Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Magallanes

Sistemas de Segundo Orden

Apuntes del curso de Control Automático

Roberto Cárdenas Dobson

Ingeniero Electricista Msc. Ph.D.
Profesor de la asignatura

Este apunte se encuentra en la página web http://ona.fi.umag.cl/~rcd

I. Sistemas de Segundo Orden

Entender el sistema de segundo orden es muy importante para el diseño de controladores ya que habitualmente la mayor parte de los sistemas pueden ser aproximados a un sistema de orden dos. La función de transferencia de un sistema de segundo orden es:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1}$$

Donde el término ω_n se denomina frecuencia natural y ζ es el coeficiente de amortiguamiento. Si se consideran polos complejos conjugados ($0 < \zeta < 1$), la respuesta en el tiempo para entrada escalón es:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sin\left[\omega_n\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \theta\right] \tag{2}$$

Donde el término $\zeta\omega_n$ es la parte real de los polos complejos y $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ es la parte imaginaria. (El término $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ también se denomina frecuencia natural amortiguada o ω_d). Existen dos factores que determinan la forma y la velocidad de respuesta del sistema de segundo orden. Estos factores son la frecuencia natural ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ζ. En la Fig. 1 se muestra la representación en el plano complejo de un sistema de segundo orden. Por simplicidad, solo uno de los polos complejos se muestra en esta figura.

La frecuencia natural ω_n es la distancia que existe entre el origen al polo y el coeficiente de amortiguamiento es el coseno del ángulo mostrado en la figura. Cuando el coeficiente de amortiguamiento es cero, los polos complejos no tiene parte real y cuando el coeficiente de amortiguamiento es uno (o mayor que uno) los polos complejos son puramente reales. Figura 2 muestra la respuesta en el tiempo del sistema de segundo orden. Cuando el coeficiente de amortiguamiento es cero o cercano a cero el sistema es altamente oscilatorio con una respuesta poco adecuada para ser utilizada en un sistema de control. Cuando el coeficiente de amortiguamiento es cercano a uno la respuesta es sobreamortiguada y lenta y también se considera poco apropiada para ser utilizada en algunos sistemas de control.

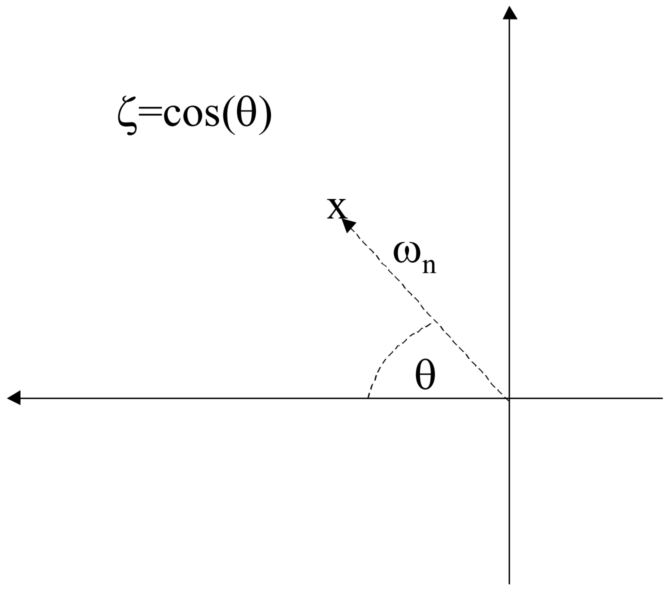

Figura 1. Representación en el plano complejo del sistema de segundo orden.

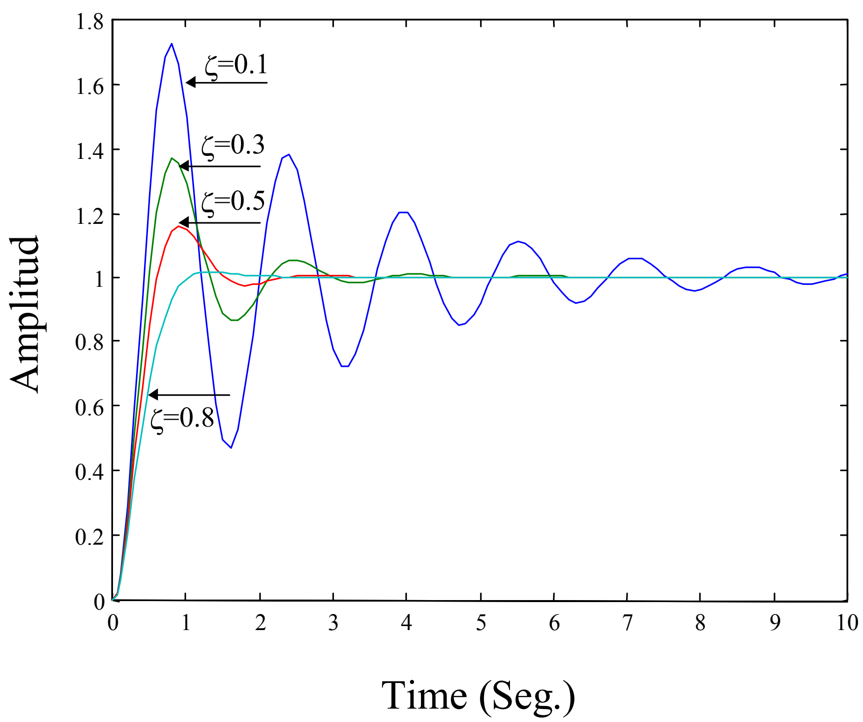

Figura 2. Respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden.

En general el coeficiente de amortiguamiento de un sistema debería diseñarse con valores entre 0.5 a 0.8, pero existen caso en que se permiten coeficiente de amortiguamiento menores y mayores. Por ejemplo si para una planta dada no es conveniente la existencia de sobrepaso, entonces el coeficiente de amortiguamiento debe ser mayor o igual que uno (los polos no deben tener parte imaginaria). Un buen criterio de diseño es utilizar un coeficiente de amortiguamiento de aproximadamente 0.707, lo que significa que el ángulo θ de la Fig. 1 es cercano a los 45°. En estas condiciones el sistema es mas robusto a las variaciones en los parámetros de la planta o actuador. Recuerde además que para un coeficiente de amortiguamiento de 0.707 la frecuencia natural es igual al ancho de banda del sistema (sistema de segundo orden ideal).

De la discusión anterior se puede concluir que el sistema de segundo orden tiene dos parámetros de diseño, la frecuencia natural que esta relacionada con la velocidad de la respuesta y el coeficiente de amortiguamiento que esta relacionado con la forma de onda de la respuesta.

Al igual que el lugar de la raíz, la mayor parte de los métodos utilizan dos parámetros de diseño. Cuando se utilizan los gráficos de Bode los parámetros de diseño son el margen de fase y la frecuencia de cruce (o ancho de banda) y cuando se utiliza Nyquist directo o inverso

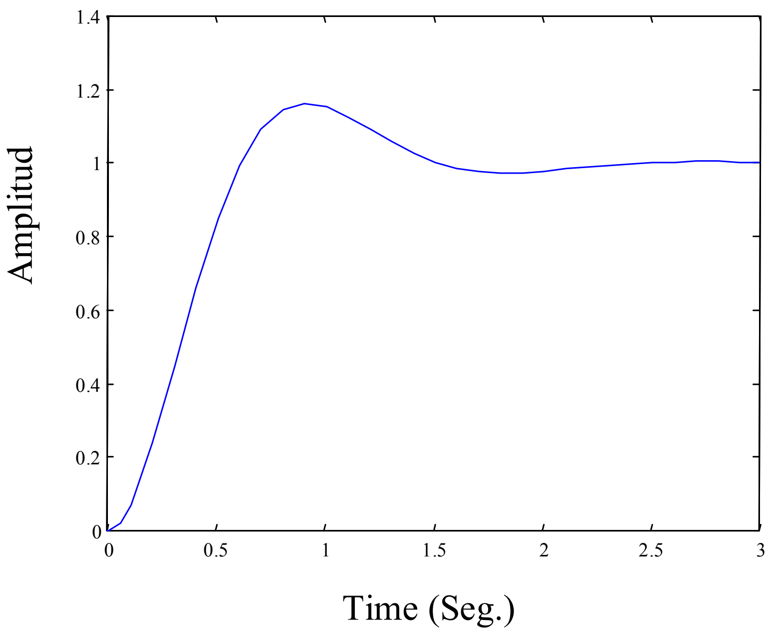

Figura 3. Respuesta para ω_n= 4rads^{-1}

los parámetros de diseño son el circulo M y la frecuencia de sobrepaso ω_m (no confundir con la frecuencia natural ω_n). Figura 3 muestra la respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden con coeficiente de amortiguamiento 0.5 y frecuencia natural de 4 $rads^{-1}$. Figura 4 muestra la respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden con el mismo coeficiente de amortiguamiento pero con una frecuencia natural de 8 $rads^{-1}$. Notese que la forma de la Fig. 3 es exactamente la misma que la forma de la Fig. 4, pero una de ellas es dos veces mas rápida. La mayor velocidad de respuesta corresponde a los polos que se encuentran mas alejados del origen.

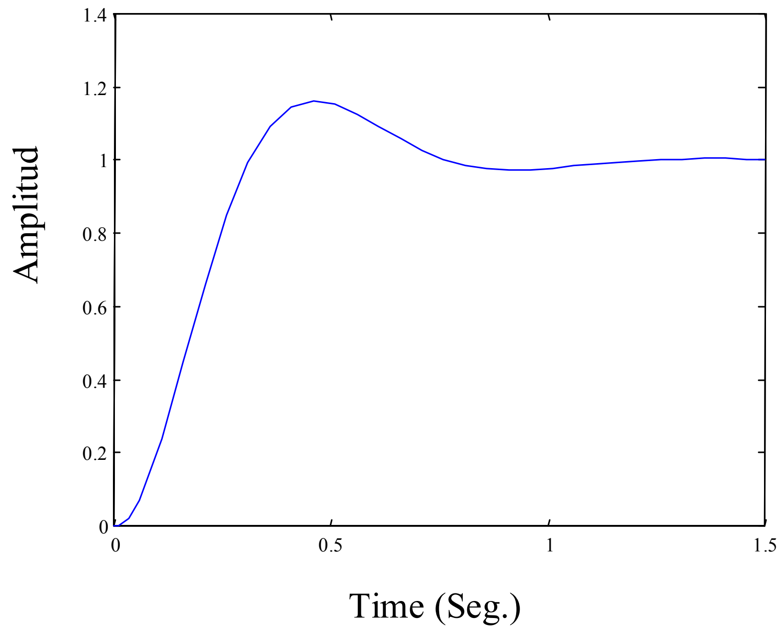

Figura 4. Respuesta para ω_n= 8$rads^{-1}$

1.1 Formulas del Sistema de Segundo Orden

Existen algunas formulas asociadas con el sistema de segundo orden y que son utilizadas al diseñar sistemas de control. La deducción de estas formulas se encuentran en algunos libros de los cuales se recomiendan los siguientes:

Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, " Modern Control System", ninth edition

John J. D'Azzo and Constantine H. Houpis, "Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern", 3rd Edition.

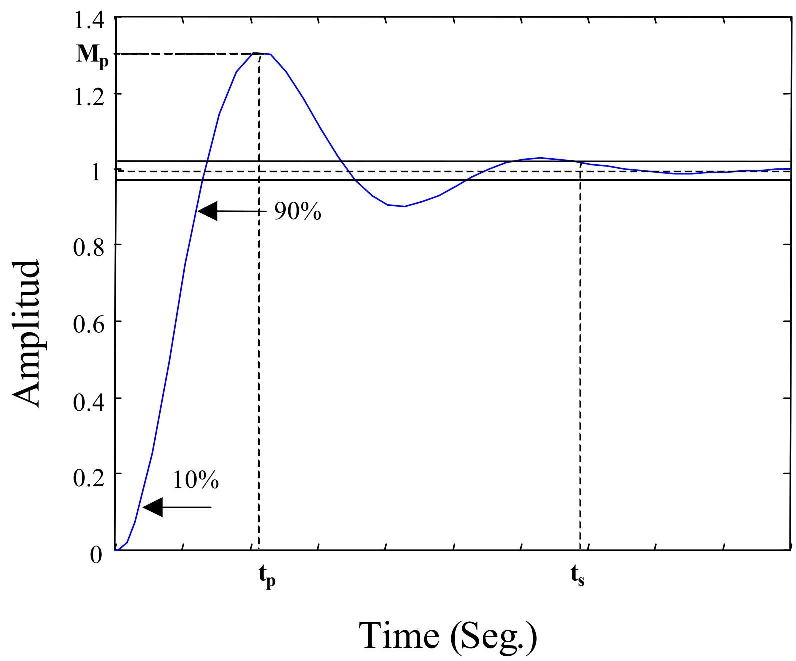

Figura 5. Forma de onda del sistema de segundo orden.

Las formulas se explican utilizando la Fig. 5.

- El porcentaje de sobrepaso (overshoot) es una medida del valor de sobrepaso que tiene la respuesta del sistema por sobre la amplitud de la entrada escalón. En general sobrepasos muy altos deben ser evitados ya que producen esfuerzos inadecuados en los componentes físicos de un sistema (actuador, planta u otros). La fórmula para calcular el sobrepaso es:

$$M_p = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \text{(Sobrepaso en tanto por uno)} \qquad (4)$$

$$P.O = 100 e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \text{(Porcentaje de sobrepaso o overshoot)} \qquad (5)$$

Nótese que (para un sistema de segundo orden ideal) el sobrepaso depende solamente del coeficiente de amortiguamiento y no se encuentra afectado por la frecuencia natural. La siguiente tabla muestra el porcentaje de sobrepaso como una función del coeficiente de amortiguamiento.

Tabla I. Porcentaje de sobrepaso vs. coeficiente de amortiguamiento

ζ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
P.O	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

- El tiempo de establecimiento (settling time) es una medida de la velocidad del sistema. Este parámetro mide el tiempo en que la respuesta queda acotada a una cierta banda de amplitud (ver Fig. 5). Para una banda del 2% el tiempo de establecimiento esta definido como:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad (6)$$

El tiempo de establecimiento depende del coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural. Sin embargo, al diseñar sistemas de control, el tiempo de establecimiento se modifica utilizando solo la frecuencia natural ya que cambios en el coeficiente de amortiguamiento pueden producir formas de onda no deseada en la respuesta del sistema.

- El tiempo de respuesta máxima (time to peak). Este es el tiempo en que se produce la máxima amplitud de salida.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (7)$$

- El tiempo de subida (rise time o T_r) es el tiempo que toma la respuesta para subir desde el 10% al 90% de la amplitud del escalón de entrada. El tiempo de subida para un sistema de segundo orden es aproximado por la siguiente expresión.

$$T_r = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} \qquad 0.3 \le \zeta \le 0.8 \qquad (8)$$

Nótese que el tiempo de subida, al igual que el de establecimiento, es afectado por el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural.

1.2 Sistema de Segundo Orden no Ideal

En las páginas anteriores se han analizados los conceptos relacionados con el sistema de segundo ideal. En esta sección se discutirán dos tipos de sistemas, estos son; el sistema de segundo orden con un polo extra y el sistema de segundo orden con un cero extra. Se analizará la influencia que tiene la posición del polo o cero extra en la velocidad y forma de onda de la respuesta.

A. Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra.

La función de transferencia considerando un polo extra es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2 a}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\right)\left(s + a\right)} \qquad (9)$$

Nótese que al igual que (1), cuando se considera entrada escalón unitario en (9) la salida en estado permanente alcanza el valor de uno (para $\zeta>0$).

La siguiente tabla muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un extra polo, $\omega_n=1$, $\zeta=0.45$.

Tabla 2. Influencia de un polo extra en la respuesta del sistema

Posición a del polo extra	*Porcentaje de sobrepaso*	*Tiempo de establecimiento*
0.444	0.0	9.63
0.666	3.9	9.30
1.111	12.3	8.81
2.500	18.6	8.67
20.0	20.5	8.37
∞	20.5	8.24 (*)

(*) Estos valores corresponden al sistema de segundo orden ideal.

En general un polo real extra produce una respuesta mas lenta y con menor sobrepaso. El efecto del polo extra es despreciable cuando se cumple la siguiente condición:

$$|a| \geq 10|\zeta\omega_n| \qquad (10)$$

Lo que significa que el polo extra se encuentra a diez veces de la parte real de los polos complejos conjugados.

B. Sistema de Segundo Orden con un Cero Extra.

La función de transferencia, considerando un cero extra, es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{\omega_n^2/a\ (s+a)}{\left(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2\right)} \tag{11}$$

La siguiente tabla muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un cero extra, $\omega_n=1$, $\zeta=0.45$.

Tabla 3. Influencia de un cero en la respuesta del sistema

a/(ζω$_n$)	*Porcentaje de sobrepaso*	*Tiempo de establecimiento*	*Tiempo de peak*
10	21.1	8.13	3.28
5	23.10	8.0	3.0
1	89.90	10.1	2.2
0.5	210.0	10.3	1.5
0.1	1220	15.79	1.3

Debe tenerse en cuenta que los valores mostrados en las tablas 1 y 2 han sido obtenidos utilizando MATLAB y SIMULINK y por lo tanto no son exactos sino que son dependientes de valores como por ejemplo mínimo y máximo paso de integración, resolución utilizada, método de integración empleado, etc. Sin embargo, aunque no exactos, los resultados mostrados permiten analizar tendencias y obtener conclusiones acerca de la influencia de los ceros y polos en la respuesta del sistema.

La influencia de los ceros es a veces ignorada o no completamente entendida. Los ceros en una función de lazo cerrado **no afectan** la estabilidad de ésta, pero tienen una influencia significativa especialmente en el sobrepaso (también en el tiempo de establecimiento). Cuando el cero de (11) se encuentra suficientemente alejado de la parte real de los polos complejos conjugados, la respuesta es casi idéntica a la obtenida con un sistema de segundo orden ideal. Sin embargo, cuando el cero se acerca a los polos complejos, el sobrepaso de la respuesta aumenta significativamente y éste puede ser varias veces superior a la respuesta de un sistema de segundo orden ideal. Figura 6 muestra la respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden mas un cero, considerando dos posiciones para el cero.

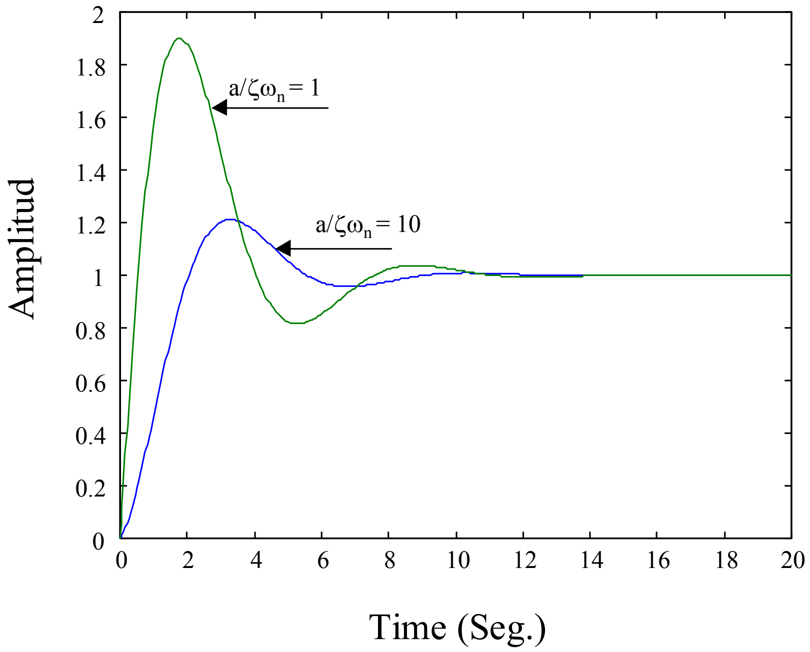

Figura 6. Influencia de la posición del cero en la respuesta del sistema.

La influencia de los ceros es mejor entendida si consideramos la siguiente función en el domino de Laplace (función de transferencia sin ceros):

$$y(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^{N}(s+p_i)} = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} + \dots\dots\dots \frac{A_N}{s+p_N} \qquad (12)$$

La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (12) obteniéndose:

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \dots\dots\dots\dots\dots A_N e^{-p_N t} \qquad (13)$$

Donde los polos p_i pueden ser reales o complejos conjugados. Suponiendo ahora que la función de transferencia en (12) incluye ceros, se tiene:

$$y(s) = \frac{k \prod_{j=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{N} (s + p_i)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \ldots\ldots\ldots \frac{A_N}{s + p_N} \qquad (14)$$

Donde N ≥ M. La expansión en fracciones parciales utiliza los polos y no los ceros por lo tanto (14) tiene la misma forma que (12). La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (14) obteniéndose:

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_N e^{-p_N t} \qquad (15)$$

¿Cual es la diferencia entre (15) y (13)?. La diferencia está en los coeficientes A_1, A_2...A_N los cuales no son iguales en las dos ecuaciones. Los coeficientes A_i que resultan de la expansión en fracciones parciales son función de la posición de los ceros. Sin embargo, los términos que participan en funciones del tiempo son los mismos (e^{-pt}). Por ese motivo la estabilidad del sistema no es comprometida por los ceros (pero los sobrepasos pueden ser inaceptables).

1.3 Polos Dominantes

En muchas aplicaciones es posible encontrar sistemas que tienen alto orden y que no pueden representarse fácilmente como un sistema de segundo orden o un sistema de segundo orden con un polo o cero extra. En este caso el diseñador debe identificar aquellos polos que son dominantes en la respuesta y concentrarse (pero no exclusivamente) en ellos. Por ejemplo en una función de transferencia como la siguiente:

$$y(t) = 1 - 3e^{-5t} - 3e^{-50t} \qquad (16)$$

la respuesta en el tiempo que depende del polo ubicado en 5 es la dominante. Asumiendo que el valor de la exponencial es despreciable después de 3 veces la constante de tiempo, entonces la respuesta del polo ubicado en 50 desaparece después de solo 60 milisegundos mientras la respuesta en el tiempo del polo ubicado en 5 afecta al sistema por 600 milisegundos. Es decir el polo cercano al origen tiene influencia durante un tiempo considerablemente mayor.

En el diagrama de polos y ceros (a lazo cerrado), los polos que se encuentran mas cerca del origen son considerados dominantes. Si los polos que están cercanos al origen tienen un bajo coeficiente de amortiguamiento el sistema tendrá una respuesta oscilatoria e inapropiada aunque los polos no dominantes tengan un valor de ζ adecuado. Desafortunadamente el que los polos dominantes estén bien ubicados no significa necesariamente que la respuesta sea la adecuada, ya que los demás polos aunque no dominantes también tienen cierto grado de influencia en el comportamiento del sistema. Por lo tanto en términos matemáticos se podría decir que polos dominantes bien ubicados es una condición necesaria pero posiblemente insuficiente para tener una respuesta adecuada en un sistema.

Figura 7 muestra la respuesta de cada polo de acuerdo a su ubicación. El polo mas cercano al

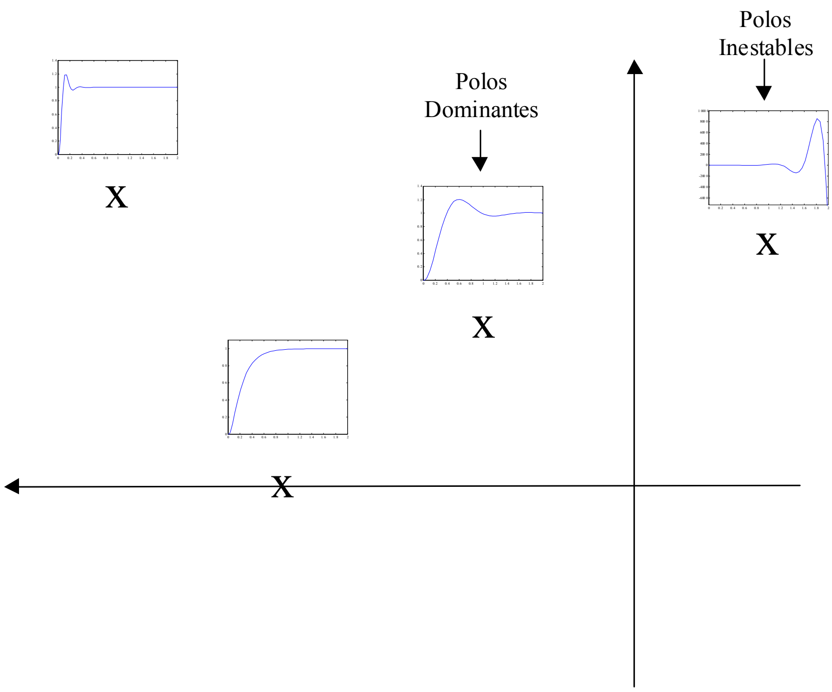

Figura 7. Influencia de la posición de los polos en la respuesta del sistema.

origen es el dominante si es que no existen polos inestables. Si es que existen polos inestables (a lazo cerrado) no tiene mayor sentido discutir cual es el dominante porque la respuesta será completamente inapropiada independiente de la posición en que se encuentren los polos del semiplano izquierdo (aunque parezca trivial debe tener claro que para un sistema con N polos, solo uno de estos debe estar en el semiplano derecho para que el sistema sea inestable).

Existen algunos sistemas en que es difícil distinguir cual polo(s) real o complejo es dominante. Este es el caso de polos que están ubicados muy cerca uno de otros, o polos que están muy ubicados cerca de ceros. En este último caso el polo es casi cancelado por el cero y aunque el polo se encuentre muy cerca del origen puede que su respuesta en el tiempo no tenga mayor influencia en la salida total del sistema.

Si un sistema es muy complejo y no puede identificar fácilmente cuales son los polos dominantes esto no es preocupante. Posicione los polos mas cercanos al origen con un coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural adecuada y utilice prueba y error ayudándose con simulación. El sistema de segundo orden es solo una guía de diseño y lo mas importante en control automático son las **soluciones simples** y que su sistema de control **funcione**.