}{j\omega(j\omega + 1)}$$

Diagrama de Bode para Sistemas Discretos

- Bode en Amplitud



- Graficar Bode en fase

Sistemas de Fase Mínima y de Fase No Mínima

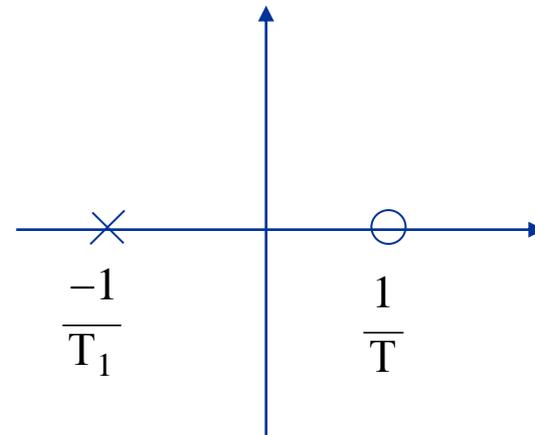
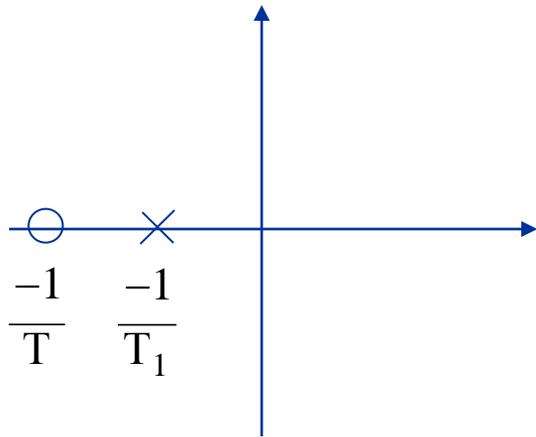
Las funciones de transferencias que no tienen polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de transferencias de fase mínima.

Las funciones de transferencias que tienen polos y/o ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de fase no mínima.

Sistemas de Fase Mínima y de Fase No Mínima

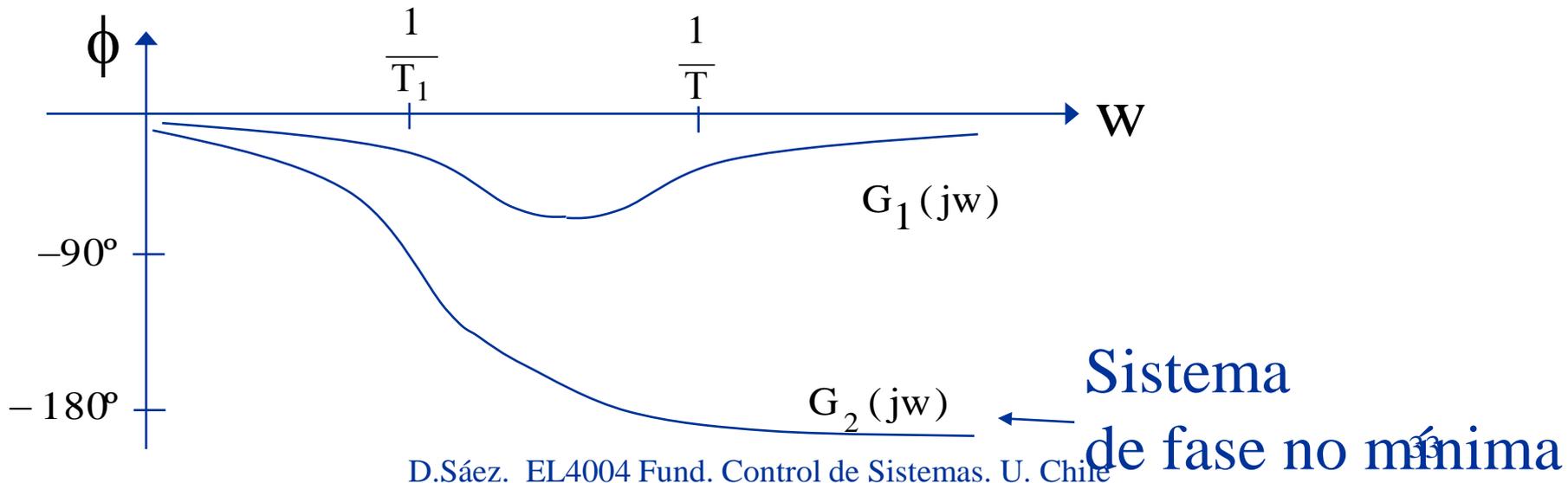
Ejemplos: Fase mínima y fase no mínima

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1} \quad 0 < T < T_1$$



Sistemas de Fase Mínima y de Fase No Mínima

Las dos funciones de transferencias tienen la misma característica de magnitud, pero tienen diferente característica de ángulo de fase.



Sistemas con Retardo

Diagrama de Bode

El retardo tiene un comportamiento de fase no mínima y tiene un atraso de fase excesivo sin atenuación en frecuencias altas.

Páde:
$$\left(e^{-T_d s} = \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2} \right)$$

Retardo:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

Sistemas con Retardo

Diagrama de Bode

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\phi(G(j\omega)) = -\omega T \text{ radianes}$$

Estabilidad Relativa

- Margen de ganancia: Recíproco de la ganancia $|G(j\omega)|$ para la frecuencia en el ángulo de fase alcanza -180° ($\nu=0$). Se refiere a cuánto se debe aumentar la ganancia para que $G(j\omega)$ pase por $u=-1$.

$$M.G. = \frac{1}{|G(j\omega_1)|} = -20 \log |G(j\omega_1)| \text{dB}$$

Estabilidad Relativa

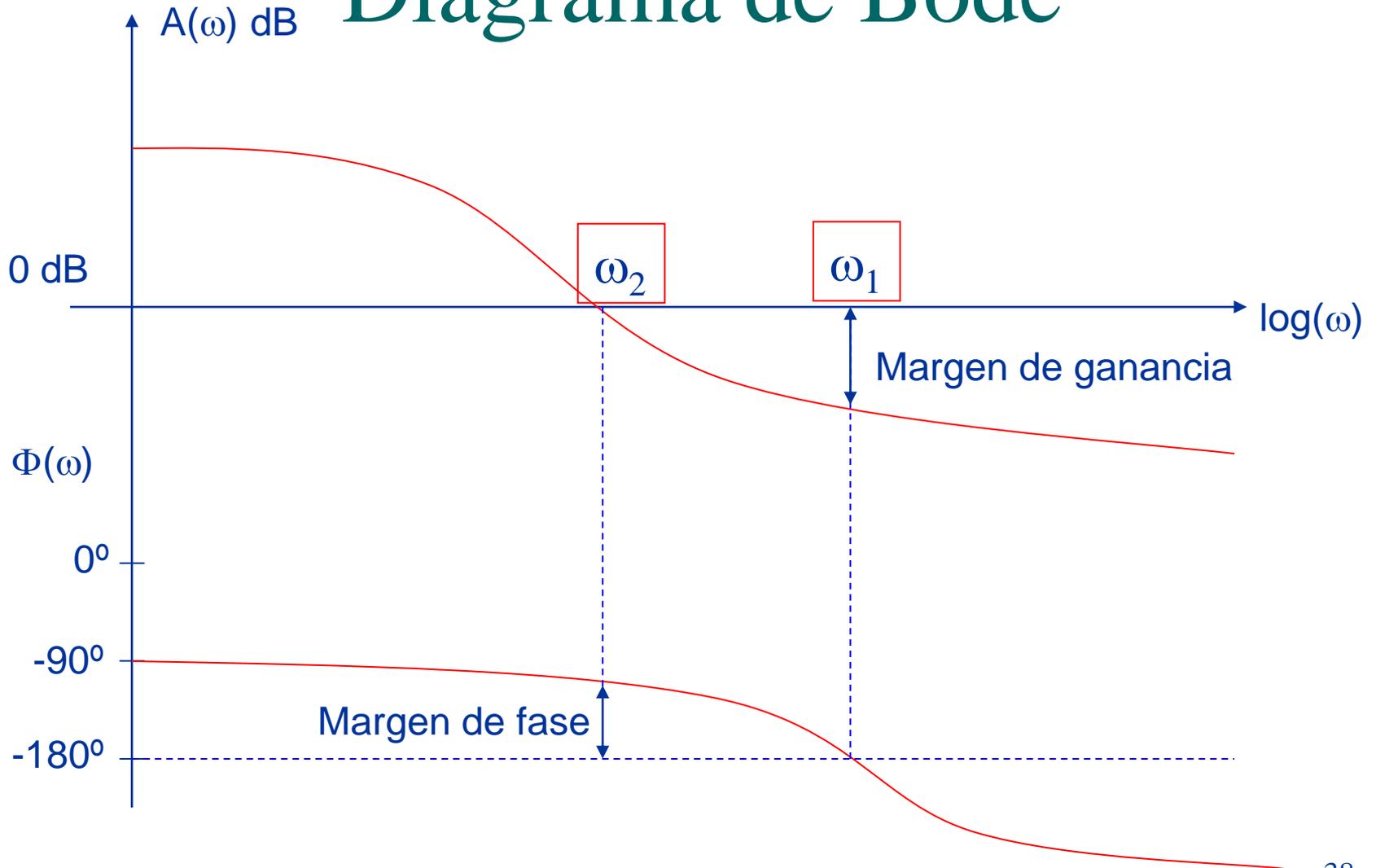
- Margen de fase: Se define como el ángulo de fase a través del cual debe girar el LG $G(j\omega)$ para que el punto de magnitud unitaria $|G(j\omega)|=1$ pase a través del punto $(-1,0)$ en el plano $G(j\omega)$. Fase adicional que se necesita antes de que el sistema se vuelva inestable.

$$|G(j\omega_2)| = 1$$

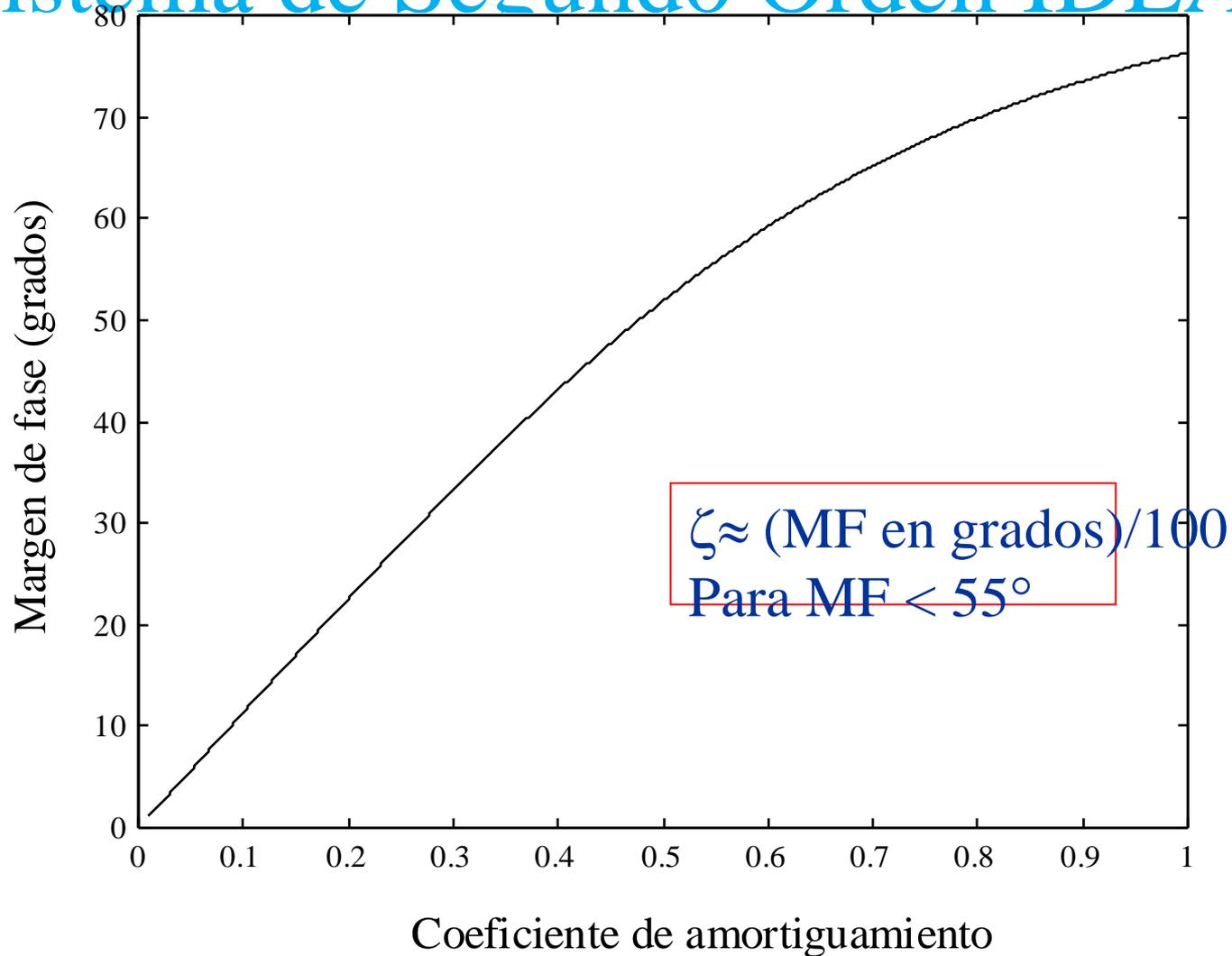
$$R(\omega_2), X(\omega_2)$$

$$\Delta\phi_2 = 180^\circ + \arctan\left(\frac{X(\omega_2)}{R(\omega_2)}\right)$$

Diagrama de Bode



Relación entre ζ y MF para un Sistema de Segundo Orden IDEAL



Estabilidad Relativa

- Para un sistema estable el Margen de ganancia (M.G.) indica cuanto puede incrementarse la ganancia antes de que el sistema se vuelva inestable.
- Para un sistema inestable, el M.G. indica cuánto debe disminuir la ganancia para que el sistema sea estable.

Unidad 4:
Técnica de Control
en el Dominio de la Frecuencia:
Diseño de Controladores

Elaborado por: D. Sáez
Colaboradores: G. Sáez & S. Sippa

Compensador de Adelanto de Fase

$$G_C(s) = K_c \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T} \right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T} \right)} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\text{polo} = -\frac{1}{\alpha T} \quad \text{cero} = -\frac{1}{T}$$

$$\text{Margen de fase máximo} = \phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

Compensador de Adelanto de Fase

- Diagrama de Bode, si $\alpha=0.1$

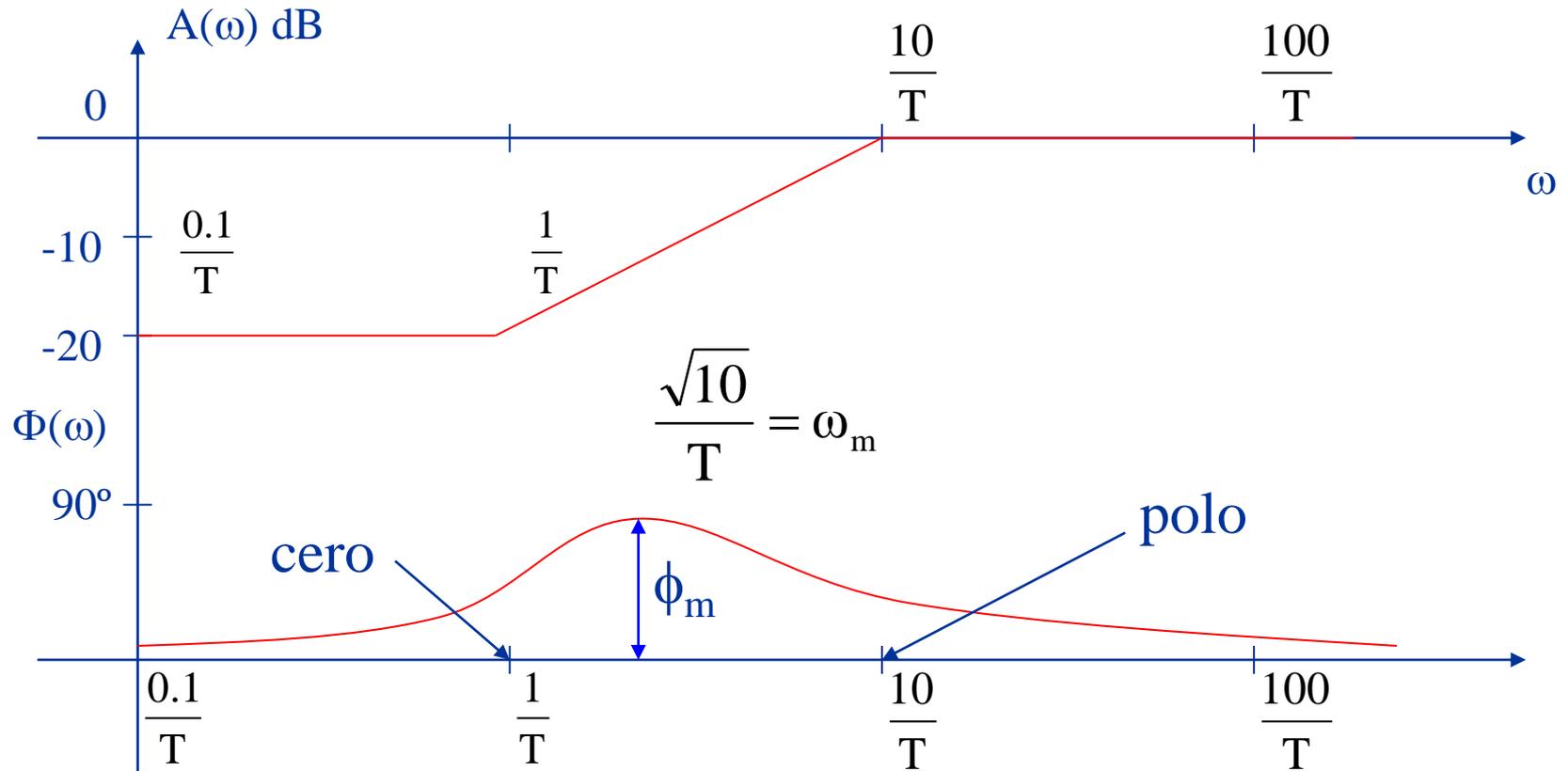


Tabla de Valores Máximos dependiendo del valor de α

α	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Fase (grados)	90	54.9	41.8	32.6	25.4	19.5

Compensador de Retraso de Fase

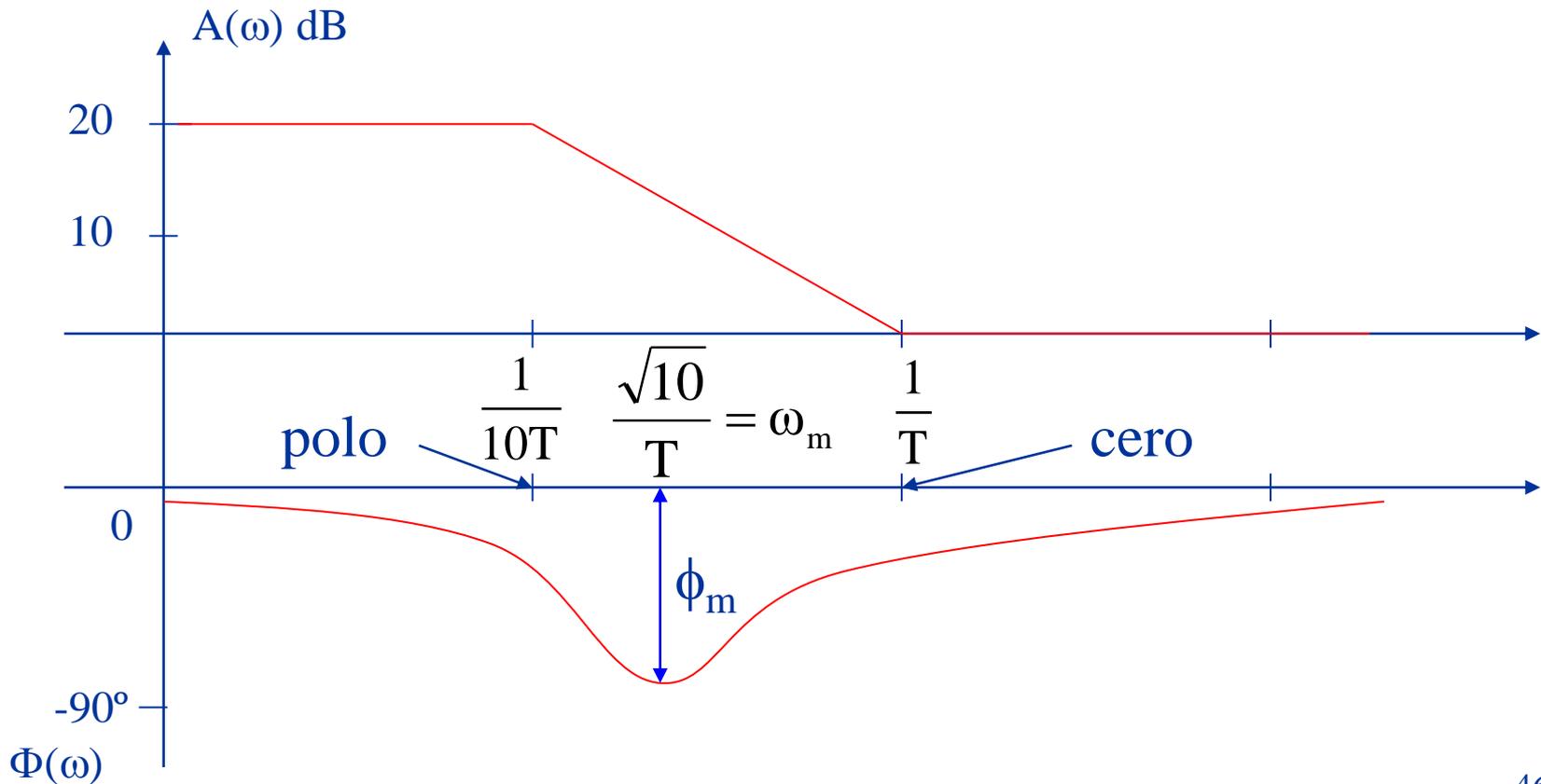
$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} \quad \beta > 1$$

$$\text{polo} = -\frac{1}{\beta T} \quad \text{cero} = -\frac{1}{T}$$

$$\text{Margen de fase máximo} = \phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \quad \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta T}}$$

Compensador de Retraso de Fase

- Diagrama de Bode, si $\beta=10$.



Compensación

- La compensación por adelanto y atraso considerando fase máxima es un buen método de compensación. Como todos los métodos tiene sus problemas y es que no es posible fijar todos los parámetros.
- Por ejemplo supongamos una malla en adelanto con $\alpha=0.1$, y queremos inyectar máxima fase en $\omega=25\text{rads}^{-1}$.

Resultados Obtenidos

$$\phi_m = 54.9^\circ$$

$$T = 0.12$$

$$1/T = 7.9$$

$$\omega_m = 25 \text{ rad}^{-1}$$

El cero quedo localizado en 7.9 y el polo en 79.
La fase es lo mas importante ya que la ganancia puede ser modificada por el controlador

Compensación Donde Solamente la Posición del Cero es Importante

No siempre se debe inyectar la fase máxima del compensador
Existen otras alternativas. Por ejemplo:

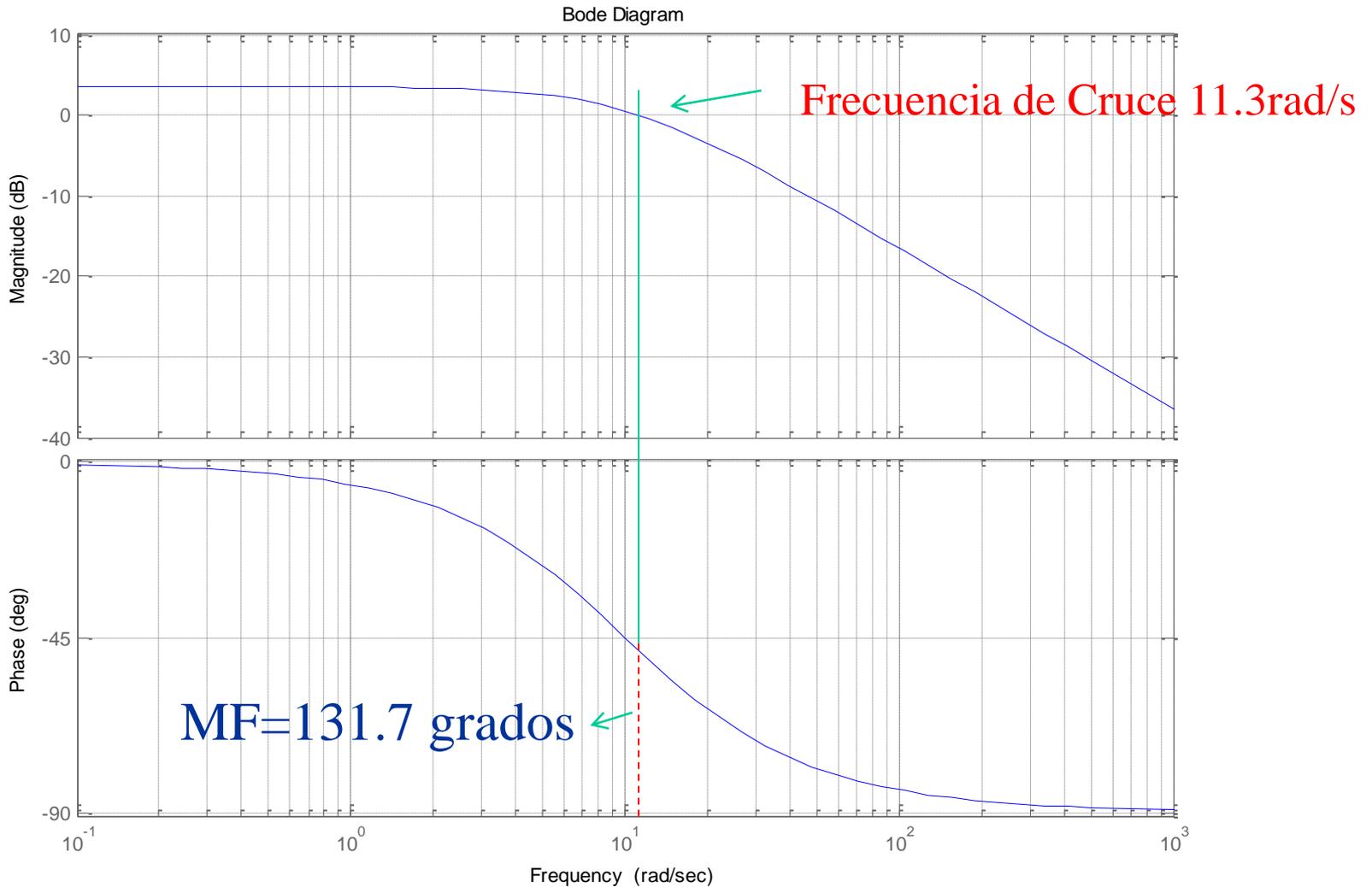
$$Planta = \frac{1}{(s + 10)}$$

Se debe diseñar un controlador para una frecuencia de cruce de 15 rads^{-1} y un margen de fase de 60 grados.

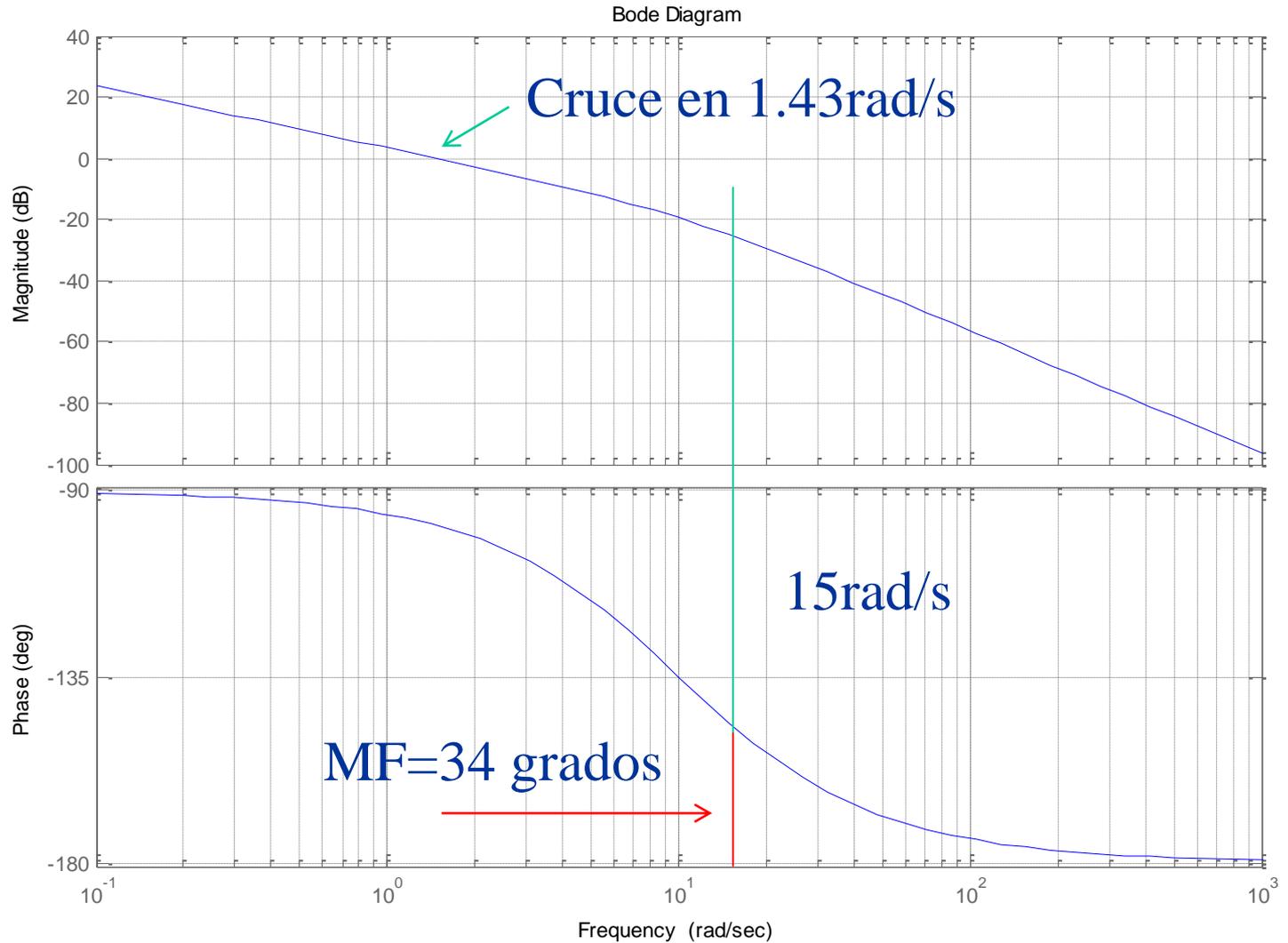
Receta 1: $\omega_{BW} \approx 1.6\omega_c$ para $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$

Receta 2: $\zeta \approx MF / 100$ $0 < \zeta < 0.6$

Bode a lazo abierto (no sirve de mucho)



Bode planta+integrador



Falta agregar el cero

Por agregar



$$\frac{s + a}{s}$$

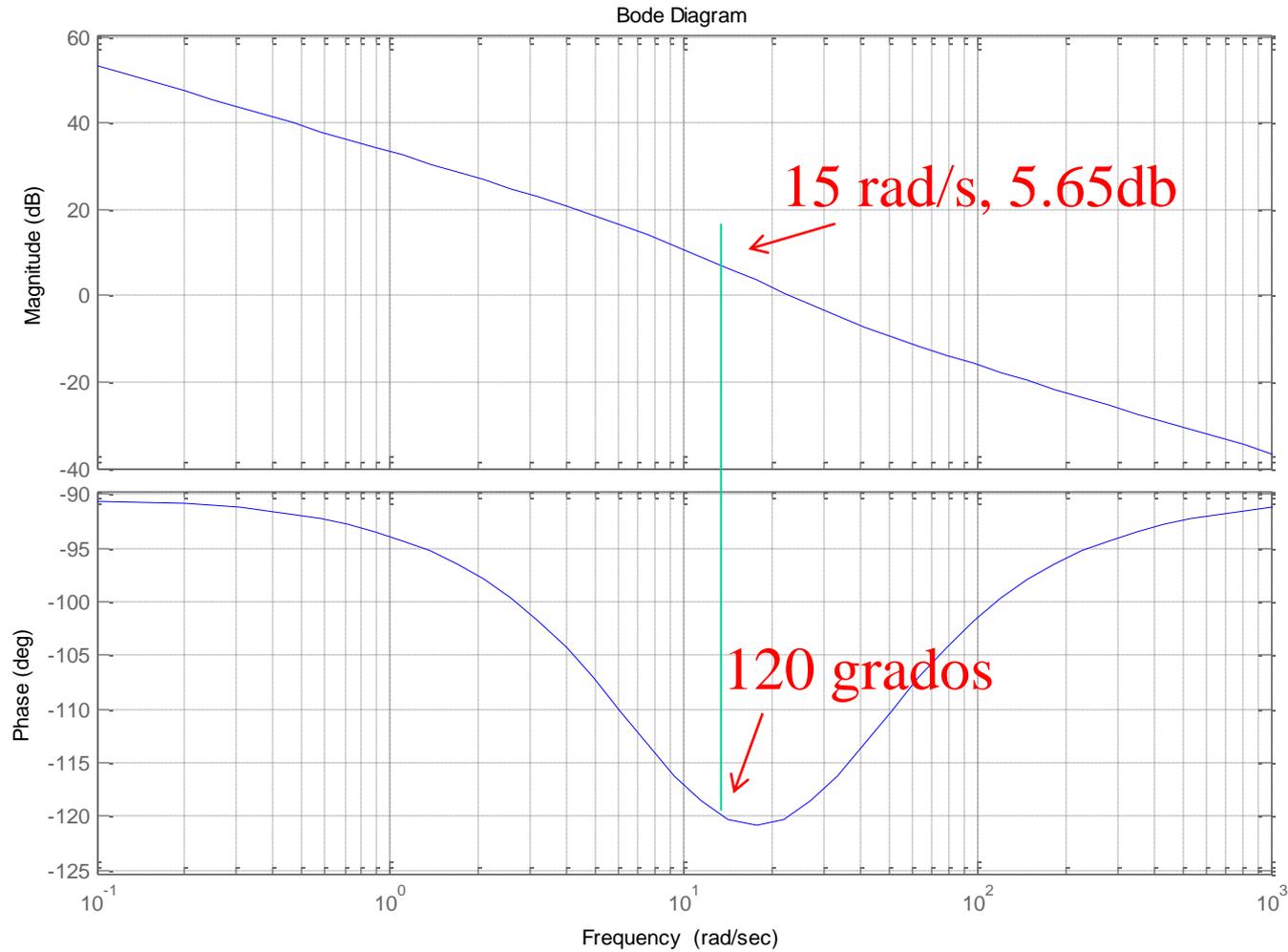


Incluido

$$a \tan\left(\frac{\omega_c}{a}\right) = 26^\circ$$

$$a \approx 31$$

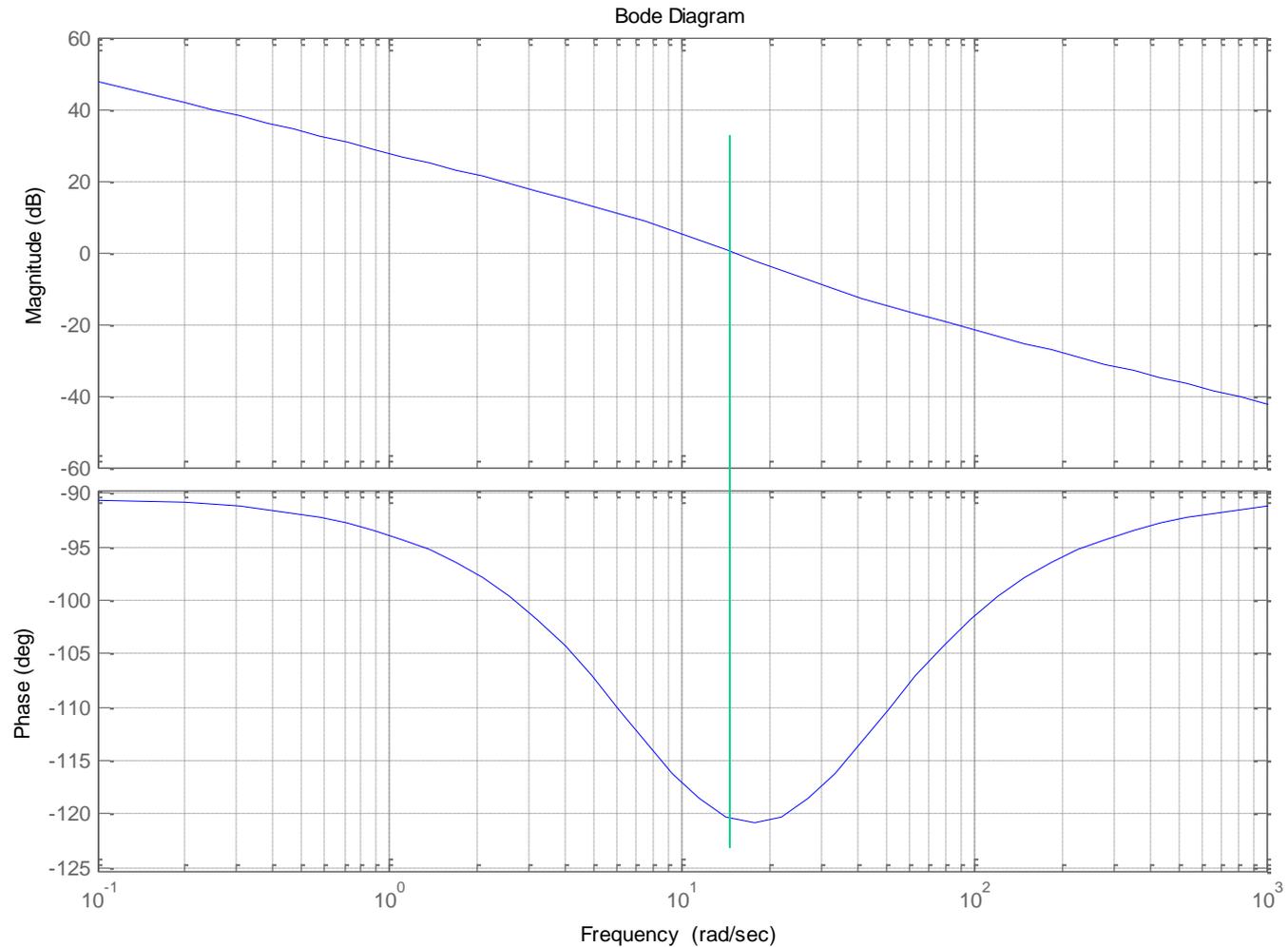
Sistema con polo y cero incluido



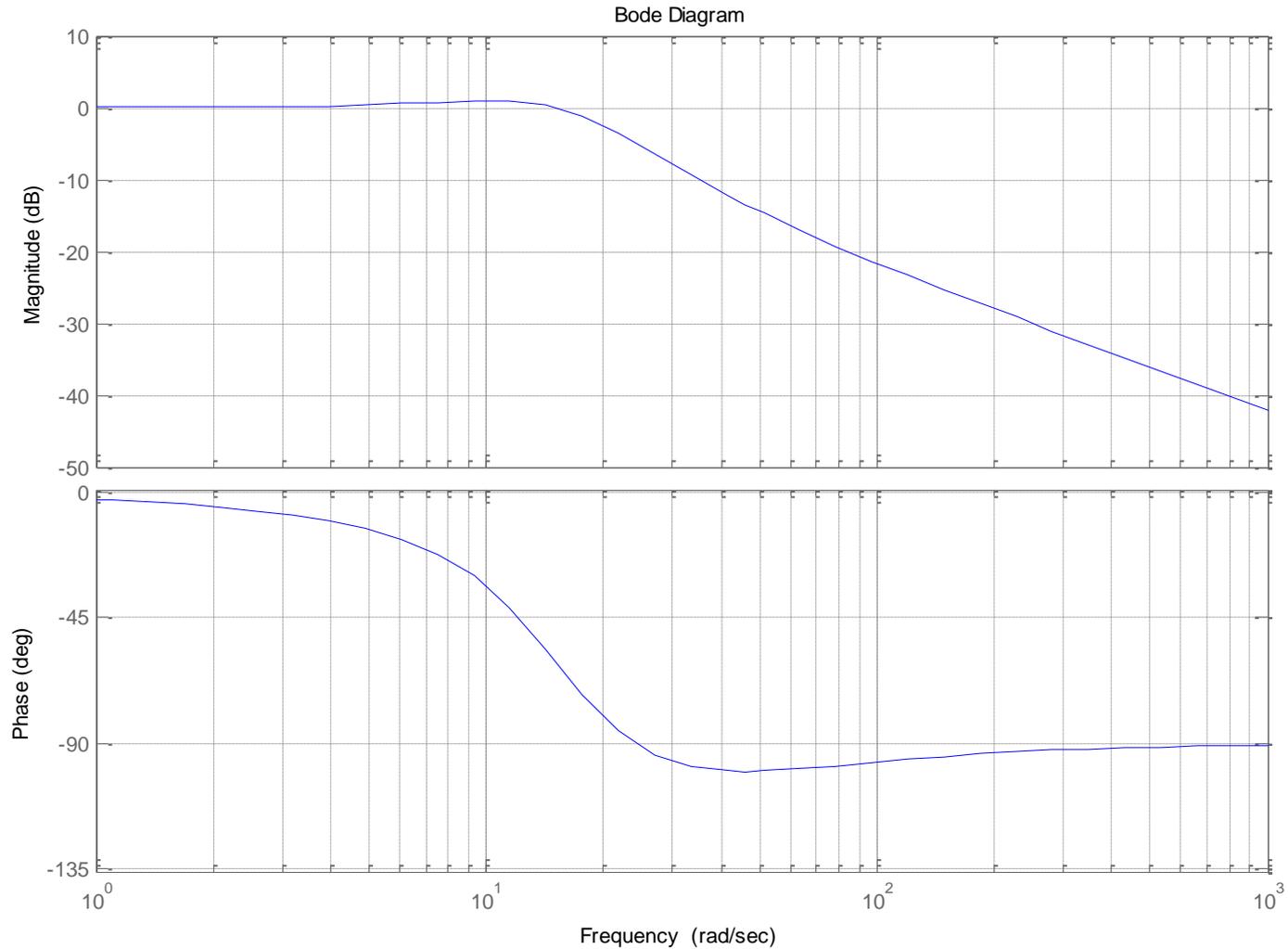
Ajuste de la ganancia del controlador

$$20 \log(k_c) = -5.65 \text{ db} \quad k = 0.5217$$

Sistema Compensado



Bode a lazo cerrado



Diseño por Cancelación

En general las reglas de cancelación de polos y ceros del sistema siguen siendo las mismas utilizadas al diseñar con el método del lugar de la raíz. La cancelación debe eliminar el polo más lento del sistema y no se pueden cancelar polos o ceros que se encuentren en el semiplano derecho.

Diseño por Cancelación

La dificultad se encuentra en que los métodos de respuesta de frecuencia no necesitan el conocimiento de la función de transferencia de la planta.

Si no se tiene esta función de transferencia se deben utilizar algunos procedimientos básicos de identificación de sistemas para encontrar la ubicación del polo a cancelar.

Diseño Por Cancelación

- Para plantas tipo cero de primer orden, el polo del sistema se encuentra en aquella frecuencia donde la función de transferencia tiene un módulo que es un 70.7% del valor en corriente continua. Por ejemplo la planta tipo cero de primer orden:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{a}{j\omega + a} \right|_{\omega=a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 0.707$$

Diseño Por Cancelación

- En vez del módulo de la función también puede utilizarse la fase. El polo dominante se encuentra cuando la fase es aproximadamente 45 grados.
- El identificar el polo dominante por la fase o el módulo también puede aplicarse en sistemas tipo cero de alto orden pero donde existe claramente existe un polo dominante.

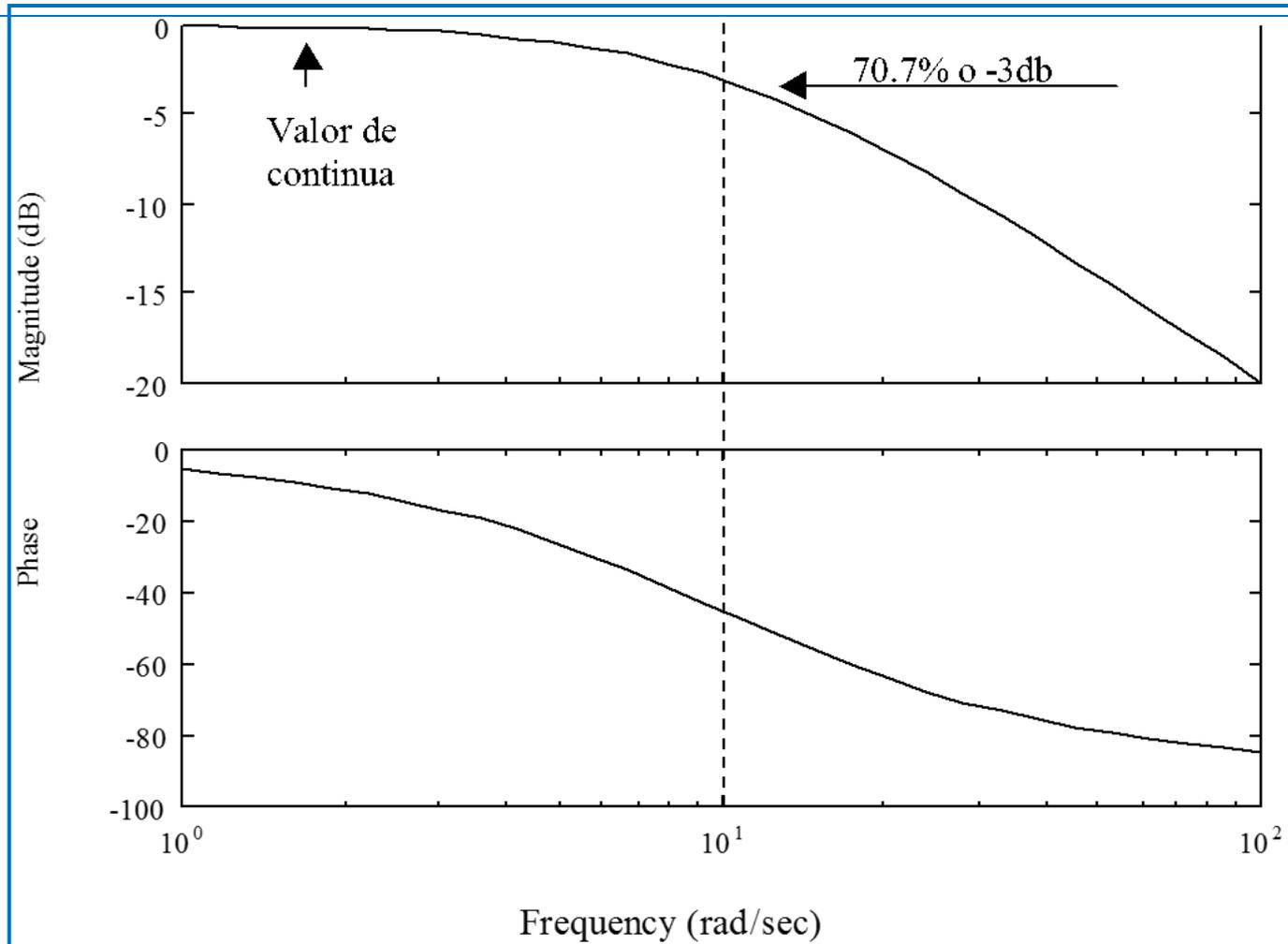
Diseño Por Cancelación

- Por ejemplo, supongamos que se desea diseñar un controlador para la planta:

$$G(s) = \frac{10}{s + 10}$$

- Se desea implementar el controlador por cancelación. El sistema a lazo cerrado debe tener una frecuencia de cruce de 21.5rads^{-1} con un margen de fase de 59.2 grados.

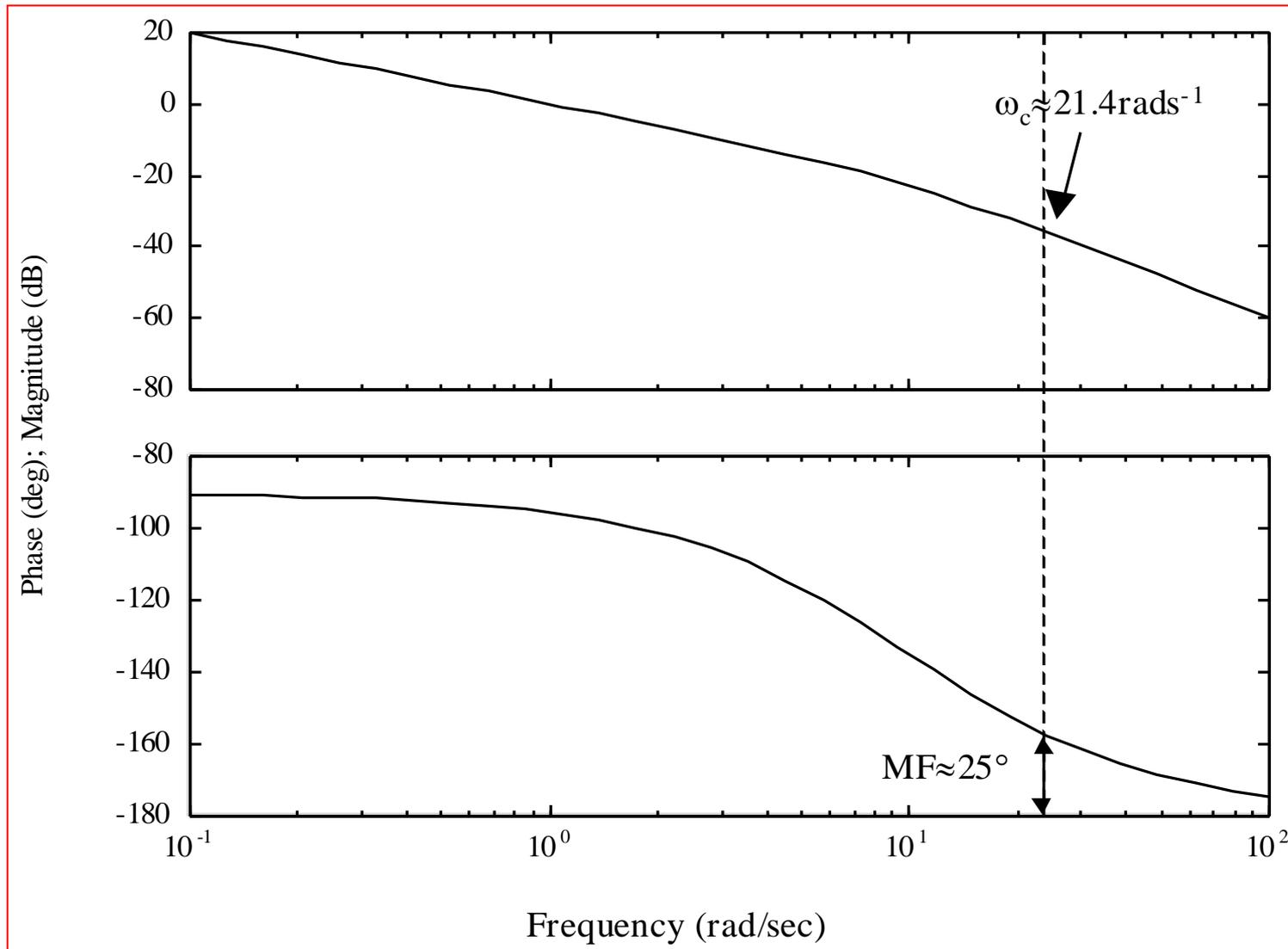
Diagrama de Bode



Diseño por Cancelación

- El primer paso en el diseño es colocar un integrador en el sistema para obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón. El margen de fase obtenido es de 25 grados y se necesita un MF de 59.19 grados. Es decir se debe inyectar 34.19 grados. Para esto se debe utilizar una red en adelanto de la forma:

Diseño de Bode con Integrador



Elección de la Red en Adelanto Por Cancelación

$$G_{Lead} = \frac{s + 10}{s + a}$$

Cancelación del Polo dominante de La planta

Elemento para completa la malla lead-lag

Frecuencia de cruce

$$\tan^{-1}(21.47 / 10) - \tan^{-1}(21.47 / a) = 34.19^\circ$$

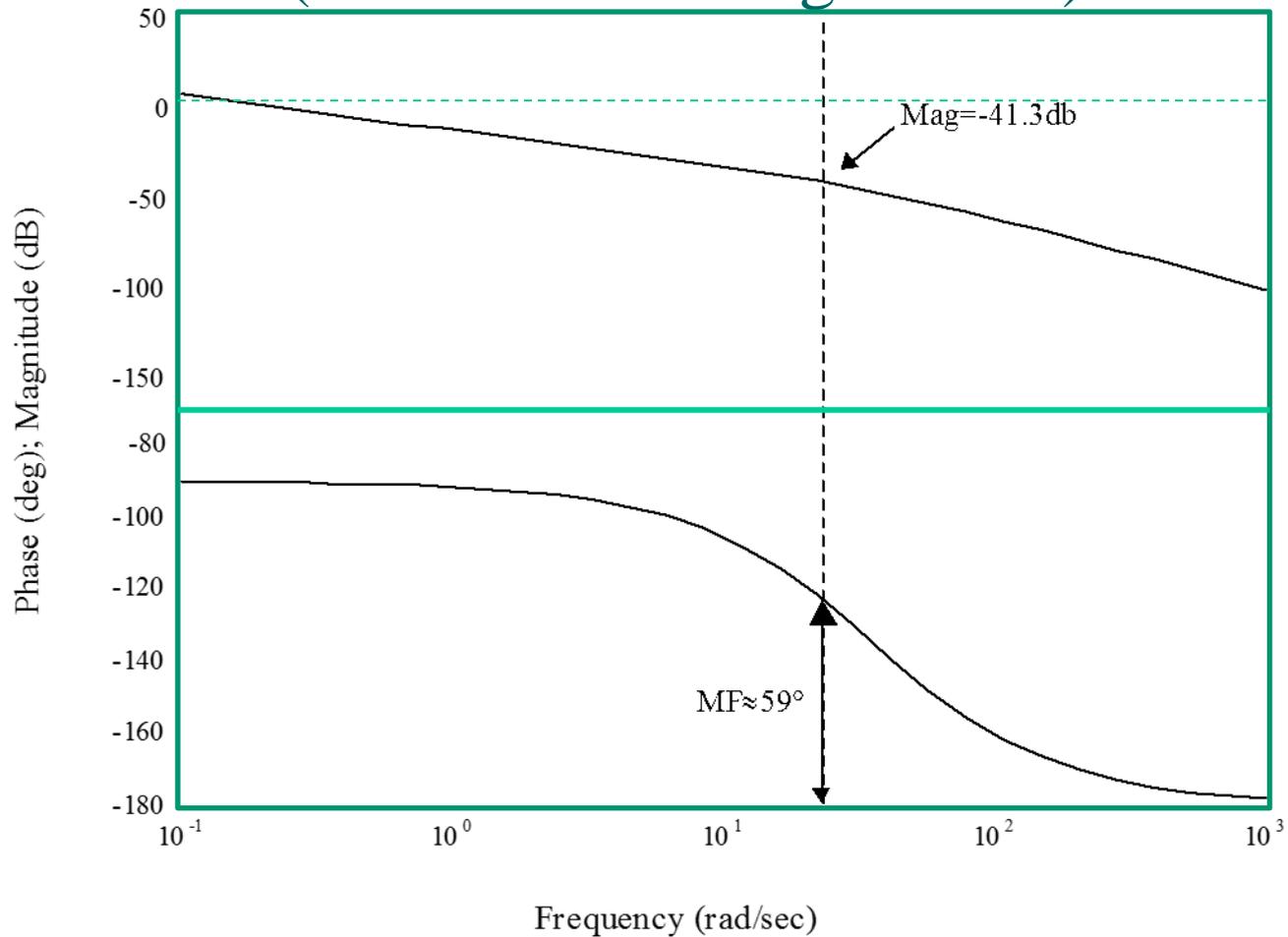
Fase entregada por El cero

Polo de la malla En adelante

El valor de a obtenido es 35.9656.

Diagrama compensado

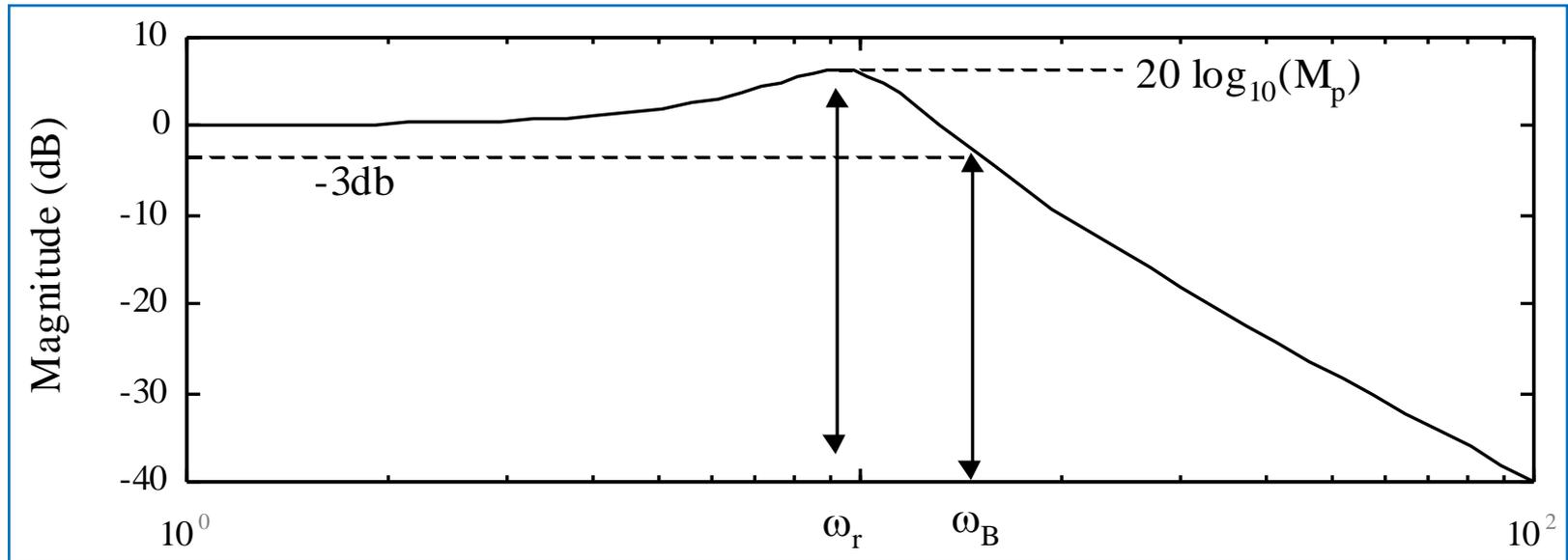
(Falta calcular la ganancia)



Relación entre los Diagramas de Bode, Lugar de la Raíz y Respuesta en el Tiempo

- Recuerde, para un sistema de segundo orden IDEAL, el margen de fase y el coeficiente de amortiguamiento están relacionados con una relación no lineal, pero que puede ser linealizada a tramos (piece-wise linearisation). La demostración se encuentra en algunos libros y en alguno de mis apuntes.

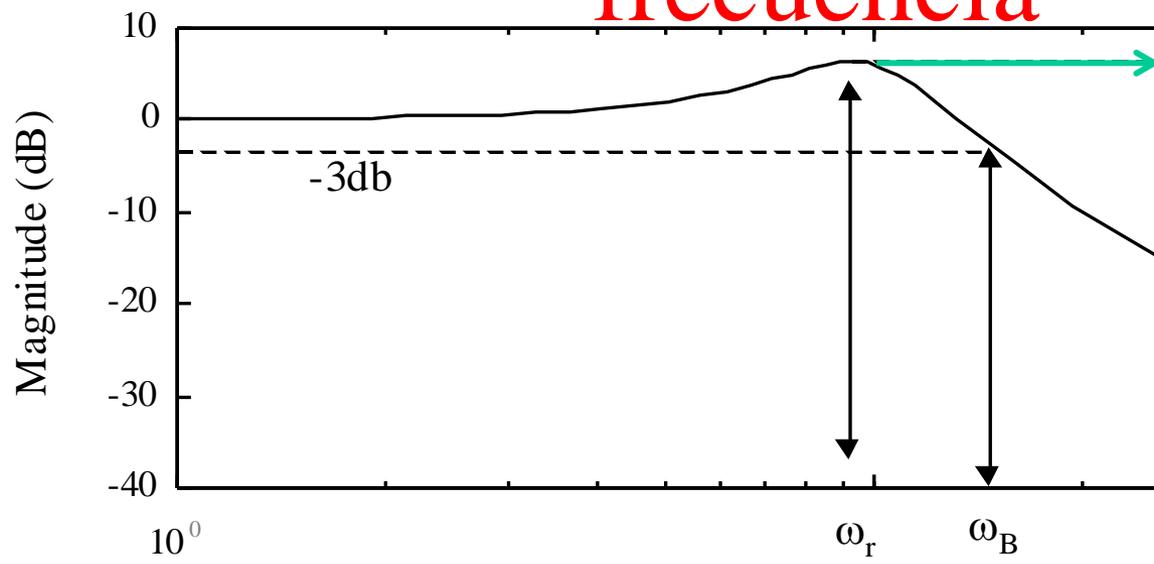
A Lazo Cerrado También se Pueden Extraer Conclusiones



En ancho de banda ω_B nos indica que tan rápido es un sistema. Rec
Depende también de la potencia que puede entregar el actuador co
el sistema de control

En ancho de banda ω_B también nos entrega una noción de que tan r
sistema. A mayor ancho de banda mas componentes de ruido puede
lazo cerrado. **No incremente innecesariamente el ancho de band**

Máximo Peak en el dominio de la frecuencia



$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$
$$\zeta \leq 0.707$$

El máximo peak en el dominio de la frecuencia, a lazo cerrado, está correlacionado con el coeficiente de amortiguamiento y con el máximo sobrepaso de la respuesta en el tiempo.

Ancho de banda y frecuencia de cruce

- Empíricamente se puede demostrar que la frecuencia de corte y el ancho de banda están relacionados por:

$$\omega_B \approx 1.6\omega_c \quad \text{para} \quad 0.3 \leq \zeta \leq 0.8$$

- Al igual que en lugar de la raíz, el sistema de segundo orden es también la base para el diseño de controladores en el dominio de la frecuencia. El sobrepaso en el dominio de la frecuencia nos entrega otro dato interesante.

Coeficiente de amortiguamiento ζ	Sobrepaso en el dominio de la frecuencia (Mp)	Sobrepaso en el dominio del tiempo. (Mt)
<i>0.7</i>	<i>1.0002</i>	<i>1.0460</i>
<i>0.6</i>	<i>1.0417</i>	<i>1.0948</i>
<i>0.5</i>	<i>1.1547</i>	<i>1.1630</i>
<i>0.4</i>	<i>1.3639</i>	<i>1.2538</i>
<i>0.3</i>	<i>1.7471</i>	<i>1.3723</i>
<i>0.2</i>	<i>2.5516</i>	<i>1.5266</i>
<i>0.1</i>	<i>5.0252</i>	<i>1.7292</i>

En general existe una correlación entre el sobrepaso en el dominio de la frecuencia y el sobrepaso en el dominio del tiempo para el sistema de segundo orden.

Recuerde: Sistema de segundo orden ideal.