

Modelos de Pequeña Señal

Los sistemas lineales son aquellos en que se puede aplicar proporcionalidad y superposición. Matemáticamente, dado un conjunto de vectores (x,y,z) y un conjunto de escalares (a,b,g) , una función es lineal si:

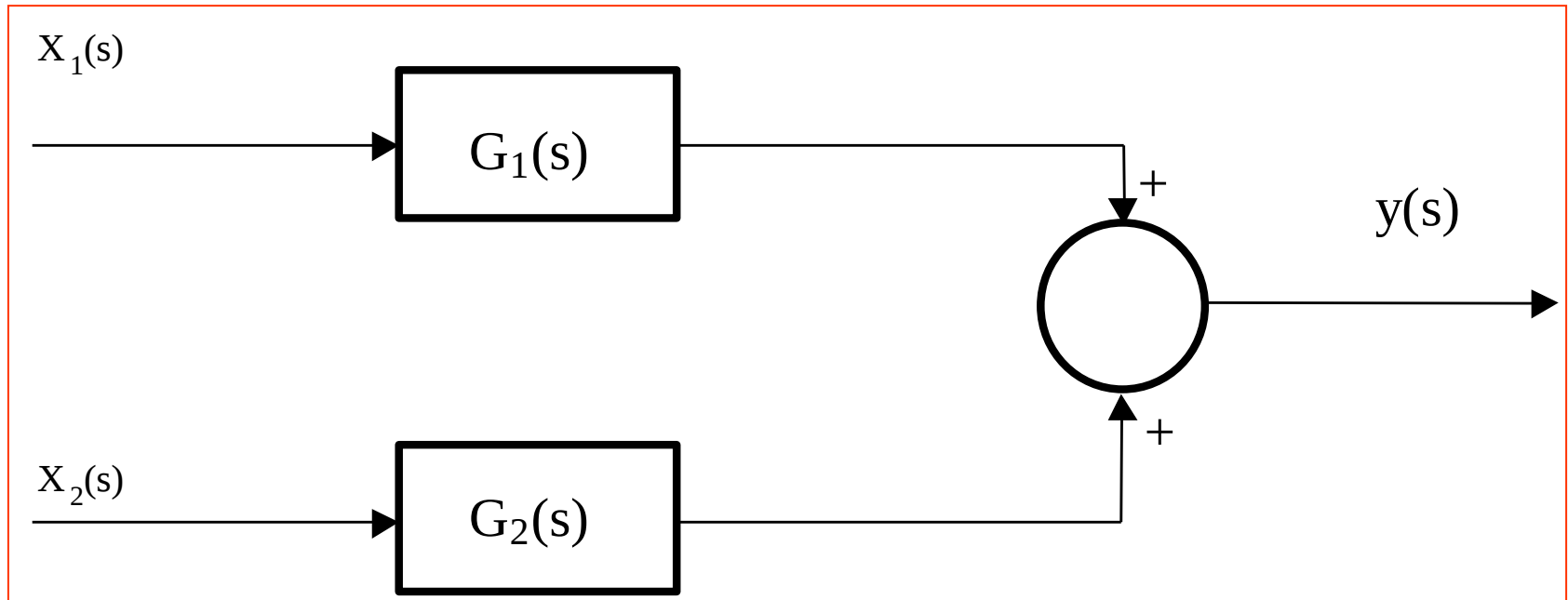
$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Proporcionalidad

$$f(x + y + z) = f(x) + f(y) + f(z)$$

Superposición

Los sistemas no lineales complican el diseño de compensadores. Por ejemplo en la figura se tiene:



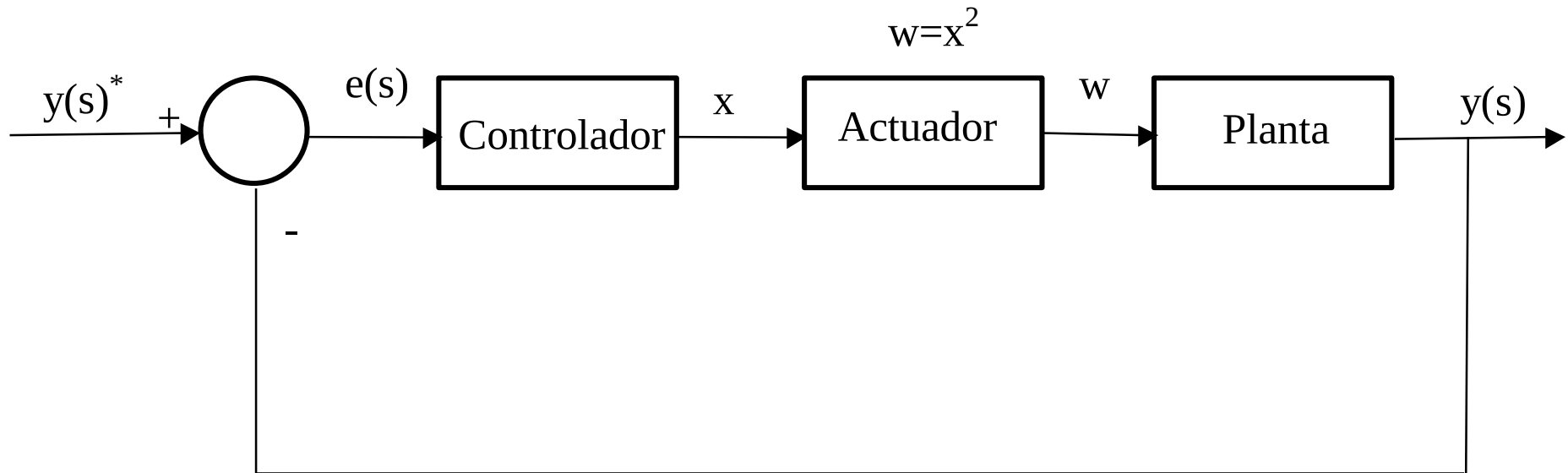
Si el sistema es lineal, la salida puede calcularse como $y(s) = x_1(s)G_1(s) + x_2(s)G_2(s)$.

Sistemas no lineales

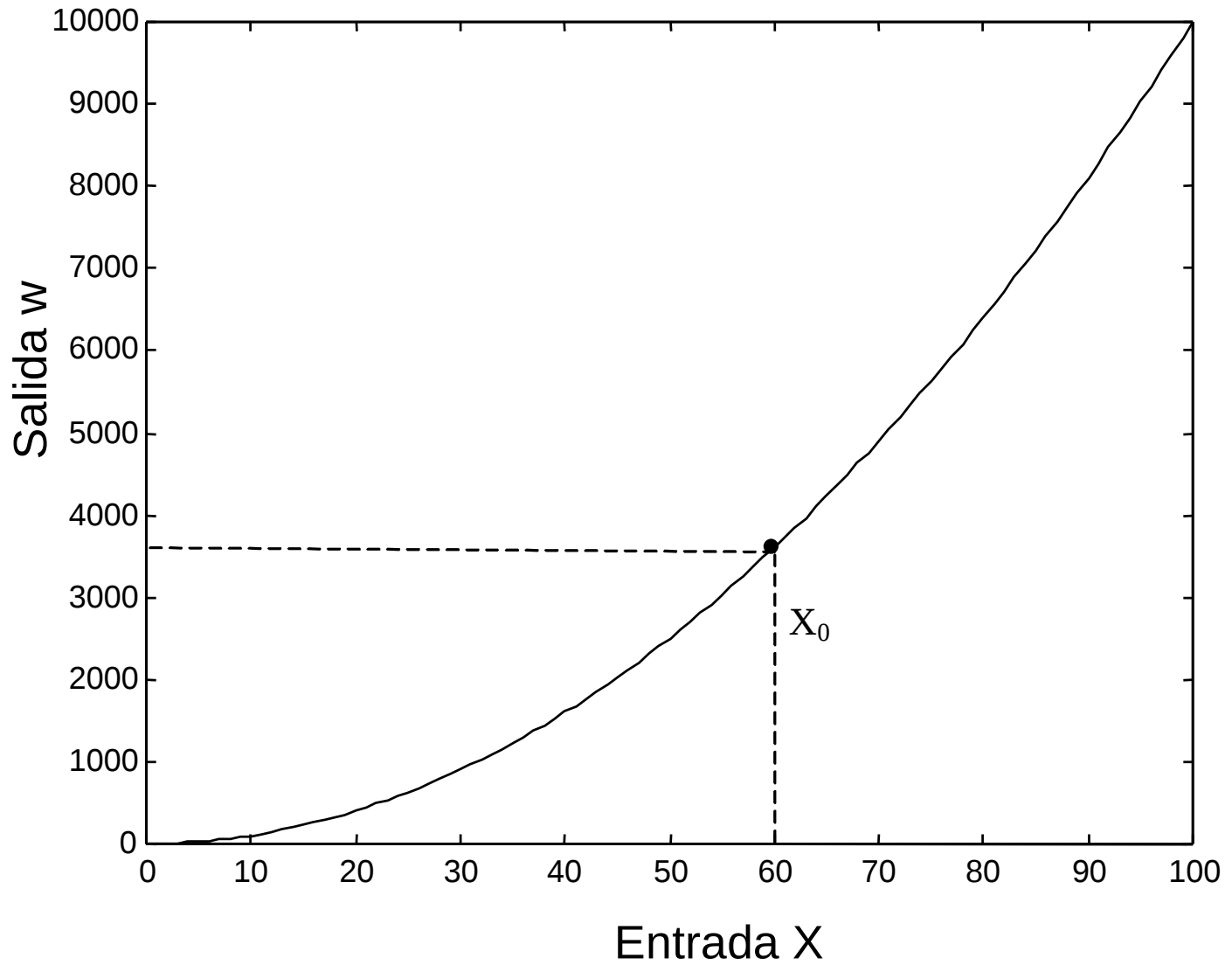
- ¿ Qué sucede si en uno de los bloques, la salida es proporcional al cuadrado de la entrada?

Linealización de Sistemas no Lineales

Este es un sistema de control en que existe una función no lineal en el actuador.

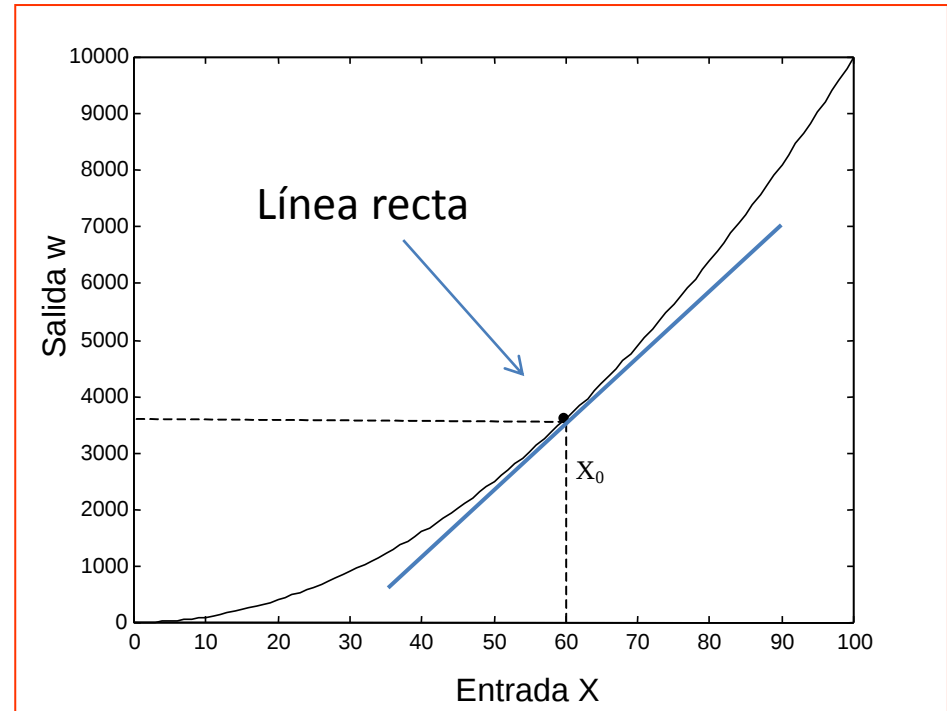


La función de transferencia del actuador se muestra en la siguiente figura:

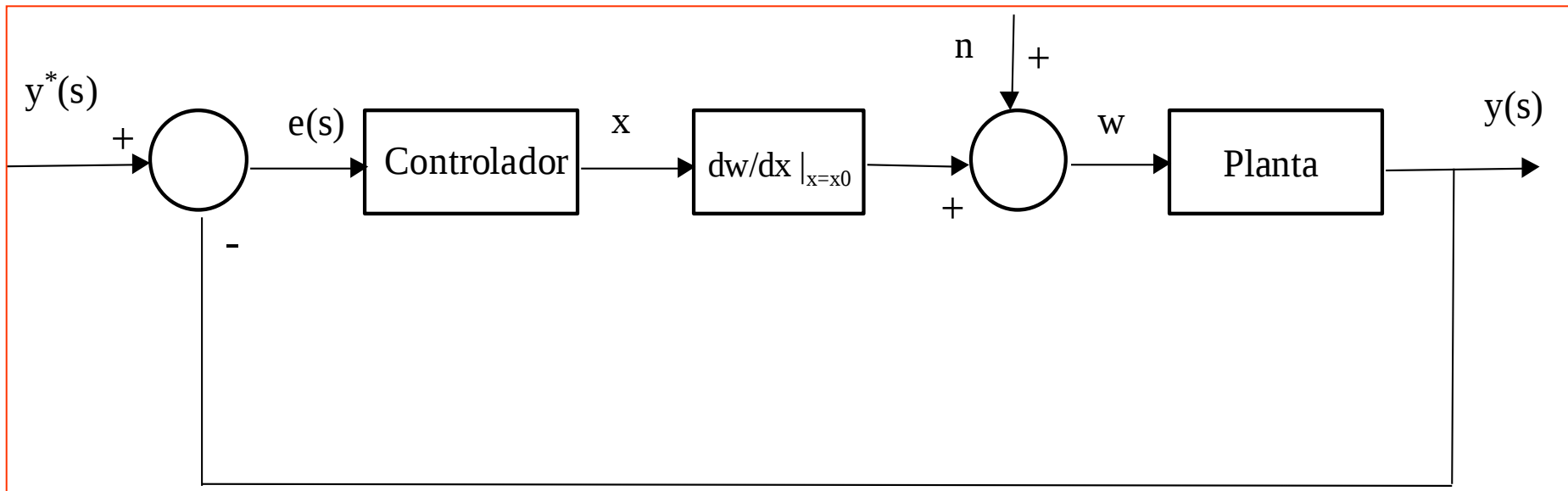


El modelo de pequeña señal del sistema se basa en que alrededor de un punto, por ejemplo X_0 , se puede trazar una línea recta que representa a la función de transferencia en los alrededores de X_0 .

$$w = x \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} + n$$



Donde n es una constante o el punto donde ésta recta imaginaria corta el eje w .

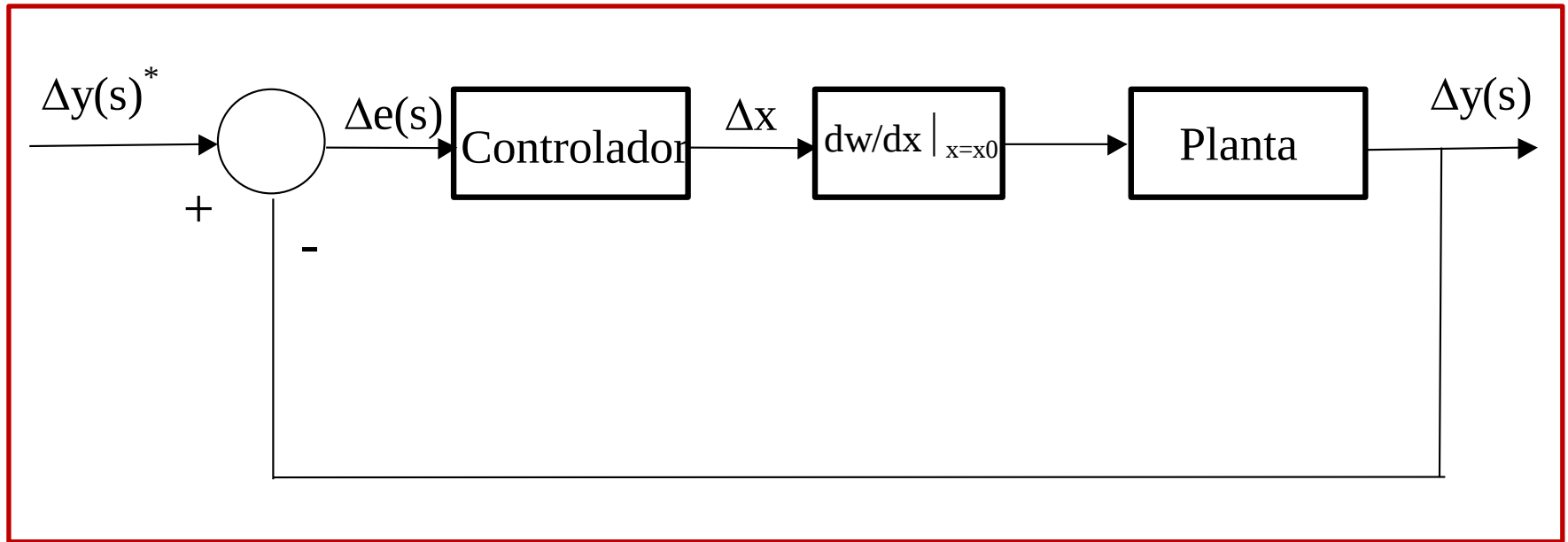


- Como se demostró en uno de los apuntes anteriores, la función de transferencia de un sistema de control tiene idénticos polos de lazo cerrado independiente de la posición de la entrada en el lazo de control.
- Aplicando superposición solo se necesita analizar la función de transferencia $y(s)/y^*(s)$ para ubicar los polos de lazo cerrado.
- En general se utilizan señales incrementales. El modelo incremental se deduce como:

$$\begin{aligned}w_1 &= x_1 \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} + n \\w_2 &= x_2 \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} + n \\ \Delta w &= \Delta x \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0}\end{aligned}$$

Donde los puntos X_1 y X_2 se encuentran en la vecindad de la señal x_0 .

Utilizando señales incrementales, el sistema de control se puede modificar a:



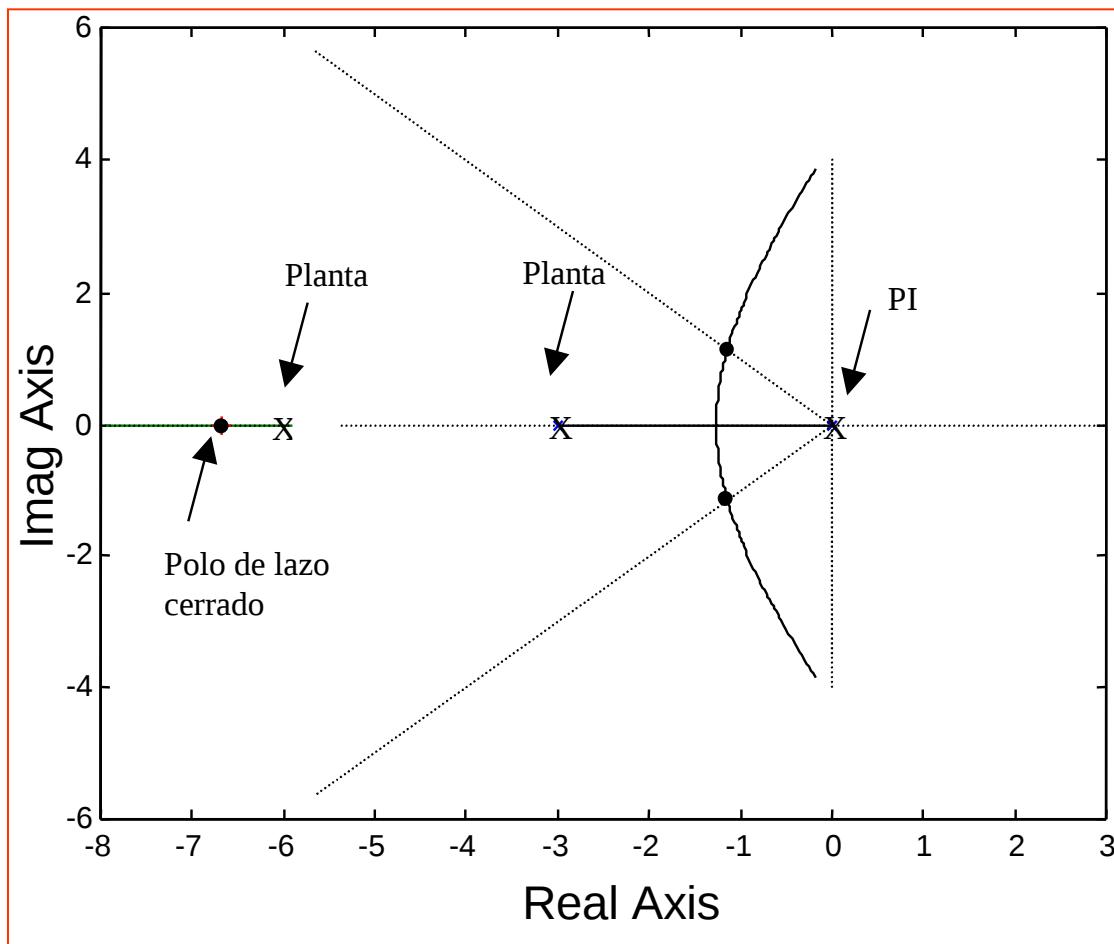
Ejemplo. se desea diseñar un sistema de control para una planta $G(s)$ de la forma:

$$G(s) = \frac{36}{(s + 6)(s + 3)(s + 2)}$$

Con un actuador de la forma: $w = 10x^2$

Suponiendo que se utilice un controlador PI diseñado por cancelación se tiene:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + 2}{s}$$



Si se utiliza un punto de operación $x_0=5$, se tiene:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} = 20x_0 = 100$$

La ganancia del sistema para operar con un coeficiente de amortiguamiento de 0.7 es 0.4586. Esto significa que la ganancia del controlador se calcula como:

$$K_{sistema} = k_c \times 20x_0 \times 36 \quad \Rightarrow \quad k_c = 0.4586 / (100 \times 36)$$

- Cuando se tienen no linealidades “suaves” o acotadas se puede diseñar un sistema de control en un punto medio y conservar una buena respuesta dinámica a pesar de que existan cambios en el punto de operación.

- Por ejemplo si la variable puede variar solo entre 5 y 10, la ganancia representada por dw/dx puede variar entre 100 y 200. La ganancia intermedia es 150.

- k_c es $0.4586/(150 \times 36)$.

¿Que sucede cuando el punto de operación se mueve entre 5 y 10? .

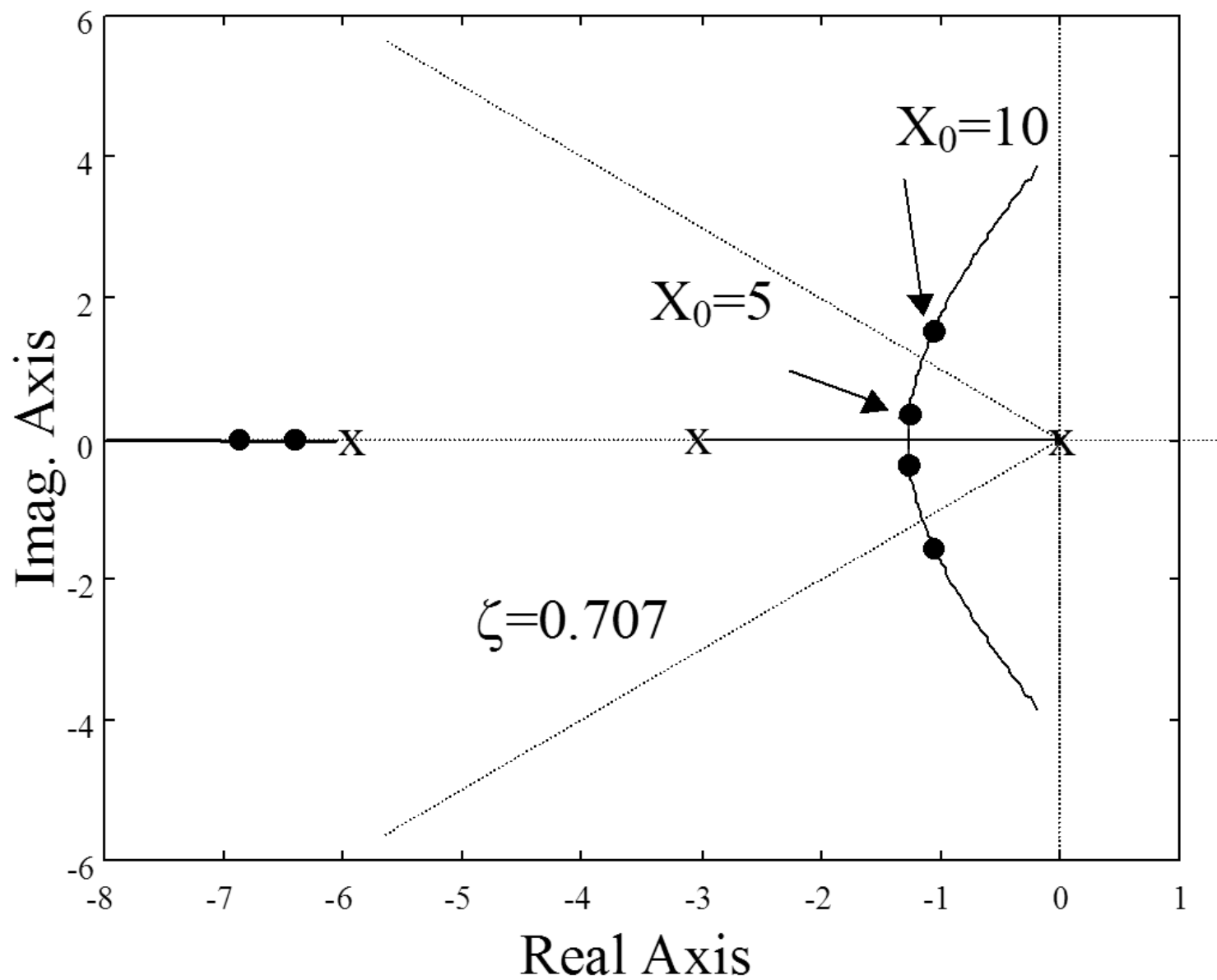
$$x_0 = 5 \Rightarrow K_{sistema} = 0.4586 \frac{100}{150} = 0.3057$$

$$x_0 = 10 \Rightarrow K_{sistema} = 0.4586 \frac{200}{150} = 0.6114$$

- Al cambiar el punto de operación, cambia la ganancia del sistema y también cambia la posición de los polos de lazo cerrado.
- Cuando se usa el punto de equilibrio original, el sistema operaba con un coeficiente de amortiguamiento de 0.707 y una frecuencia natural de 1.57 rads^{-1} .
- Al moverse a $x_0=5$ los polos de lazo cerrado se desplazan a $\omega_n=1.29 \text{ rads}^{-1}$ con un coeficiente de amortiguamiento de 0.97.

- En $x_0=10$ los polos de lazo cerrado se encuentran con un coeficiente de amortiguamiento de 0.62 y una frecuencia natural de 1.75 rads^{-1} .

- A pesar del desplazamiento de los polos el sistema mantiene una operación razonable pero esto se debe solo a que la no linealidad se encuentra acotada .



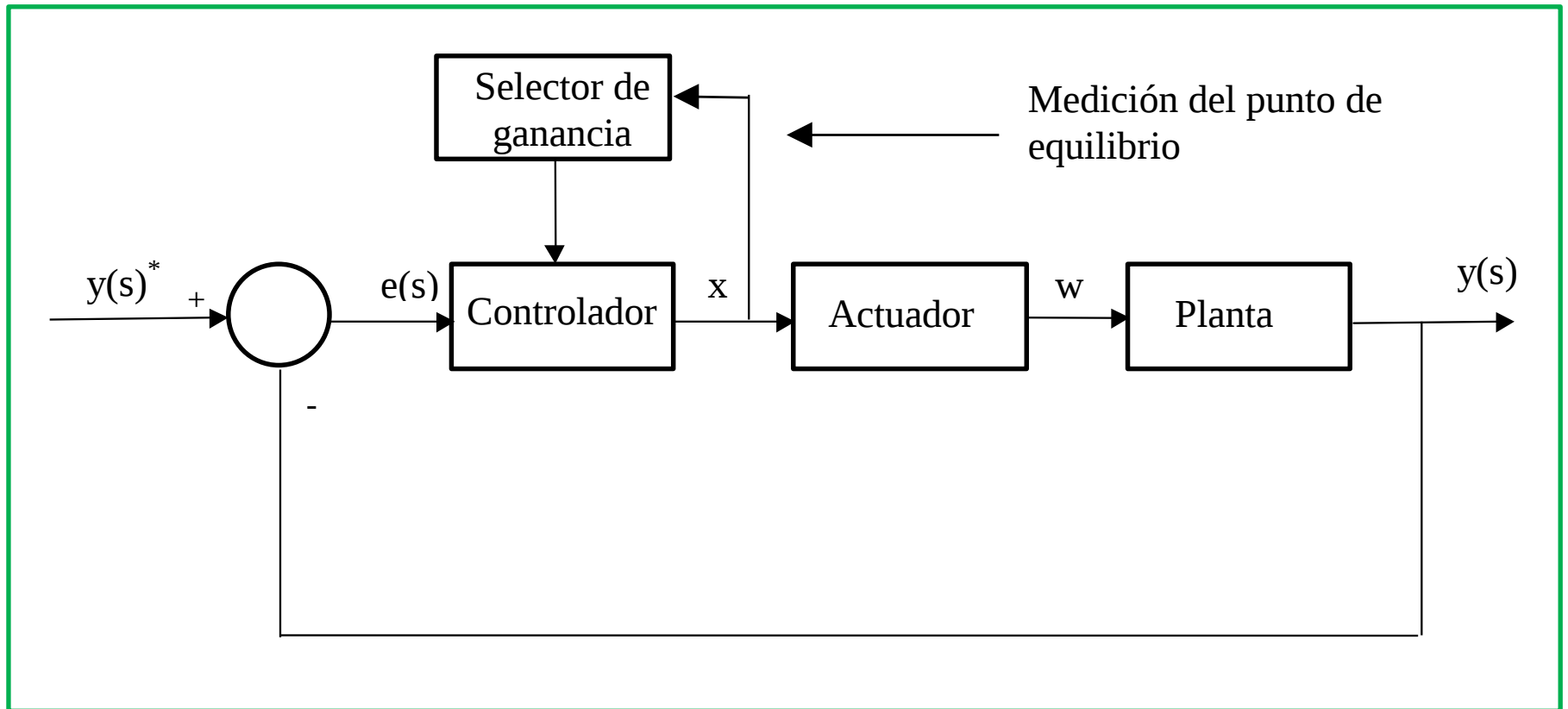
- Pero supongamos ahora que la no linealidad no se encuentra acotada y que el punto superior de x_0 puede tomar valores mucho mayores.
- Utilizando el lugar de la raíz se puede observar que los polos de lazo cerrado cruzan al semiplano izquierdo cuando la ganancia del sistema es mayor a 4.5 (aproximadamente).
- O sea el sistema puede volverse inestable si las ganancias no son modificadas.

Por lo tanto, para un sistema altamente no lineal, el diseñar un sistema de control en base a un punto medio no es apropiado.

se debe recurrir a otros esquemas de control como el sistema denominado escalera de ganancias o gain scheduling.

Gain Scheduling

- Cuando un sistema de control no puede diseñarse en torno a un solo punto de operación se pueden utilizar varios.
- Para cada punto de operación la ganancia del controlador es calculada de forma que el sistema se encuentre con un coeficiente de amortiguamientos y frecuencia natural apropiada.
- Luego, en funcionamiento, el punto de operación se mide y se selecciona la ganancia que entrega la mejor respuesta.



Sistema de control basado en gain-scheduling.

Por ejemplo si el actuador tiene un limite de operación entre 0-2500, se pueden establecer 25 puntos de operación equidistantes , cada 100 unidades.

Se debe encontrar la ganancia del controlador para cada uno de ellos de forma que el sistema a lazo cerrado se encuentre operando con un coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural casi constantes.

El cambio de ganancia se efectúa midiendo alguna variable relacionada con el punto de equilibrio del sistema.

- Sin embargo gain-scheduling debe diseñarse adecuadamente ya que la medición del punto de equilibrio introduce un nuevo lazo de realimentación en el sistema.
- Esto puede producir cambios en las características dinámicas del lazo de control e incluso inestabilidad.