



Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Magallanes

Conceptos Básicos de Errores y Lugar de la Raíz

Apuntes del curso de Control Automático

Roberto Cárdenas Dobson

*Ingeniero Electricista Msc. Ph.D.
Profesor de la asignatura*

Este apunte se encuentra disponible en la página web <http://ona.fi.umag.cl/~rcd>

II. Errores en estado permanente de un sistema de control.

Al especificar las características funcionales de un sistema de control, se deben considerar dos aspectos:

- Respuesta en estado permanente.
- Respuesta dinámica.

La respuesta dinámica o en estado transiente, depende fundamentalmente de la posición de los polos dominantes de lazo cerrado. Las especificaciones dinámicas se efectúan en términos de coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural, tiempo de subida, máximo peak, etc. Estos términos ya han sido definidos en la sección 1.1 del apunte del sistema de segundo orden.

La respuesta en estado permanente se especifica en términos del error en estado estacionario ($t \rightarrow \infty$) cuando una cierta entrada se aplica al sistema de control. Por ejemplo, en la mayoría de los sistemas se requiere cero error en estado estacionario a entrada escalón pero otros tipos de especificaciones son posibles. El análisis del error se efectúa considerando la siguiente figura:

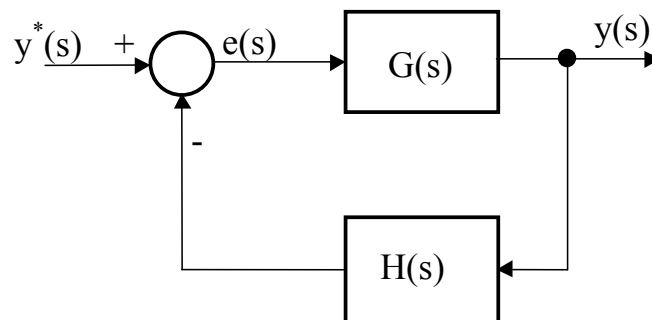


Figura 1. Diagrama típico de un sistema de control.

Donde $y^*(s)$ es la referencia o la entrada al sistema de control, $y(s)$ es la salida del sistema y $e(s)$ es el error. Analizando el diagrama de bloques de la Fig. 1 se puede demostrar que el error se puede expresar como:

$$e(s) = y^*(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (1)$$

Utilizando el teorema del valor final, el error en estado estacionario esta dado por la siguiente expresi3n:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s y^*(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2)$$

Por ejemplo, si el sistema esta sujeto a una entrada tipo escal3n de magnitud A, el error en estado estacionario es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + G(s)H(s)} \quad (3)$$

Analizando (3) se puede concluir que existen solamente dos posibilidades para que el error en estado estacionario sea cero.

- Que la magnitud del escal3n de entrada sea cero.
- Que el t3rmino $G(s)H(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow 0$.

La magnitud de la entrada escal3n no puede ser cero, porque en ese caso no existiría entrada. En general la funci3n de transferencia a lazo abierto $G(s)H(s)$ puede escribirse como:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \quad (4)$$

Donde $l+n \geq m$. La funci3n de transferencia a lazo abierto tiene n polos en el origen. En este caso se denomina a la funci3n como de tipo n. De la misma forma pueden especificarse las entradas al sistema. En este caso la entrada escal3n (A/s) es de tipo 1, la entrada rampa (A/s^2) es tipo 2 y la entrada parab3lica (A/s^3) es tipo 3.

Reemplazando (4) en (3), se obtiene el error en estado estacionario como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)}} \quad (5)$$

Por lo tanto para que exista cero error en estado estacionario, n debe ser mayor o igual que uno. En otras palabras la funci3n de transferencia a lazo abierto debe tener un tipo mayor o igual que uno.

Generalizando, se puede demostrar que existe cero error en estado estacionario cuando el “tipo” de la función de transferencia a lazo abierto es mayor o igual que el “tipo” de la entrada. Se define el coeficiente de error como:

$$K_N = \lim_{s \rightarrow 0} s^N G(s)H(s) \quad (6)$$

K_N se denomina K_p para $N=0$, K_v para $N=1$ y K_a para $N=2$.

Los errores en estado estacionario para entrada escalón, rampa y parabólica quedan definidos en la siguiente tabla:

Tabla I. Resumen de errores para algunas entradas.

<i>Tipo de la función</i> $G(s)H(s)$	<i>Entrada Escalón</i> $y^* = A/s$	<i>Entrada rampa</i> $y^* = A/s^2$	<i>Entrada parabólica</i> $y^* = A/s^3$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$
1	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$e_{ss} = \infty$
2	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
3	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$

Donde los coeficientes K_p , K_v y K_a se denomina coeficientes de error de posición, velocidad y aceleración respectivamente.

Los coeficientes de error de un sistema indican la capacidad del sistema de control para eliminar el error en estado estacionario. Estos coeficientes pueden ser utilizados como indicadores numéricos para mostrar las capacidades de un sistema de control.

El lugar de la raíz es el procedimiento de diseño utilizado en la primera parte de este curso. Se asume que el procedimiento “mecánico” de construcción del lugar de la raíz ya ha sido estudiado previamente. En este curso se hace uso de MATLAB y SIMULINK y por lo tanto no se considera necesario memorizar las doce reglas de construcción del lugar de la raíz. Sin embargo, entender los conceptos relacionados con este método es fundamental para efectuar diseño de controladores.

Sin embargo el alumno debe entender que lugar de la raíz es un tópico que **debe** haber sido estudiado previamente en un curso de análisis de sistemas. El alumno que tiene fuertes deficiencias en esta área debe subsanarlas estudiando alguno de los muchos libros que tratan el tema.

A continuación se hace un breve resumen del lugar de la raíz y de las reglas mas importantes. Mas información puede encontrarse en cualquier libro de control automático.

3.1 Fundamentos del Método de Lugar de la Raíz.

El lugar de la raíz es un método gráfico de encontrar la posición de los polos de lazo cerrado de la función de transferencia:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (7)$$

En otras palabras utilizando el lugar de la raíz se encuentra gráficamente las soluciones de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$. Utilizando la función de transferencia mostrada en (4), la ecuación característica puede escribirse como:

$$\Pi(s + p_j) + K\Pi(s + z_i) = 0 \quad (8)$$

Para un conjunto dado de polos y ceros de lazo abierto, p_j y z_i , la posición de los polos de lazo cerrado depende del valor de la ganancia K . Por simple inspección de (8) se puede concluir que cuando la ganancia es cero o tiene un valor muy pequeño la posición de los polos de lazo cerrado es la misma que los polos de lazo abierto. Cuando la ganancia $K \rightarrow \infty$ los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto. **No se debe confundir los polos de lazo**

abierto con los de lazo cerrado. Los polos de lazo abierto son los que se encuentran en la función de lazo abierto $G(s)H(s)$. Los polos de lazo cerrado son las soluciones de (8).

Utilizando la ecuación $1+G(s)H(s)=0$, se puede demostrar que existe un polo de lazo cerrado, cuando se cumple la condición de módulo y la condición de ángulo. Estas condiciones se expresan en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} |G(s)H(s)| &= 1 \\ \text{Angulo}(G(s)H(s)) &= 180 \pm k 360 \end{aligned} \quad (9)$$

Donde k es un entero. La condición de ángulo es la mas importante ya que la condición de módulo es simple de obtener variando la ganancia del controlador u otros elementos. Esto se muestra en (10). Para un punto $s=\sigma \pm j\omega$ en particular, la ganancia necesaria se puede calcular remplazando s por $\sigma \pm j\omega$ en (10) y calculando el módulo. El valor necesario de K es el inverso del módulo de $G(s)H(s)$.

$$|G(s)H(s)| = K \left| \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \right|_{s=\sigma \pm j\omega} = 1 \quad (10)$$

Ecuación (10) puede resolverse gráficamente.

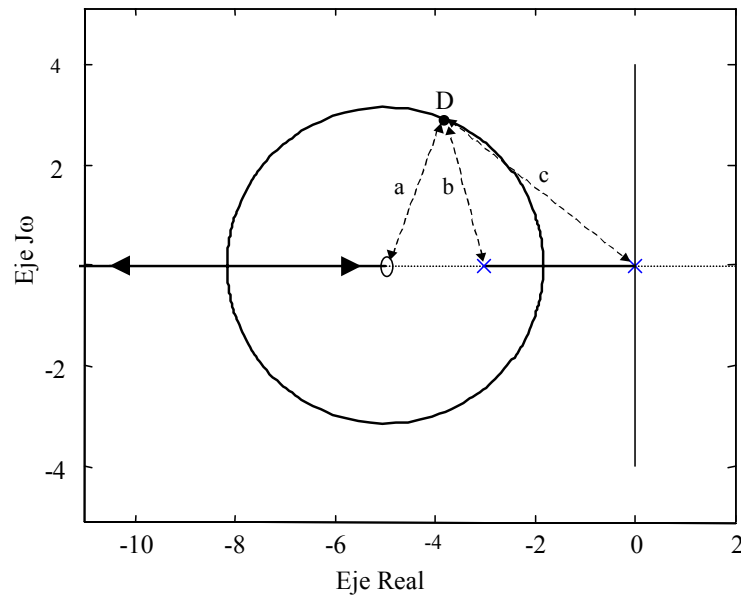


Fig. 2 Ubicación de un polo de lazo cerrado.

En la Fig. 2 se muestra el lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+3)} \quad (11)$$

Para ubicar el lugar de la raíz en el punto mostrado en la Fig. 2, la ganancia K a utilizar debe ser calculada utilizando (10). Sin embargo puede demostrarse que esto es equivalente a utilizar:

$$K = \frac{\Pi(\text{distancia del punto a los polos})}{\Pi(\text{distancia del punto a los ceros})} \quad (12)$$

Cuando no existen ceros en $G(s)H(s)$ el denominador de (12) es igual a uno. Aplicando (12) en la Fig. 2 la ganancia K a utilizar en (10) es:

$$K = \frac{bc}{a} \quad (13)$$

Al igual que la condición de módulo, el ángulo de la función de transferencia $G(s)H(s)$ puede calcularse gráficamente. Esto se muestra en la Fig. 3

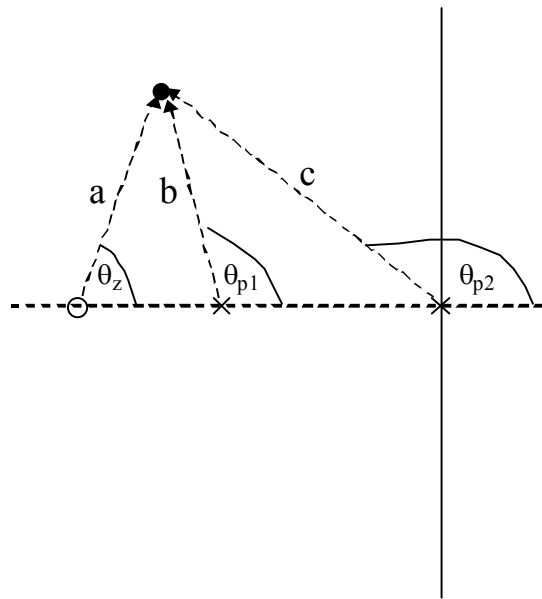


Fig. 3. Condición de ángulo.

Si la condición de ángulo se cumple para un punto $\sigma \pm j\omega$ cualquiera en el plano s , entonces se tiene:

$$\Sigma (\text{Ángulos de los polos}) - \Sigma (\text{Ángulos de los ceros}) = 180 \pm k 360 \quad (14)$$

Si se aplica (14) a los polos y ceros de la Fig. 3 se tiene que $\theta_{p1} + \theta_{p2} - \theta_z$ debería ser igual a $180 + k360$ grados para tener lugar de la raíz en el punto mostrado en la Fig. 3.

La condición de ángulo es la mas importante debido a que entrega el conjunto de puntos en que pueden ubicarse los polos de lazo cerrado si se ajusta correctamente la ganancia del sistema (o controlador). Si es que punto cualquiera no cumple con la condición de ángulo entonces un polo de lazo cerrado no puede ubicarse en esa posición aunque se varíe la ganancia K entre cero e infinito. Esto se muestra en la siguiente figura:

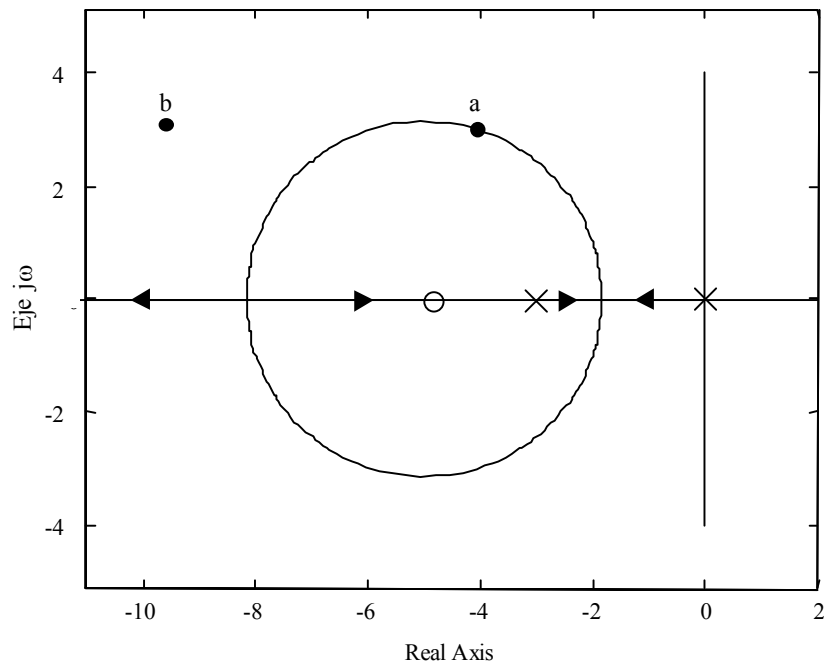


Fig. 4. Condición de ángulo para dos puntos en el sistema.

El punto 'a' en la figura se encuentra ubicado en el lugar de la raíz (o sea cumple con la condición de ángulo). Para que un polo de lazo cerrado se encuentre en esa posición, basta con utilizar el valor correcto de ganancia. Sin embargo el punto 'b' no cumple con la condición de ángulo. Si se necesita un polo de lazo cerrado en esa posición es necesario cambiar la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$. Esto se hace utilizando un compensador o controlador en cascada con $G(s)$ o $H(s)$ (Estrictamente se puede ubicar un compensador en cualquier punto del lazo de control incluso en paralelo con $G(s)$ o $H(s)$).

2.2 Ceros de lazo cerrado.

Como se demostró anteriormente, el lugar de la raíz resuelve gráficamente la ecuación característica encontrándose de esta forma la posición de los polos de lazo cerrado. Desafortunadamente, el método del lugar de la raíz no coloca mayor énfasis en la ubicación de los ceros de lazo cerrado, porque la posición de estos no afecta la estabilidad del sistema de control. Sin embargo, como se demostró anteriormente, los ceros de lazo abierto tienen considerable influencia en el sobrepaso y el tiempo de establecimiento. Por lo tanto el diseñador debe saber

donde se encuentran los ceros de lazo abierto y evitar que estos se encuentren en una posición cercana a los polos dominantes de lazo cerrado.

Para un sistema de control como el mostrado en la Fig. 1, la función de transferencia a lazo cerrado es:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (15)$$

Si se define $G(s)H(s)$ como:

$$G(s) = K_G \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})} \quad H(s) = K_H \frac{\Pi(s + z_{Hk})}{\Pi(s + p_{Hl})} \quad (16)$$

La función de transferencia de lazo cerrado puede escribirse como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_G \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})}}{1 + K_G K_H \frac{\Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + z_{Hk})}{\Pi(s + p_{Gj}) \Pi(s + p_{Hl})}} \quad (17)$$

Trabajando con (17), la función de lazo cerrado puede escribirse finalmente como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_G \Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + p_{Hl})}{\Pi(s + p_{Gj}) \Pi(s + p_{Hl}) + K_G K_H \Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + z_{Hk})} \quad (18)$$

El denominador de (18) es la ecuación característica cuya solución son los polos del sistema a lazo cerrado. Como hemos mencionado anteriormente, el método del lugar de la raíz entrega gráficamente el denominador de (18). Los ceros de lazo cerrado se pueden encontrar por simple inspección de las funciones de transferencia $G(s)$ y $H(s)$. Si el sistema de control tiene realimentación unitaria, entonces los ceros de lazo cerrado son los ceros de lazo abierto. Si el sistema tiene realimentación no unitaria entonces los ceros de lazo cerrado son los ceros de $G(s)$ y los polos de $H(s)$.

La posición de los ceros es importante aunque no afecten a la estabilidad. Como se demostró en la sección 1.2 del apunte anterior, los ceros afectan notablemente el sobrepaso y también al tiempo de establecimiento. Por ejemplo, un cero de lazo cerrado en el semiplano derecho, aunque no necesariamente produce inestabilidad, puede producir efectos no deseados en la respuesta. Así como no se deben confundir los polos de lazo cerrado con los polos de lazo abierto, **no confunda los ceros de lazo cerrado con los ceros de lazo abierto** ya que no siempre son iguales.

La respuesta en el tiempo del sistema de control de lazo cerrado puede expandirse en fracciones parciales como:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \sum [A_i / (s + p_i)] \quad (19)$$

Donde los términos p_i son los polos de lazo cerrado. Como se mencionó en el apunte anterior, los ceros de lazo cerrado tienen influencia en el valor de los coeficientes A_i .

2.3 Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos.

Dado el sistema de control que se muestra en la Fig. 5:

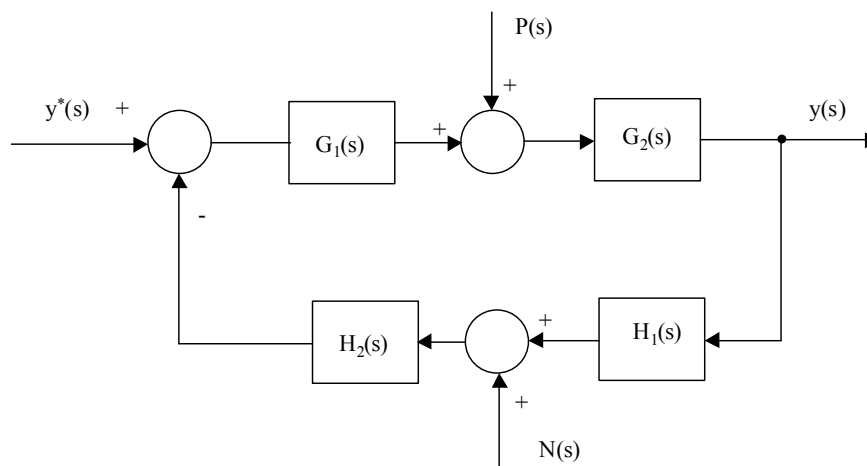


Figura 5. Sistema de control considerando perturbaciones y ruido.

El sistema de control que se muestra en la figura, está sujeto a la perturbación $P(s)$ y ruido $N(s)$. La función directa es $G(s)=G_1(s)G_2(s)$ y la función de realimentación es $H(s)=H_1(s)H_2(s)$. Utilizando álgebra de bloques y aplicando superposición puede demostrarse que:

$$y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} y^*(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} P(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)H_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} N(s) \quad (20)$$

La conclusión principal que se puede obtener de (20) es que los polos a lazo cerrado son los mismos para todas las entradas que se encuentran en el sistema. Esto es un resultado interesante ya que si se asegura que los polos dominantes de $y^*(s)/y(s)$ están ubicados con la frecuencia natural correcta y un coeficiente de amortiguamiento apropiado, entonces el sistema es estable con respecto a todas las otras posibles entradas del sistema como ruidos y perturbaciones. Sin embargo debe tenerse presente que los ceros, que afectan a las otras entradas, son distintos.

2.4 Algunas de las reglas mas importante del lugar de la raíz.

Libros adecuados para efectuar un estudio mas profundo del método del lugar de la raíz son:

Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, “Modern Control System”, ninth edition

John J. D’Azzo and Constantine H. Houpis, “Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern”, 3rd Edition.

Solo las reglas mas utilizadas serán brevemente mencionadas en este apunte. El estudio del lugar de la raíz corresponde a otros cursos y por lo tanto no es estudiado en profundidad en esta asignatura, principalmente enfocada al diseño de sistemas de control.

- 1) El lugar de la raíz encuentra las soluciones de la ecuación característica $1+G(s)H(s)$.
- 2) Si se escribe $G(s)H(s)$ de la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \quad (21)$$

Entonces los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los polos de lazo abierto cuando la ganancia K es cero o muy pequeña. Cuando la ganancia K tiende a infinito, los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto.

- 3) Para sistemas de ganancia positiva, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de polos y ceros a la derecha es impar. Esto es necesario para cumplir con la condición de ángulo en (9) que se muestra gráficamente en Fig. 3. Para sistemas con ganancia K negativa, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de total de polos y ceros a la derecha es par. Recuerde esto porque al utilizar la aproximación de Padé para los retardos, se utilizarán sistemas con ganancia negativa.
- 4) El número de lugares de la raíz es igual al número de polos de lazo abierto. En otras palabras el número de polos de lazo cerrado es igual al número de polos de lazo abierto.
- 5) El lugar de la raíz es simétrico con respecto al eje real. Esto se debe a que la respuesta en el tiempo no puede contener términos imaginarios. Por lo tanto todas las raíces complejas deben existir en pares y una de ellas debe ser el complejo conjugado de la otra.
- 6) Si en un sistema existen N_p polos y N_z ceros, entonces $(N_p - N_z)$ lugares de las raíces van hacia el infinito a través de asíntotas. Estas asíntotas están centradas en:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{Polos } G(s)H(s) - \sum \text{Ceros } G(s)H(s)}{N_p - N_z} = \frac{\sum(-p_j) - \sum(-z_i)}{N_p - N_z} \quad (22)$$

- 7) El ángulo de las asíntotas con respecto al eje real puede calcularse como:

$$\theta = \frac{(2k+1)}{N_p - N_z} 180 \quad (23)$$

Donde $k=0,1,2,\dots,(N_p-N_z-1)$.

- 8) Existen tres reglas para la construcción del lugar de la raíz que a mi juicio no son tan importantes cuando se utiliza MATLAB para diseñar controladores. Sin embargo estas reglas deben ser entendidas por un buen diseñador. Estas reglas son:

- *El procedimiento para encontrar el valor de K con el cual el lugar de la raíz cruza al semiplano derecho. Este K crítico se encuentra utilizando el criterio de Root Hurwitz.*
- *El procedimiento para encontrar los puntos en que el lugar de la raíz se separa del eje real. (breakaway points).*
- *El procedimiento para encontrar los ángulos de partida y los ángulos de llegada a polos y ceros complejos conjugados.*

9) El lugar de la raíz se construye encontrando los puntos en que se satisface la condición de ángulo de (9). Nótese que la condición de ángulo es distinta para sistemas con K negativo.

10) El valor de ganancia necesaria para posicionar los polos de lazo cerrado en un determinado lugar se encuentra utilizando (12).

2.5 Lugares de la raíz comunes.

Para terminar este apunte se presentan dos lugares de las raíces mas comunes:

- 1) Dos polos a lazo abierto, sin ceros. En este caso el lugar de la raíz es bastante simple y se puede diseñar el sistema sin la ayuda de un computador.
- 2) Dos polos de lazo abierto y un cero de lazo abierto. En este caso el lugar de la raíz es un círculo centrado en el cero.

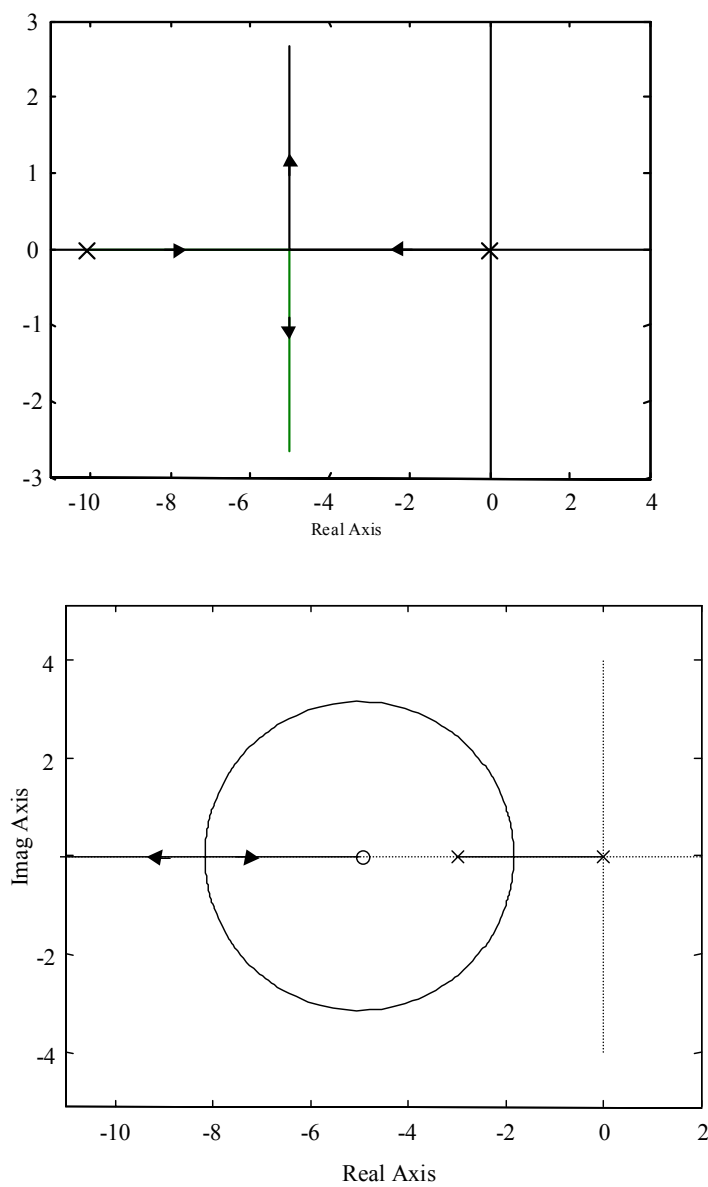


Figura 6. Lugares de la raíz mas comunes.