



Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Magallanes

Kindergarten de Diseño de Controladores

Apuntes del curso de Control Automático

Roberto Cárdenas Dobson

*Ingeniero Electricista Msc. Ph.D.
Profesor de la asignatura*

Este apunte se encuentra disponible en la página web <http://ona.fi.umag.cl/~rcd>

IV. Kindergarten de diseño de controladores

No existen reglas para el diseño de controladores. Para una planta y especificaciones dadas pueden existir dos o mas controladores que entreguen buen desempeño. En las siguientes páginas se estudiarán varios enfoques para diseñar un controlador simple para una planta de primer orden.

Estos enfoques están basados en la experiencia del autor y de ninguna manera son únicos. El estudiante debe recordar que las únicas limitaciones que existen para diseñar un controlador son:

- a) El controlador debe cumplir con las especificaciones a lazo cerrado.
- b) El controlador debe ser simple. Las soluciones complicadas pueden ser difíciles de implementar. Recuerde, en ingeniería las soluciones simples son las que funcionan.

Cumpliendo con estos requerimientos, todos los controladores son apropiados.

La planta de primer orden:

$$\frac{a}{s + a} \quad (1)$$

Es muy común, especialmente en máquinas eléctricas. En las siguientes secciones se estudiarán controladores para cumplir con las siguientes especificaciones a lazo cerrado:

- *Cero error a estado estacionario para una entrada escalón.*
- *Frecuencia natural ω_n .*
- *Coefficiente de amortiguamiento ζ .*

Antes de estudiar cualquier controlador se puede obtener la siguiente información, considerando las especificaciones del sistema:

- 1) El sistema a lazo abierto debe tener un polo en el origen. Sin este polo no es posible obtener cero error a estado estacionario con entrada escalón.

- 2) Todas las combinaciones posibles de polos a lazo cerrado, que entregan una frecuencia natural ω_n forman un semicírculo de radio ω_n . Esto se muestra en la siguiente figura:

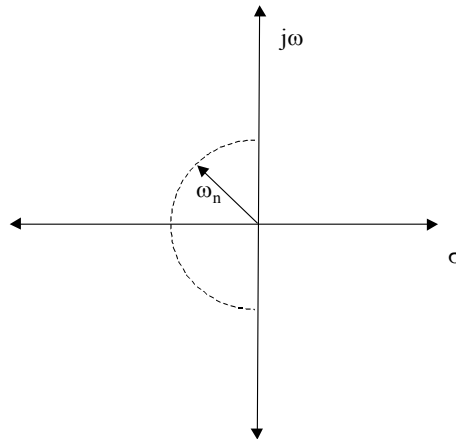


Figura 1. Locus de ω_n constante.

- 3) Todas las combinaciones posibles, de polos a lazo cerrado, que entregan un coeficiente de amortiguamiento ζ forman una línea recta. Esto se muestra en la siguiente figura:

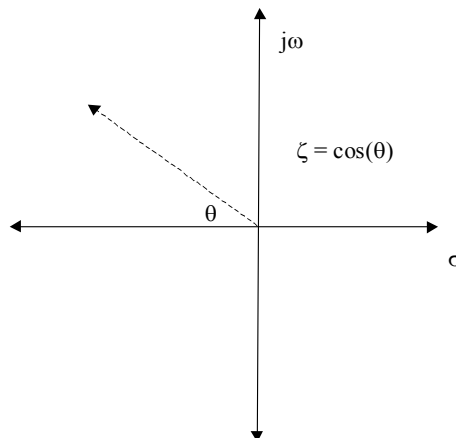


Figura 2. Locus de coeficiente de amortiguamiento constante.

Todos los polos de lazo cerrado que entregan una respuesta con similar tiempo de establecimiento forman una línea recta perpendicular con el eje real. Esto se debe a que el tiempo de establecimiento está dado por la siguiente expresión:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (2)$$

donde el término $\zeta\omega_n$ es equivalente a la parte real de los polos complejos conjugados. El locus de un sistema de segundo orden con un tiempo de establecimiento dado se muestra en la siguiente figura:

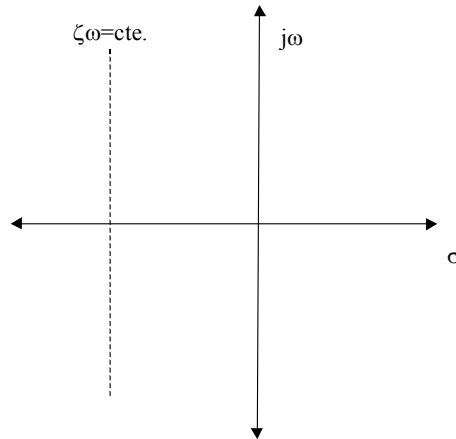


Fig. 3. Locus de tiempo de establecimiento constante.

IV.1 Diseño de un controlador tipo PI.

El método mas utilizado para controlar una planta de primer orden, de acuerdo a las especificaciones entregadas anteriormente, es utilizar un controlador tipo PI. En este caso el controlador tiene la forma:

$$\frac{u(s)}{e(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} \Rightarrow \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{K_p(s + K_i / K_p)}{s} \quad (3)$$

Donde $e(s)$ es el error, $u(s)$ la señal de salida del controlador, K_p la constante proporcional y K_i la constante integral del controlador. La siguiente figura muestra el sistema de control incluyendo el controlador:

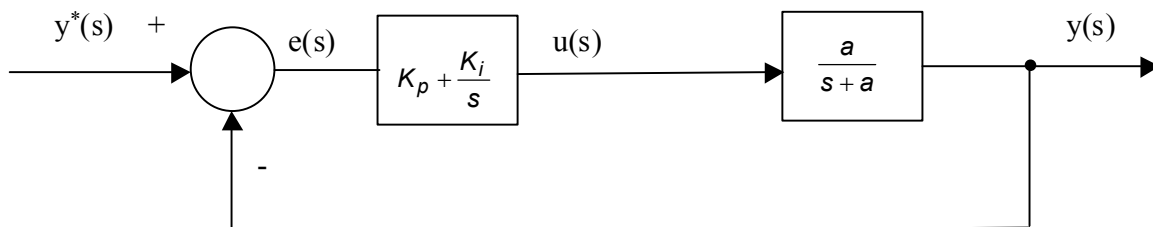


Figura 4. Sistema de control para planta de primer orden.

El lugar de raíz del sistema a lazo cerrado es:

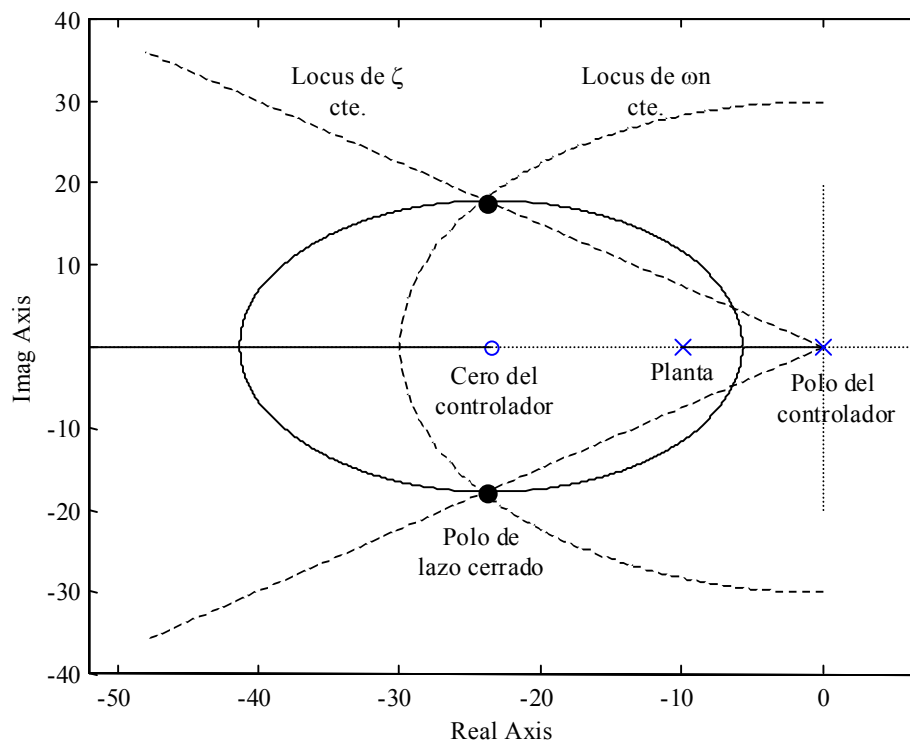


Figura 5. Lugar de la raíz para el sistema anterior.

Al insertar el controlador PI en el sistema de control, el lugar de la raíz toma la forma de un círculo centrado en el cero del controlador. A través de prueba error y utilizando MATLAB es posible lograr un lugar de la raíz que intersecte con el locus de frecuencia natural deseado y coeficiente de amortiguamiento especificado. El diseño del controlador finaliza cuando se ajusta la ganancia del controlador (K_p) para que los polos de lazo cerrado se encuentren en la posición apropiada.

Recordando que los ceros de lazo cerrado son los ceros de $G(s)$ y/o los polos de $H(s)$, para un diseño como el mostrado en la Fig. 4, la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_n^2 K_p}{K_i} \frac{(s + K_i / K_p)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4)$$

donde la constante $\omega_n^2 K_p / K_i$ asegura cero error en estado estacionario a entrada escalón. Esto significa, para el caso del sistema mostrado en la Fig. 4, que en estado permanente la salida es igual al escalón de entrada.

La principal desventaja de un controlador PI es que el cero del controlador forma parte de la función de transferencia a lazo cerrado y que en muchas oportunidades no es posible alejar este cero de los polos dominantes de lazo cerrado. Como se ha señalado anteriormente, cuando el cero se encuentra cerca de la parte real de los polos dominantes de lazo cerrado, el sobrepaso de la respuesta en el tiempo puede alcanzar valores altos, por encima de lo especificado. Esto puede ser tolerable en muchas aplicaciones, por ejemplo cuando se efectúa control de corriente en una máquina eléctrica. Sin embargo, cuando es necesario evitar los sobrepasos excesivos, se deben utilizar otro tipo de controladores como los que se discuten a continuación.

IV.2 Compensación en el lazo de realimentación.

El lugar de la raíz utiliza los polos y ceros de lazo abierto, es decir los polos y ceros de la función de transferencia $G(s)H(s)$.

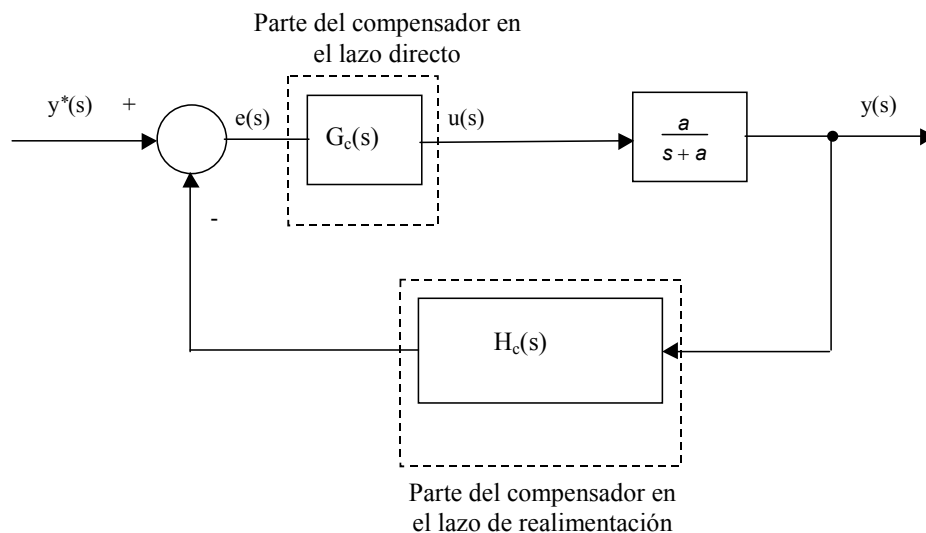


Figura 6. Sistema de control con realimentación no unitaria.

Para modificar el lugar de la raíz se puede colocar un compensador o parte de un compensador en el lazo de realimentación. Esto se muestra en Fig. 6.

Cuando se efectúa compensación en el lazo de realimentación una parte o todo el controlador se implementa en este lazo. Para el caso del controlador PI discutido en la sección anterior, el cero del controlador se puede colocar en el lazo de realimentación mientras que el integrador se mantiene en el lazo directo. El sistema de control se muestra en la siguiente figura:

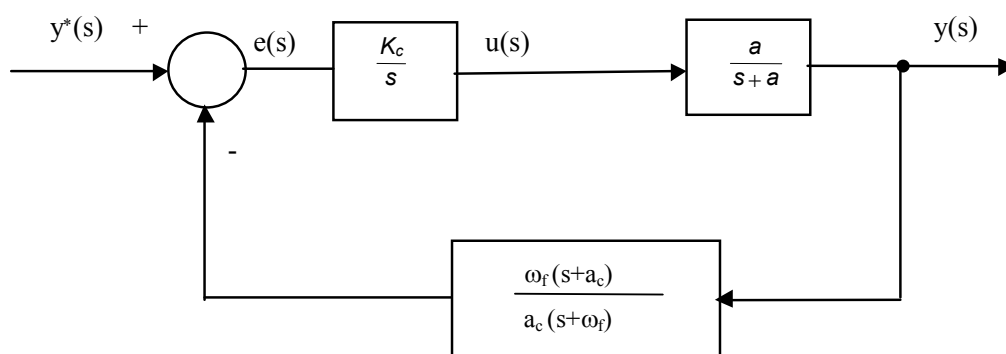


Figura 7. Sistema de control incluyendo compensación en el lazo de realimentación.

El cero a_c del controlador se encuentra en el lazo de realimentación. Debido a los problemas que implica utilizar un cero ideal en un sistema de control, el término $(s+a_c)$ es dividido por el filtro $(s+\omega_f)$. De esta manera se evita que el ruido de alta frecuencia presente en la medición sea amplificado excesivamente.

Idealmente los filtros utilizados en un sistema de control deben tener sus polos alejados de los polos dominantes de lazo cerrado. En otras palabras si se necesita una frecuencia natural ω_n de 100 rads^{-1} lo ideal es que la frecuencia ω_f sea mayor de $1000\zeta \text{ rads}^{-1}$ ($\omega_f > 10\omega_n\zeta$). En este caso el filtro no interfiere con la dinámica del sistema y se logra el mismo resultado diseñando el sistema considerando/sin considerar los polos del filtro.

Desafortunadamente no siempre la densidad espectral de potencia del ruido permite que la frecuencia de corte ω_f sea mayor que diez veces $\omega_n\zeta$. Sin embargo es razonable asumir que ω_f se encuentra alejado de $\omega_n\zeta$.

En la Fig. 7, la ganancia del lazo de realimentación se ha modificado por el factor ω_f/a_c para obtener valor unitario a la componente continua de la señal que viene desde el transductor. En el lazo directo se encuentra la ganancia del controlador (K_c) y el término integral.

Para este caso se tiene el siguiente lugar de la raíz:

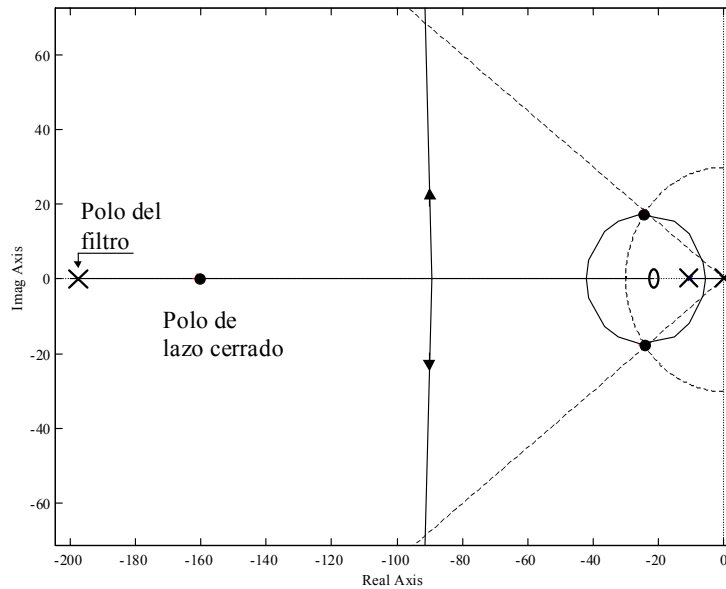


Figura 8. Lugar de la raíz del sistema mostrado en la Fig. 7.

El lugar de la raíz obtenido en la Fig. 8 es casi igual al que se muestra en la Fig. 5 con la diferencia de que existe el polo del filtro y que se necesita una ganancia distinta en el controlador para ubicar los polos de lazo cerrado en la posición requerida (para una misma planta, e idénticos valores de ω_n , ζ , la ubicación del cero a_c debería estar muy cerca del cero del controlador PI discutido anteriormente). Es posible que el sistema de control en la Fig.4 también necesitaría un filtro de realimentación así que la mayor diferencia, esta en la ganancia del controlador. Sin embargo, debe tenerse presente que la función de lazo cerrado es distinta en ambos casos. Cuando se utiliza compensación en la realimentación la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_n^2 \omega_2}{\omega_f} \frac{(s + \omega_f)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \omega_2)} \quad (5)$$

Donde el polo ω_2 corresponde al polo extra que se muestra en la Fig. 8. Este polo no es dominante ya que para un sistema bien diseñado, el polo ω_2 se encuentra alejado del origen.

En (5) los ceros de lazo cerrado son los polos de la función de realimentación $H(s)$. Debido a que el o los polos del filtro se encuentran alejados, es razonable asumir que al colocar los ceros del controlador en el lazo de realimentación el sobrepaso disminuye. Esto se debe a que el cero del controlador no se encuentra en la función de lazo cerrado de (5).

Existen dos inconvenientes al compensar en el lazo de realimentación. El primero es que los ceros tienen la propiedad de amplificar el ruido de alta frecuencia. Si consideramos un cero en el origen, este es equivalente a efectuar la derivada en el tiempo, por lo tanto, si se tiene un ruido de la forma $N(t)=A_m \sin(\omega t)$ se tiene:

$$sN(s) = \frac{dN(t)}{dt} = A_m \omega \cos(\omega t) \quad (6)$$

Por lo tanto el ruido a la salida del derivador se ha amplificado por ω . Aunque el caso de un cero en el origen es extremo, para altas frecuencias todo cero tiende a comportarse como amplificador de ruido.

Si se considera ruido en la medición se tiene el siguiente diagrama de bloques:

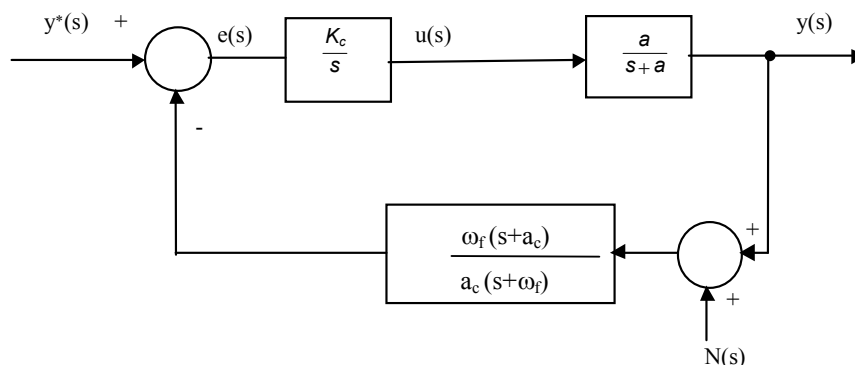


Fig. 9. Sistema de control considerando compensación en la realimentación.

En otras palabras la configuración de polos y ceros de lazo cerrado puede ser ventajosa desde el punto de vista de la referencia o entrada al sistema de control pero pueden existir otras desventajas cuando se analizan los inconvenientes ocasionados por el ruido. Esto no significa que el uso de ceros en el lazo de realimentación debe descartarse completamente. Los ceros en el lazo de realimentación pueden producir efectos desfavorables cuando existe ruido en la medición pero sus ventajas y desventajas deben ser estudiadas con mayor detalle (por ejemplo considerando simulación).

El otro inconveniente que existe al utilizar compensación en la realimentación es que se afecta a la medición y existe el riesgo de, por ejemplo, transformar un sistema de control de posición en control de velocidad. Esto se muestra en la Fig. 10.

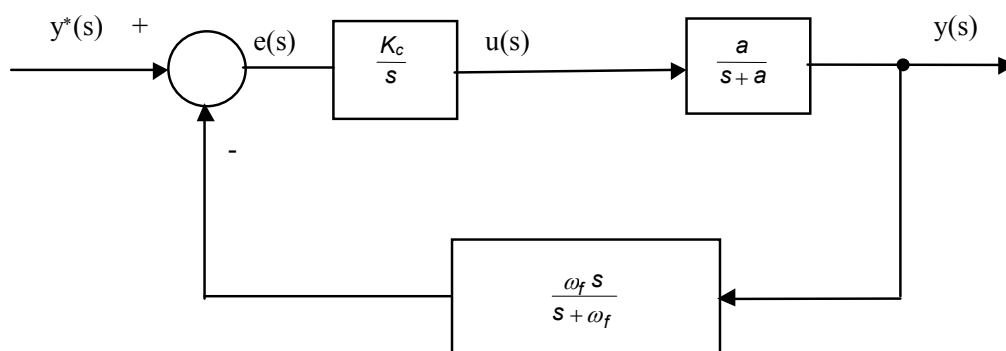


Figura 10. Incorrecta aplicación de compensación en la realimentación.

En esta figura se ha colocado un cero en el origen y el lazo de realimentación no está midiendo la salida $y(t)$ sino que su derivada. Por lo tanto si la salida es posición, lo que se está controlando realmente es la velocidad angular. Esto es incorrecto a menos que realmente se intente controlar la velocidad angular del sistema. En general se debería evitar utilizar ceros muy cerca del origen en el lazo de realimentación.

IV.3 Compensación por cancelación

Una de las mejores alternativas al diseñar sistema de control es cancelar los elementos de la planta. Es decir, si el controlador considera un cero este debe ubicarse sobre uno de los polos de la planta. La siguiente figura muestra un sistema de control donde se ha aplicado cancelación:

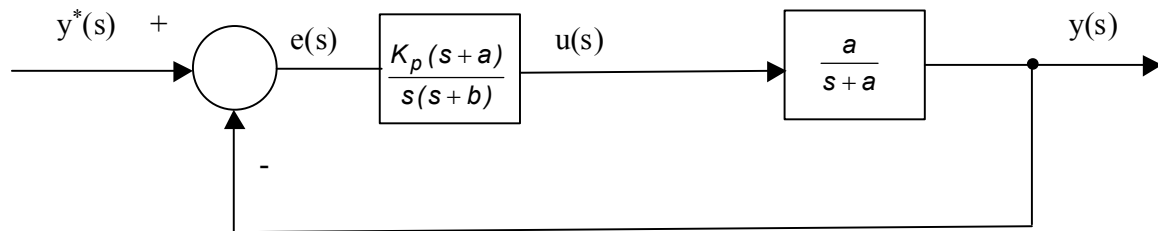


Figura 11. Sistema de control considerando cancelación.

En este sistema el cero del controlador se ha utilizado para eliminar el polo de la planta de primer orden. De esta forma el cero del controlador desaparece de la función de transferencia a lazo cerrado y se elimina el sobrepaso. El lugar de la raíz para este caso es:

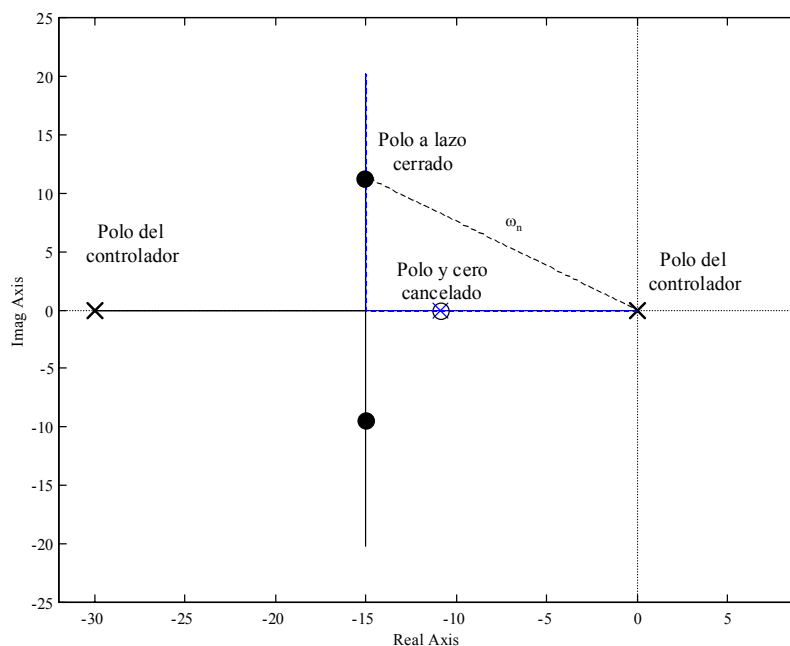


Figura 12. Lugar de la raíz considerando cancelación.

La función de transferencia a lazo cerrado corresponde a un sistema de segundo orden ideal y si el coeficiente de amortiguamiento es apropiado el sobrepaso es bajo. Esta estrategia de control necesita un controlador ligeramente mas complicado.

En control automático es muy difícil encontrar estrategias que no presenten desventajas y esta no es la excepción. La posición de los polos y ceros no es fija y algunos de ellos cambian su ubicación en el plano s de acuerdo a las condiciones existentes en el sistema. Un ejemplo de esto es lo que sucede en la puerta mecánica de un motor. Si el motor esta conectada a una carga mecánica pasiva se tiene:

$$T_e = B\omega + J \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{T_e}{J(s + B/J)} \quad (7)$$

Donde T_e es una función de la corriente del motor. Si la carga es una correa transportadora o un molino en que se esta triturando material, el polo B/J de (7) es móvil y tiene un amplio desplazamiento dependiendo de la fricción e inercia. Si se implementa un sistema de control utilizando cancelación es posible de que el sistema opere adecuadamente para un cierto rango de carga y entregue una respuesta incorrecta en otras condiciones de operación. Figura 12 muestra el lugar de la raíz cuando la cancelación es correcta. Figura 13 y 14 muestran los lugares de las raíces cuando la cancelación es imperfecta.

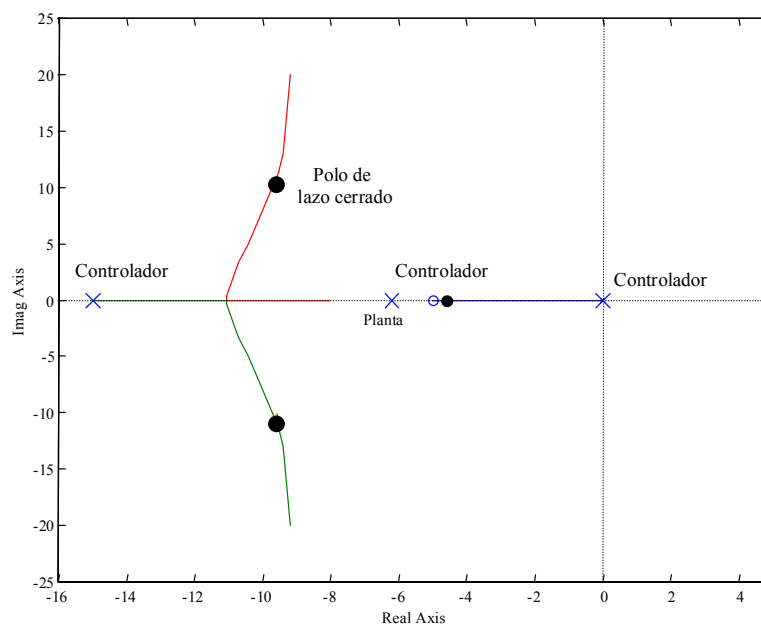


Fig. 13. Cancelación imperfecta del polo de la planta.

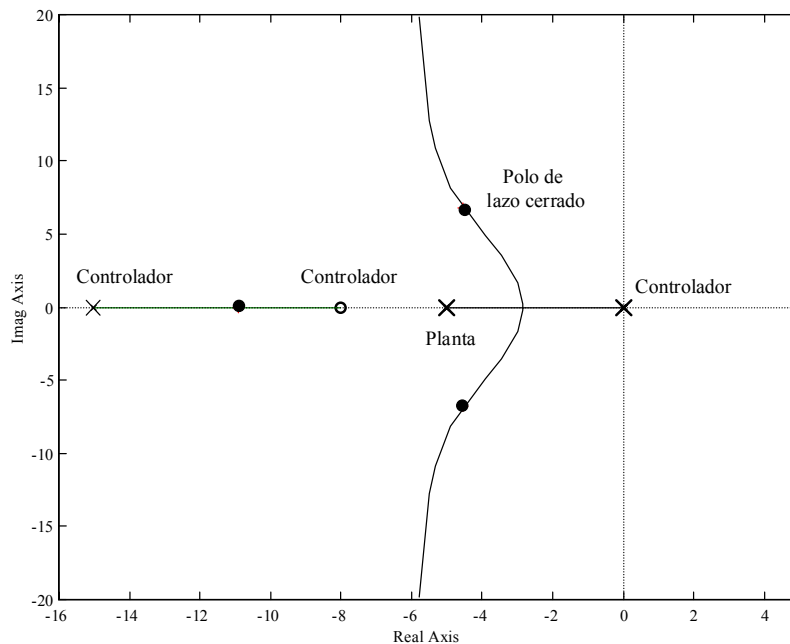


Fig. 14. Cancelación imperfecta del polo de la planta.

La Fig. 13 muestra que al producirse la cancelación imperfecta, queda una raíz lenta de lazo cerrado cerca del origen. La influencia de esta raíz depende de que tan alejado este el polo de lazo cerrado con respecto al cero. En la Figura 14 no se tiene en este caso una raíz lenta, pero la frecuencia natural de los polos dominantes de lazo cerrado ha disminuido.

No se puede concluir sin embargo que compensación por cancelación es una técnica inadecuada debido a que es imposible cancelar exactamente un polo o un cero. En algunas aplicaciones la variabilidad de los elementos de la planta aunque existente es reducida. Este es el caso por ejemplo del polo R/L del devanado de un motor. En motores de mediana y alta potencia la variación del término R/L con la temperatura esta lejos de los rangos de variación presente en la puerta mecánica del motor. Se puede demostrar fácilmente que cuando la cancelación de polos y ceros no es perfecta, pero tampoco el cero se encuentra muy alejado del polo, el sistema opera apropiadamente a pesar de la existencia de una raíz lenta. Por ejemplo en el caso del diagrama de la raíz de la siguiente figura se tiene que existen tres polos de lazo cerrado y uno de ellos se encuentra muy cerca de un cero de lazo abierto. Asumiendo que el controlador no se encuentra en el lazo de realimentación se tiene que la función de lazo cerrado puede escribirse como:

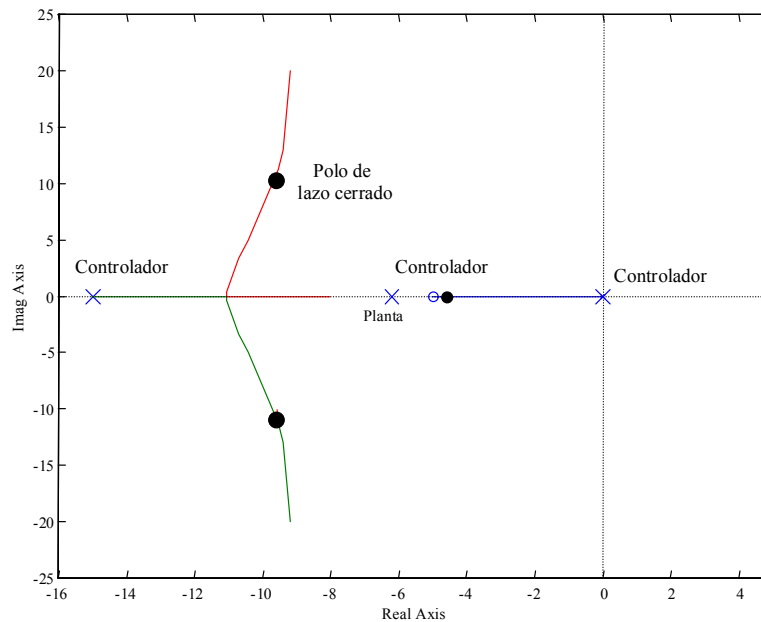


Fig. 15. Cancelación imperfecta del polo de la planta.

$$\frac{y}{y^*} = \frac{\omega_n^2(a + \Delta a)}{a} \frac{(s + a)}{(s + a + \Delta a)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (8)$$

El cero del controlador se encuentra en el numerador de la función de lazo cerrado. Existen tres polos de lazo cerrados. Dos de ellos complejos conjugados y uno de ellos que se encuentra ubicado en $a + \Delta a$ (muy cerca del cero). Si Δa es un valor muy pequeño, cercano a cero, entonces se puede asumir que el cero y el polo de lazo cerrado se cancelan entre ellos y el sistema es de segundo orden ideal.

Compensación por cancelación se utiliza no solo con plantas de primer orden sino con plantas de orden n . Por ejemplo si se tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+10)(s+30)} \quad H(s) = 1 \quad (9)$$

Si se utiliza un controlador PI (el cual no siempre es apropiado para sistemas con tres o mas polos) se debe colocar un polo en el origen y luego con el cero cancelar el polo de lazo abierto mas lento. Esto es importante de recordar ya que se obtiene una mejor respuesta cuando el polo “mas conflictivo” se elimina. En este caso el ubicado en $s=-5$. Si se elimina el polo en $s=-30$ la

respuesta obtenida no tiene buena dinámica. Al cancelar el polo adecuado, el lugar de la raíz del sistema incluyendo controlador es:

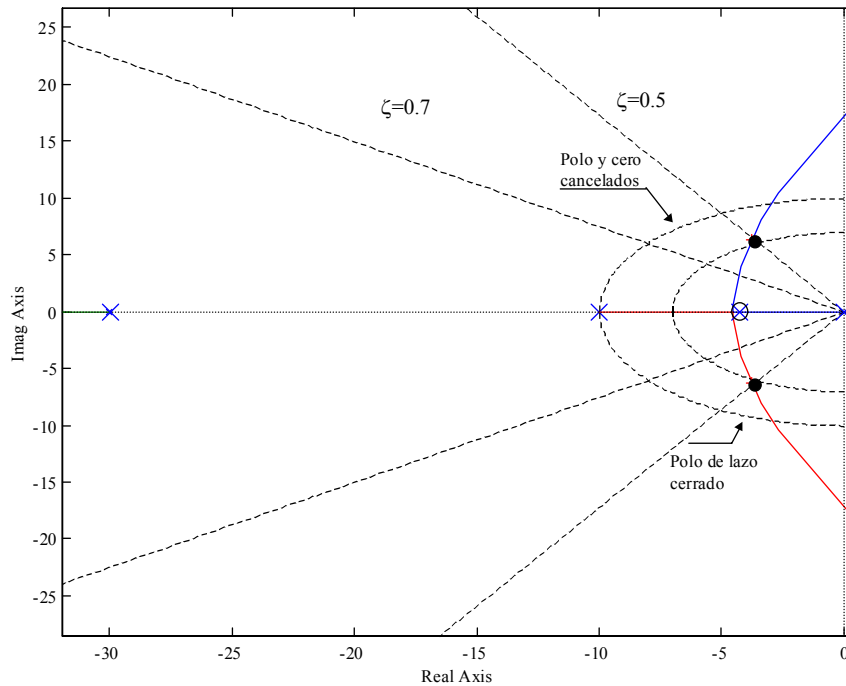


Fig. 16. Compensación por cancelación de sistema de alto orden.

En este caso se obtiene una respuesta con una frecuencia natural de 7 rads^{-1} y coeficiente de amortiguamiento de 0.5.

IV. 4 Compensación tipo Butterworth

Se debe tener en cuenta que en algunas configuraciones de polos y ceros, la compensación por cancelación puede producir inestabilidad. Suponga que se tiene la siguiente función de transferencia a lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+10)} \quad (10)$$

El sistema mostrado en (10) ya es tipo 1. Suponga que se requiere cero error en estado estacionario a entrada rampa y que se utiliza un compensador tipo PI para alcanzar esta especificación. Una estrategia incorrecta sería cancelar el polo $s=-2$ con el cero del controlador. En este caso el lugar de la raíz del sistema sería:

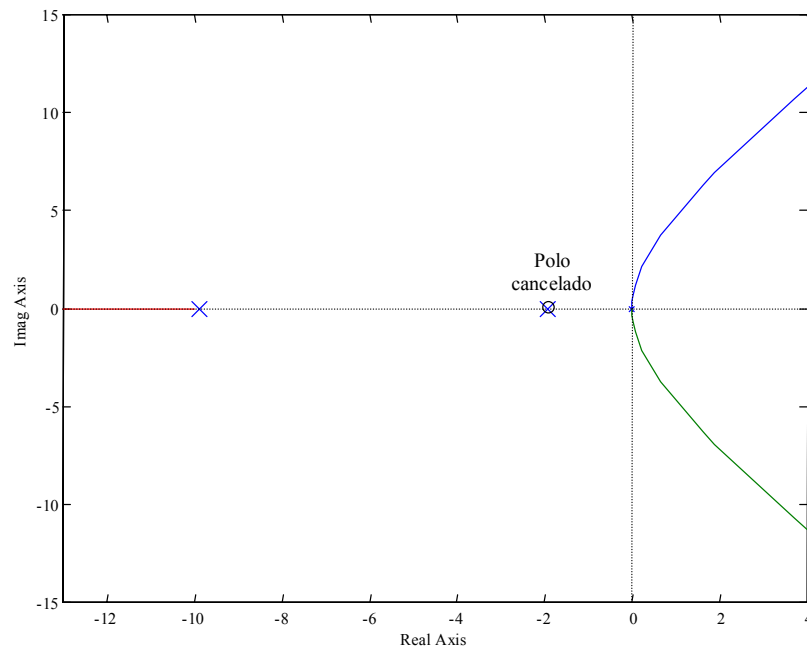


Fig. 17. Compensación inestable.

En este caso el sistema, a lazo cerrado, es inestable para todo valor de ganancia K .

Cuando se requiere cero error en estado estacionario a entrada rampa, para un sistema como el mostrado en (10), se propone compensar el sistema de forma que a lazo cerrado los polos se encuentren ubicados como los de un filtro de Butterworth de orden n . En general los filtros de Butterworth tienen una respuesta en frecuencia muy plana y su respuesta en el tiempo es aceptable en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento. Más información acerca de filtros Butterworth puede ser encontrada en:

- Horowitz and Hill, “The art of Electronics” (Excelente libro y muy práctico).
- Chen, “The circuits and filter handbook”, IEEE Press.

Para el caso de un filtro de primer orden, las respuestas se encuentran ubicadas en un semicírculo de radio ω_n . Esto se muestra en la siguiente figura:

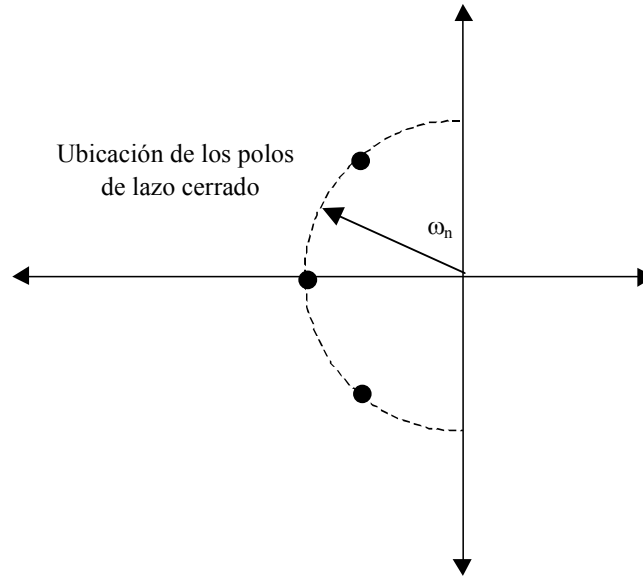


Fig. 18 Polos de un filtro Butterworth de tercer orden

Por lo tanto los polos dominantes de una función de transferencia similar a un filtro de Butterworth estarían ubicados de acuerdo a la siguiente expresión:

$$1 + G(s)H(s) = (s + \omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (11)$$

Para el caso de un filtro de Butterworth de tercer orden el coeficiente de amortiguamiento es 0.5. Suponiendo que se compensa el sistema mostrado en (10) con un controlador tipo PI, la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+b)}{s^2(s+2)(s+10)} = \frac{s^2(s+2)(s+10) + K(s+b)}{s^2(s+2)(s+10)} \quad (12)$$

La expresión en el numerador de (12) debe igualarse a la obtenida para los polos del filtro de Butterworth de tercer orden mas un polo extra (esto se debe a que (12) es de cuarto orden y (11) es de tercer orden). Esto se muestra en la siguiente ecuación:

$$s^2(s+2)(s+10) + K(s+b) = (s+\alpha)(s+\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (13)$$

donde α es el polo extra. Utilizando $\zeta=0.5$ y simplificando (13) se obtiene:

$$s^4 + 12s^3 + 20s^2 + Ks + b = s^4 + (\alpha + 2\omega_n)s^3 + 2\omega_n(\alpha + \omega_n)s^2 + \omega_n^2(2\alpha + \omega_n)s + \alpha\omega_n^3 \quad (14)$$

El siguiente juego de ecuaciones puede obtenerse de (14):

$$\alpha + 2\omega_n = 12$$

$$2\omega_n(\alpha + \omega_n) = 20$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\alpha = 10.2 \quad \omega_n = 0.9 \quad K = 17.25 \quad b = 0.43$$

Esto significa que para obtener una respuesta tipo Butterworth de tercer orden la ganancia del sistema (incluyendo controlador) es 17.25 y el cero debe ser ubicado en $s = -0.43$. Como puede observarse la resolución de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ no es trivial y podría dificultarse aun mas si es que existen mas de cuatro polos de lazo abierto. Por lo tanto para compensaciones de sistemas tipo uno que consideren cero error en estado estacionario a entrada rampa se recomienda el siguiente procedimiento:

- Identifique el polo mas lento que no esté en el origen y que se encuentra en la posición $s = -d$ (en el caso de (11) $d=2$).
- Coloque el cero del controlador PI en la posición $b=d/4$.
- Utilizando prueba y error con el lugar de la raíz, mueva levemente el cero del controlador para maximizar la frecuencia natural considerando $\zeta \geq 0.5$.

El procedimiento anterior es válido solo para compensar utilizando controladores PI. Si se utilizan compensadores con mas ceros es posible lograr una frecuencia natural mayor, pero complicando, quizás innecesariamente, la solución.

IV. 5 Compensación tipo IP

Otras de las configuraciones de control utilizadas, especialmente en el caso de plantas de primer orden, es el controlador IP. La siguiente figura muestra un controlador IP incluyendo la planta de primer orden que considera inercia J y coeficiente viscoso de fricción B .

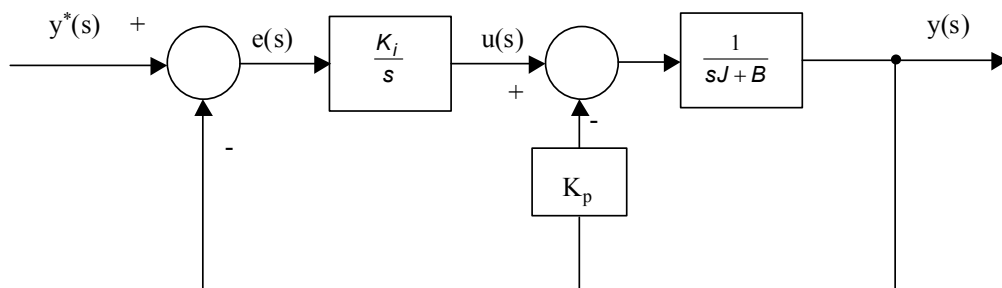


Fig. 19. Controlador IP en un sistema de segundo orden.

Utilizando reducción de bloques, la siguiente figura se obtiene de la Fig. 19:

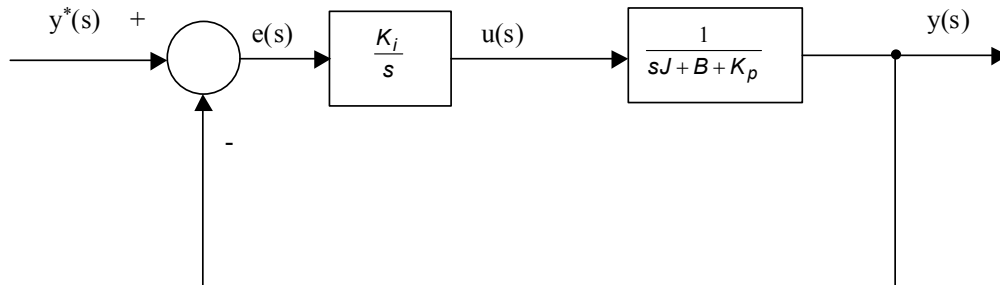


Fig. 20. Simplificación de la Fig. 19.

Finalmente, utilizando reducción de bloques la relación entrada salida puede escribirse como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_i}{Js^2 + (B + K_p)s + K_i} \quad (16)$$

Ecuación (16) es un sistema de segundo orden ideal que no considera ceros en la función de transferencia, evitando de esta forma los altos valores de sobrepaso. Los parámetros de este sistema de segundo orden son:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{K_i}{J}} \\ \zeta &= \frac{B + K_p}{2\sqrt{JK_i}} \end{aligned} \quad (17)$$

Cuando se utiliza el controlador IP se eliminan los ceros de lazo cerrado, reduciendo los sobrepasos, pero la posición de los polos de lazo cerrado puede ser muy sensible a los cambios en los parámetros. Por ejemplo, el aumento en el valor de la inercia J , disminuirá la frecuencia natural ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ζ .

Sensibilidad ante los cambios de parámetros es una de las características de los controladores IP.