



Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Magallanes

# **Diseño de Controladores II**

## **Apuntes del curso de Control Automático**

**Roberto Cárdenas Dobson**  
*Ingeniero Electricista Msc. Ph.D.*  
*Profesor de la asignatura*

*Este apunte se encuentra disponible en la página web <http://ona.fi.umag.cl/~rcd>*

## VI. Modelos de Pequeña Señal

Los sistemas lineales son aquellos en que se puede aplicar proporcionalidad y superposición. Matemáticamente, dado un conjunto de vectores  $(x,y,z)$  y un conjunto de escalares  $(\alpha,\beta,\gamma)$ , una función es lineal si:

$$f(x + y + z) = f(x) + f(y) + f(z) \quad \text{Superposición} \quad (1)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \text{Proporcionalidad} \quad (2)$$

Los sistemas no lineales complican el diseño de compensadores. Por ejemplo en la figura 1 se tiene:

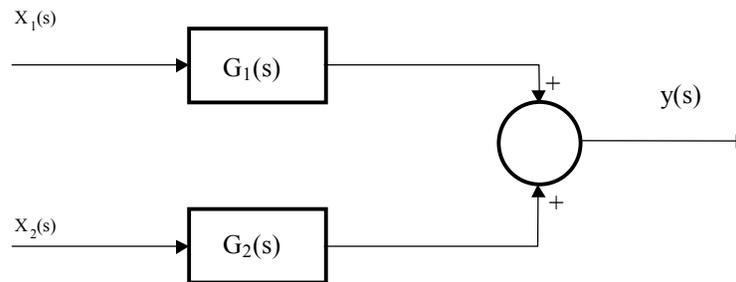


Fig. 1. Sistema lineal.

Si el sistema es lineal, la salida puede calcularse como  $y(s) = X_1(s)G_1(s) + X_2(s)G_2(s)$ . Sin embargo si, por ejemplo, en uno de los bloques tenemos una relación de la forma  $y = x^2$  (no se cumple superposición ni proporcionalidad) el sistema ya no es lineal y se debe recurrir a algunas simplificaciones para efectuar el diseño de un sistema de control en estas condiciones.

### VI.1 Linealización de Sistemas no Lineales

Fig.2 muestra un sistema de control en que existe una función no lineal en el actuador.

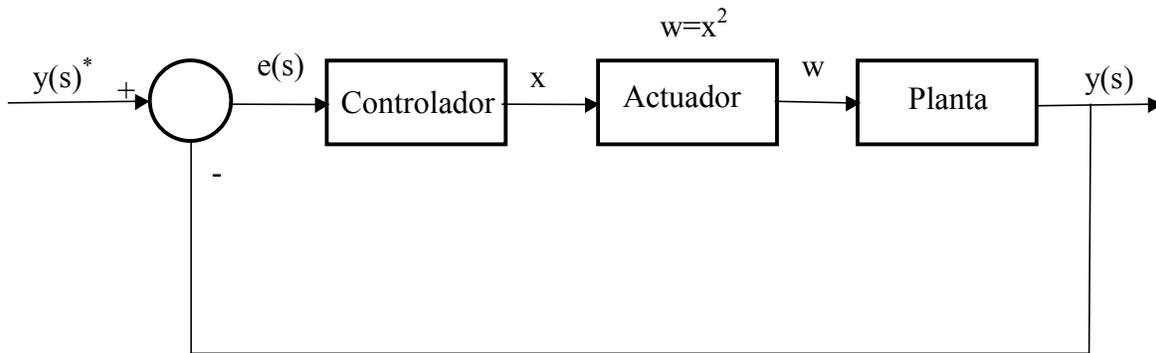


Fig.2 Sistema de control considerando actuador no lineal.

La función de transferencia del actuador se muestra en la siguiente figura:

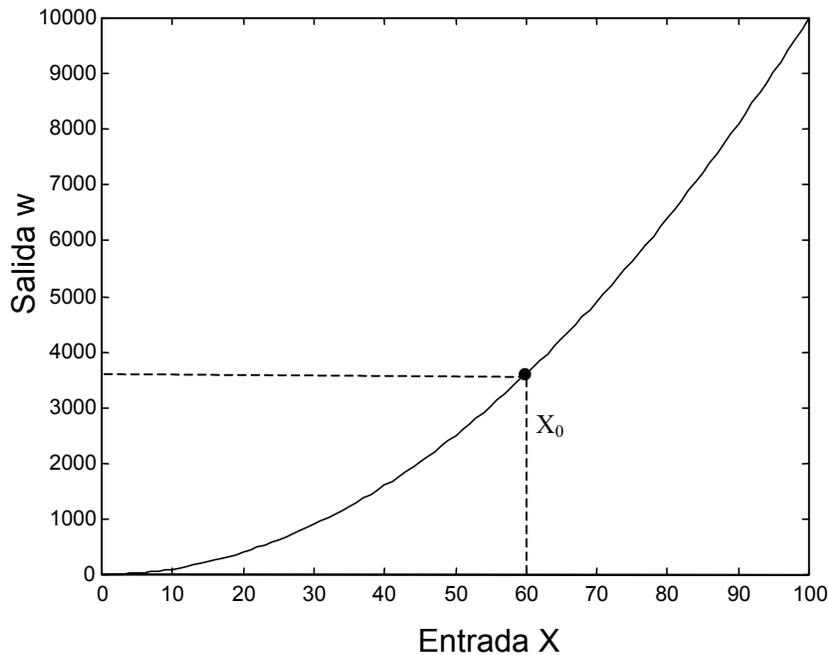


Fig.3. Función de transferencia del actuador.

El modelo de pequeña señal del sistema se basa en que alrededor de un punto, por ejemplo  $X_0$ , se puede trazar una línea recta que representa a la función de transferencia en los alrededores de  $X_0$ . La salida del actuador, en torno a ese punto de operación, puede escribirse entonces como:

$$w = x \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} + n \tag{3}$$

Donde  $n$  es una constante o el punto donde esta recta imaginaria corta el eje  $w$ . Utilizando esta ecuación en el sistema de control de la Fig. 2 se tiene:

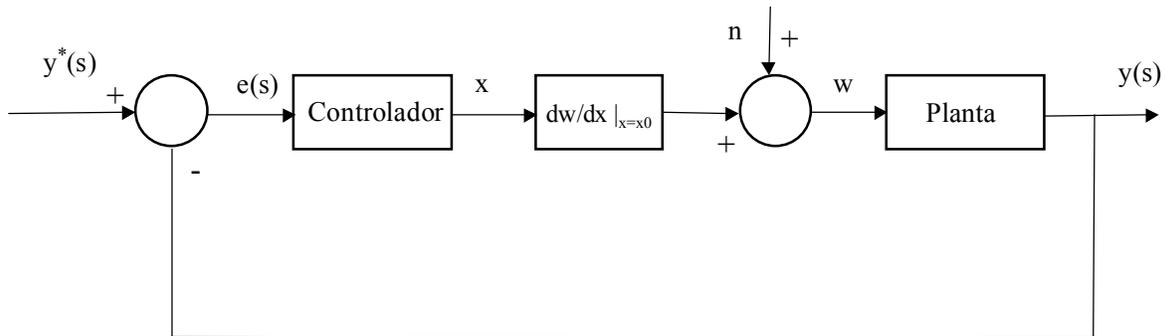


Fig. 4 Sistema de control considerando modelo de pequeña señal.

Como se demostró en uno de los apuntes anteriores, la función de transferencia de un sistema de control tiene idénticos polos de lazo cerrado independiente de la posición de la entrada en el lazo de control. Aplicando superposición solo se necesita analizar la función de transferencia  $y(s)/y^*(s)$  para ubicar los polos de lazo cerrado. En general el sistema de la Fig. 4 no se utiliza para representar sistemas de control con modelos de pequeña señal, utilizándose en cambio señales incrementales. El modelo incremental se deduce como:

$$w_1 = x_1 \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} + n$$

$$w_2 = x_2 \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} + n \tag{4}$$

$$\Delta w = \Delta x \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Donde los puntos  $w_1$  y  $w_2$  se encuentran en la vecindad de la señal  $x_0$ . Utilizando (4) el sistema de control de la Fig. 4 se puede modificar a:

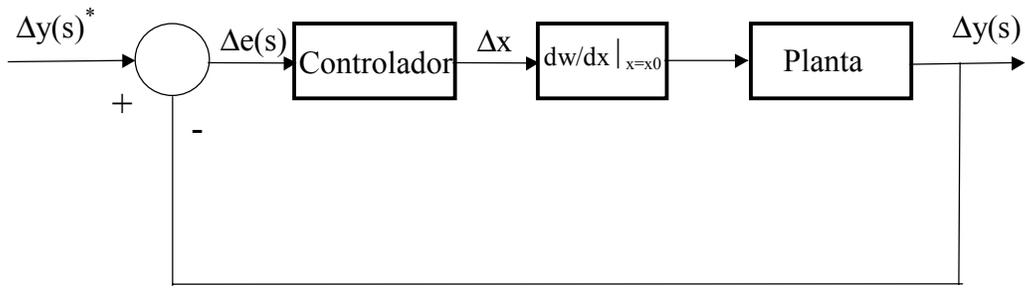


Figura 5. Modelo incremental.

Para el caso del sistema de control de la Fig.5 se desea diseñar un sistema de control para una planta  $G(s)$  de la forma:

$$G(s) = \frac{36}{(s + 6)(s + 3)(s + 2)} \tag{5}$$

Con un actuador de la forma:

$$w = 10x^2 \tag{6}$$

Suponiendo que se utilice un controlador PI diseñado por cancelación se tiene:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + 2}{s} \tag{7}$$

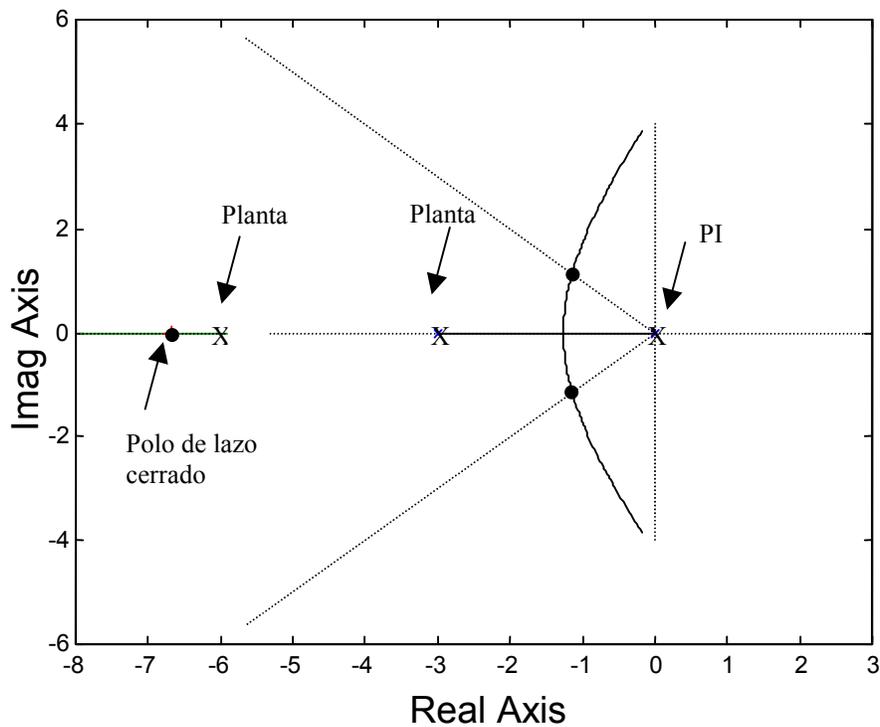


Fig. 6. Lugar de la raíz.

Si se utiliza un punto de operación  $x_0=5$ , se tiene:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} = 20x_0 = 100 \quad (8)$$

La ganancia del sistema para operar con un coeficiente de amortiguamiento de 0.7 es 0.4586. Esto significa que la ganancia del controlador se calcula como:

$$K_{sistema} = k_c \times 20x_0 \times 36 \quad \Rightarrow \quad k_c = 0.4586 / (100 \times 36)$$

Cuando se tienen no linealidades “suaves” o acotadas se puede diseñar un sistema de control en un punto medio y conservar una buena respuesta dinámica a pesar de que existan cambios en el punto de operación. Por ejemplo si la variable  $x$  de (6) puede variar solo entre 5 y 10, la ganancia representada por  $dw/dx$  puede variar entre 100 y 200. La ganancia intermedia es 150 y corresponde a un punto de operación ubicado en  $x_0=7.5$ . Diseñando el controlador de acuerdo al diagrama del lugar de la raíz mostrado en la Fig. 6, para un coeficiente de amortiguamiento de 0.7 se tiene que la ganancia  $k_c$  es  $0.4586 / (150 \times 36)$ .

¿Que sucede cuando el punto de operación se mueve entre 5 y 10? . Para el caso de que el punto de operación se mueva hacia 5 la ganancia del sistema cambia a:

$$x_0 = 5 \Rightarrow K_{sistema} = 0.4586 \frac{100}{150} = 0.3057$$

$$x_0 = 10 \Rightarrow K_{sistema} = 0.4586 \frac{200}{150} = 0.6114 \quad (9)$$

Al cambiar el punto de operación, cambia la ganancia del sistema y también cambia la posición de los polos de lazo cerrado. Cuando se usa el punto de equilibrio original, el sistema operaba con un coeficiente de amortiguamiento de 0.707 y una frecuencia natural de  $1.57 \text{ rads}^{-1}$ . Al moverse a  $x_0=5$  los polos de lazo cerrado se desplazan a  $\omega_n=1.29 \text{ rads}^{-1}$  con un coeficiente de amortiguamiento de 0.97. En  $x_0=10$  los polos de lazo cerrado se encuentran con un coeficiente de amortiguamiento de 0.62 y una frecuencia natural de  $1.75 \text{ rads}^{-1}$ . El movimiento de los polos de lazo cerrado se muestra en la Fig. 7. A pesar del desplazamiento de los polos el sistema mantiene una operación razonable pero esto se debe solo a que la no linealidad se encuentra acotada .

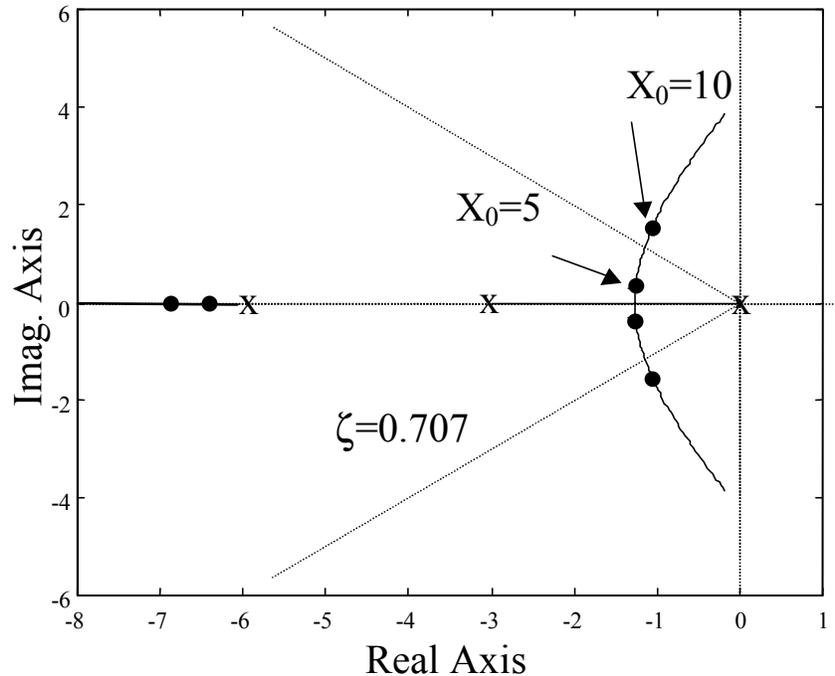


Fig. 7. Lugar de la raíz considerando cambios en las ganancias.

Pero supongamos ahora que la no linealidad no se encuentra acotada y que el punto superior de equilibrio para  $x_0$  puede tomar valores mucho mayores. Utilizando el lugar de la raíz se puede observar que los polos de lazo cerrado cruzan al semiplano izquierdo cuando la ganancia del sistema es mayor a 4.5 (aproximadamente). Esto significa que si un controlador se ha diseñado para un punto de operación igual a  $x_0=7.5$ , entonces el sistema se vuelve inestable cuando:

$$20x_0 k_c x 36 > 4.5 \Rightarrow x_0 > 4.5 \frac{0.4586}{(150x36)} 36 \tag{10}$$

Por lo tanto, para un sistema altamente no lineal, el diseñar un sistema de control en base a un punto medio no es apropiado y se debe recurrir a otros esquemas de control como el sistema denominado escalera de ganancias o gain scheduling.

### VI.2 Gain Scheduling

Cuando un sistema de control no puede diseñarse en torno a un solo punto de operación se pueden utilizar varios. Para cada punto de operación la ganancia del controlador es calculada de forma que el sistema se encuentre con un coeficiente de amortiguamientos y frecuencia natural

apropiada. Luego, en funcionamiento, el punto de operación se mide y se selecciona la ganancia que entrega la mejor respuesta. El diagrama de bloques para un sistema gain scheduling se muestra en la siguiente figura:

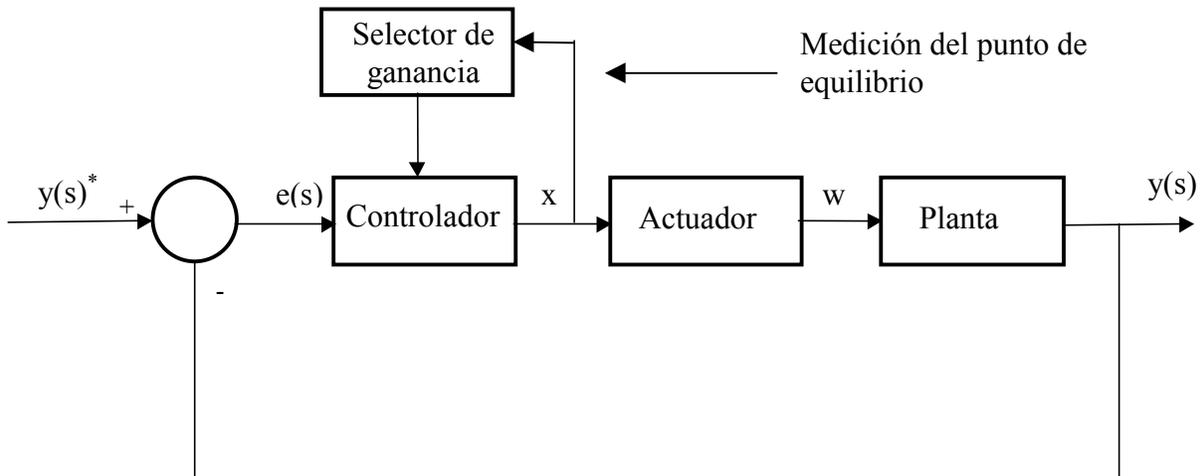


Fig. 8. Sistema de control gain-scheduling.

Por ejemplo si el actuador tiene un límite de operación entre 0-2500, se pueden establecer 25 puntos de operación equidistantes, cada 100 unidades y encontrar la ganancia del controlador para cada uno de ellos de forma que el sistema a lazo cerrado se encuentre operando con un coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural casi **constant**. El cambio de ganancia se efectúa midiendo alguna variable relacionada con el punto de equilibrio del sistema. Sin embargo gain-scheduling debe diseñarse adecuadamente ya que la medición del punto de equilibrio introduce un nuevo lazo de realimentación en el sistema y esto puede producir cambios en las características dinámicas del lazo de control e incluso inestabilidad.

### VI.3 Modelos de Pequeña Señal Multidimensionales.

Si se tiene una función no lineal en más de una dimensión el modelo de pequeña señal incremental se obtiene tomando en cuenta las contribuciones de cada una de las variables. Por ejemplo. Si se tiene una señal  $u$  que es una función no lineal de las variables  $(x,y,z)$ , el modelo de pequeña señal se obtiene como:

$$u = f(x, y, z)$$

$$\Delta u = \left[ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \right]_{x_0, y_0, z_0} \quad (11)$$

Un caso sistema no lineal en dos dimensiones es el control de potencia de un generador de velocidad variable. En este caso la potencia se calcula como:

$$P = \omega_r T \quad (12)$$

Donde  $\omega_r$  es la velocidad rotacional y T es el torque eléctrico. Linealizando el sistema se tiene:

$$\Delta P = \Delta \omega_r T_{e0} + \Delta T_e \omega_{r0} \quad (13)$$

Este modelo permitiría, por ejemplo, efectuar control de potencia en un generador eléctrico.

## VI. Lazos de Control Anidados

Existen algunas aplicaciones donde se necesitan lazos de control anidados. El ejemplo mas típico es el caso de controladores de máquinas eléctricas. En esta aplicación se usan habitualmente dos lazos, un lazo de velocidad externo e internamente un lazo de corriente. La siguiente figura muestra esta construcción:

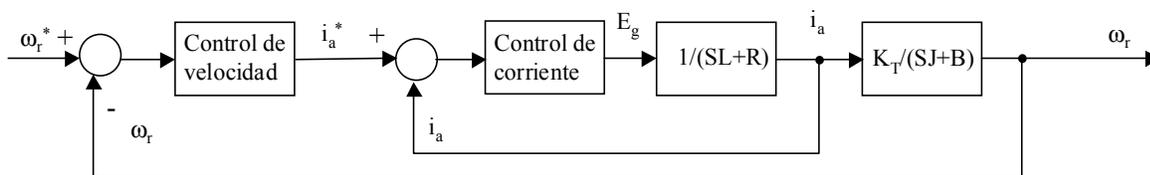


Fig. 9. Lazos de control en cascada.

En la Fig.9 se muestran dos lazos de control anidados, pero en general se pueden tener mas de dos lazos de control anidados. La característica principal de estos esquemas de control es que el lazo interno es bastante mas rápido que el lazo externo. Por ejemplo en la Fig. 9, el lazo de corriente es generalmente 10 veces mas rápido que el lazo de velocidad. De esta forma los compensadores se pueden diseñar en forma desacoplada.

Para ilustrar el funcionamiento de lazos de control en cascada se analizará el caso de un sistema de control para una máquina de corriente continua con excitación separada. La máquina se muestra en la siguiente figura:

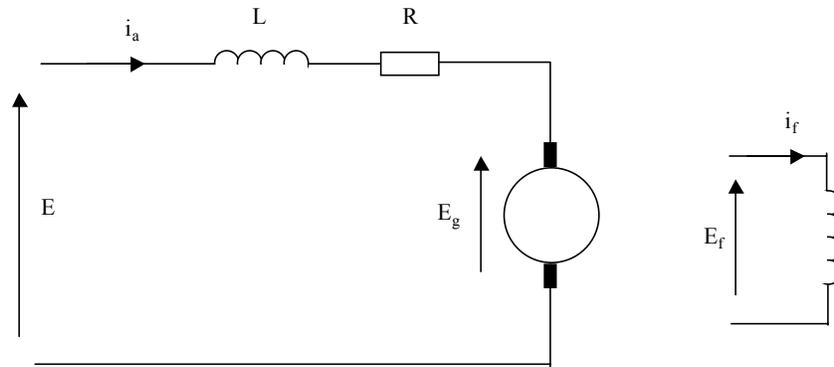


Fig. 10. Máquina de corriente continua con excitación separada.

La armadura del motor se alimenta utilizando un fuente de voltaje variable  $E$ . Si se mantiene la corriente de campo  $i_f$  constante, las ecuaciones diferenciales del motor de corriente continua se escriben como:

$$\begin{aligned}
 E_g &= K_T \omega_r \\
 E &= Ri_a + L \frac{di_a}{dt} + K_T \omega_r \\
 T_e &= K_T i_a \\
 T_e &= J \frac{d\omega_r}{dt} + B\omega_r
 \end{aligned} \tag{14}$$

Donde  $K_T$  es una constante que depende de aspectos constructivos del motor y del flujo de operación,  $R$  y  $L$  son la resistencia e inductancia de los devanados,  $\omega_r$  es la velocidad rotacional,  $J$  y  $B$  son la inercia rotacional y el coeficiente de fricción respectivamente. El diagrama de bloques del control de una máquina de corriente continua se muestra en la siguiente figura:

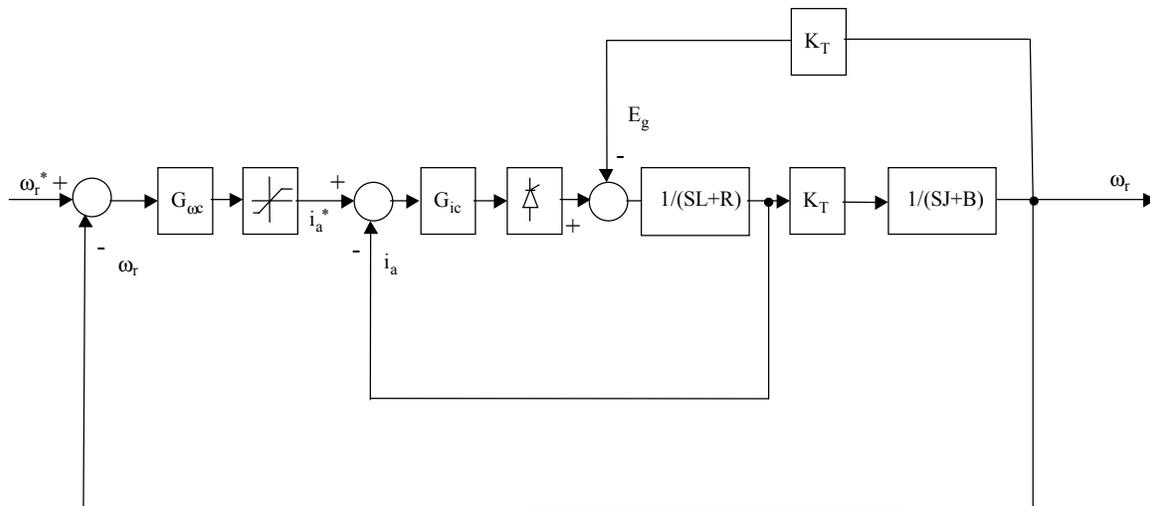


Fig. 11. Diagrama de bloques para el control de una máquina de corriente continua.

Para el diseño de los lazos de control se utiliza habitualmente una frecuencia de al menos 70 o 100Hz para el lazo de corriente y alrededor de 5Hz para el lazo de velocidad. El coeficiente de amortiguamiento utilizado es habitualmente cercano a [0.7-0.8] pero esto depende de la aplicación.

Para el diseño del lazo de corriente se considera que este es mucho más rápido que el lazo de velocidad. Esto se justifica debido a que la constante de tiempo eléctrica  $L/R$  es mucho menor que la constante de tiempo mecánica  $J/B$ . Tomando esto en consideración se puede considerar que la realimentación  $K_T\omega_r$  es una entrada constante o una perturbación externa. Aplicando superposición se puede diseñar el controlador para la función de transferencia  $i_a/i_a^*$ . La figura 12 muestra el lugar de la raíz resultante.

El diseño del lazo de velocidad se hace considerando que el lazo de corriente es muy rápido y que además se encuentra diseñado para cero error en estado estacionario a entrada escalón. En este caso se puede considerar el lazo de corriente como un bloque de ganancia uno. En otras palabras, desde el punto de vista del lazo de velocidad, toda corriente de referencia  $i_a^*$  a la entrada del lazo de corriente aparece instantáneamente como una corriente real  $i_a$  a la salida del lazo.

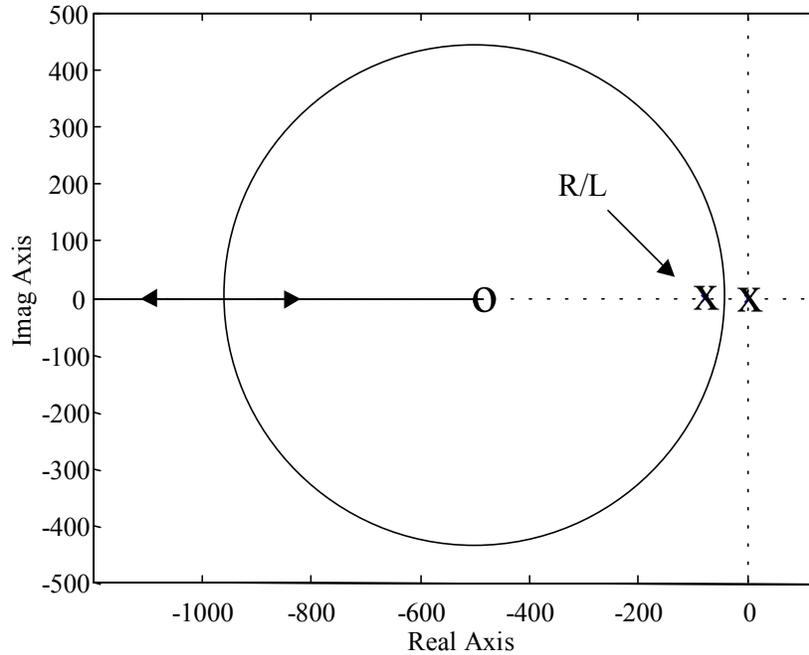


Fig. 12. Lugar de la raíz para el diseño del lazo de corriente.

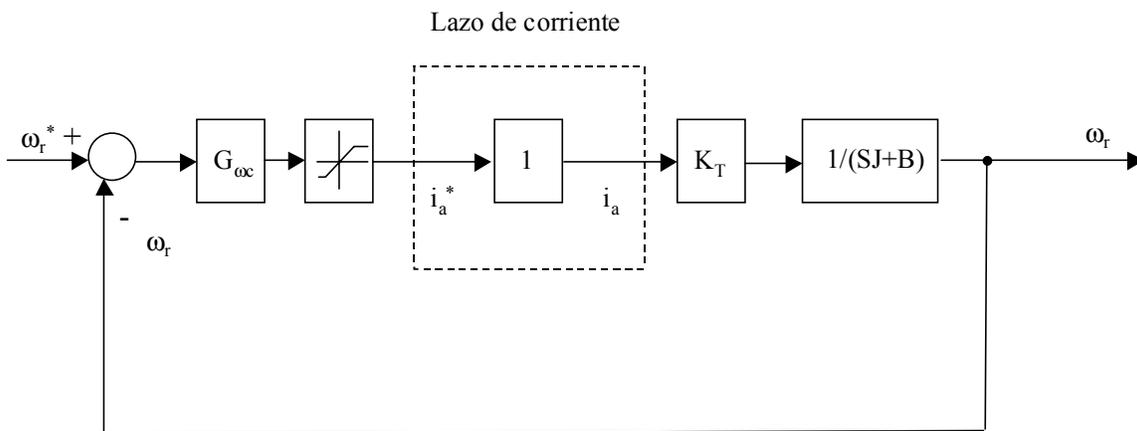


Figura 13. Diagrama de bloques utilizado para el diseño del lazo de velocidad.

El diseño del controlador de velocidad, considerando el diagrama de bloques de la Fig. 13 es trivial.

## VII. Compensación Feed-Forward

Los lazos de control son habitualmente diseñados para que los polos de lazo cerrado del sistema se encuentren en una posición adecuada, con un ancho de banda y coeficiente de amortiguamiento apropiados. Para esto normalmente se utiliza la función de transferencia salida/entrada del sistema y no se considera el efecto de las perturbaciones.

La compensación feed-forward o pre-alimentación consiste en medir las perturbaciones y utilizarlas en el controlador (en lo posible el más rápido del sistema) para que este compense las perturbaciones evitando grandes cambios en la salida de la planta. Por ejemplo suponiendo que se desee controlar la tensión en el condensador de la siguiente figura:

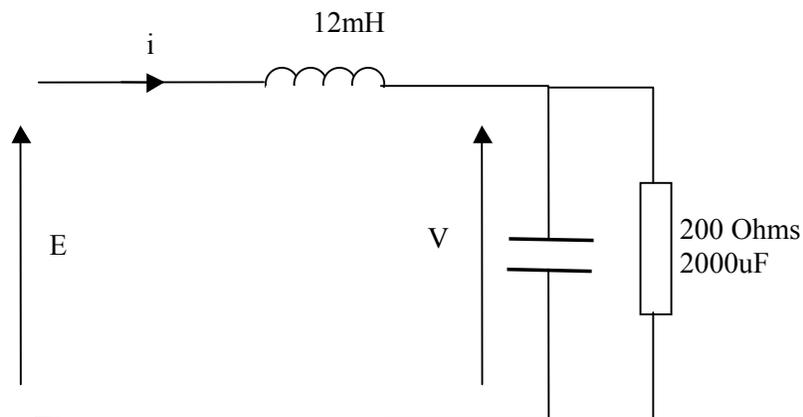


Figura 14. Planta del sistema de control.

La estructura de control propuesta es la de utilizar dos lazos, uno de corriente y otro de tensión.

Las ecuaciones del sistema son:

$$V = i \frac{R / sC}{R + 1 / sC} = i \frac{R}{1 + sCR} \quad (15)$$

$$i = \frac{E - V}{sL}$$

El diagrama de bloques, sin considerar compensación feed-forward, es:

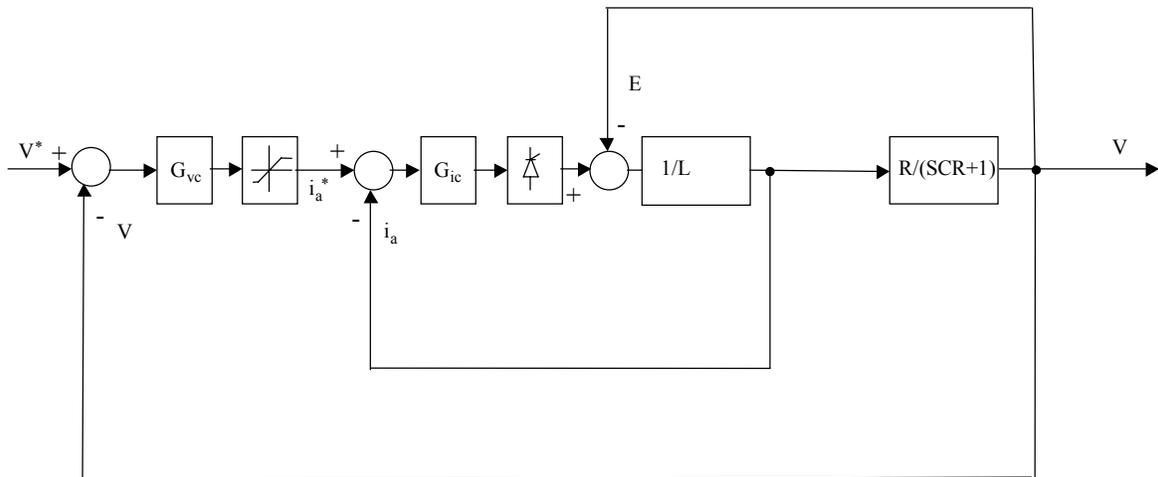


Figura 15. Diagrama de bloques sin considerar compensación feed-forward.

Para ilustrar el efecto de la compensación feed-forward se simulará un transiente que consiste en la conexión de una resistencia en paralelo con la ya existente. El lazo de corriente se encuentra diseñado para una frecuencia natural de  $300\text{rads}^{-1}$  mientras que el lazo de voltaje se encuentra diseñado con una frecuencia natural de  $30\text{rads}^{-1}$ . Para ambos lazos el coeficiente de amortiguamiento es 0.707. El diagrama de bloques implementado en simulink se muestra en la siguiente figura:

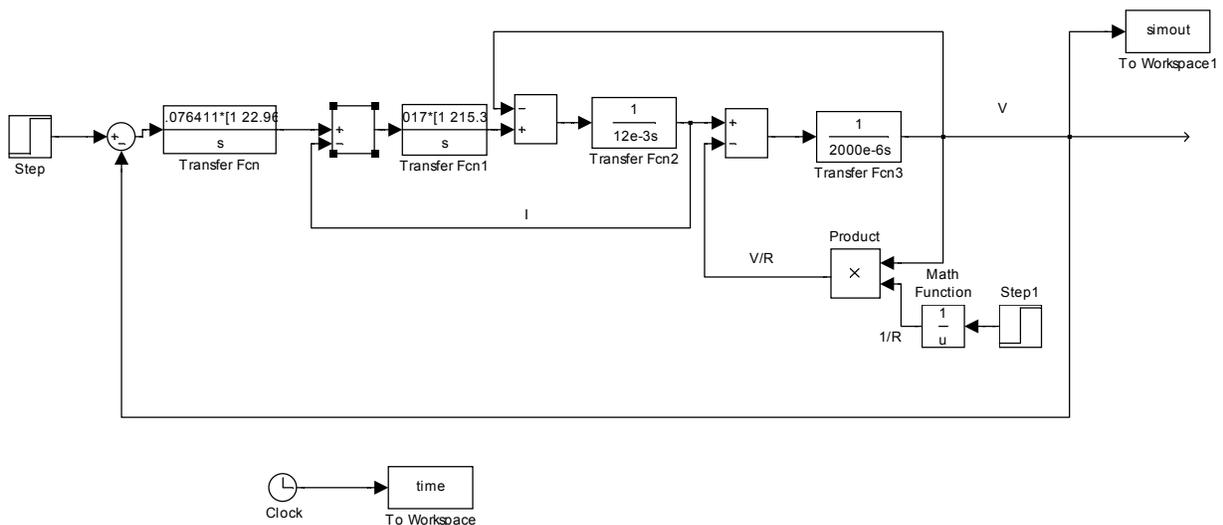


Figura 16. Implementación en simulink del diagrama de bloques sin considerar compensación feed-forward.

Los controladores de corriente y voltaje utilizados en la simulación son:

$$G_V = 0.076411 \frac{(s + 22.96)}{s} \quad (16)$$

$$G_I = 5.0171 \frac{(s + 215.34)}{s}$$

El cambio de resistencia se efectúa utilizando un multiplicador y un inversor (para obtener el valor  $1/R$ ). La resistencia neta conectada en paralelo con el condensador cambia de 200 Ohms a 50 Ohms en  $t=2$ seg. La inductancia es de 12mH y la capacitancia es de 2000uF

La siguiente figura muestra la respuesta del sistema. En  $t=0.1$ seg se cambia la referencia de voltaje a 400V y en  $t=2$  se aplica el escalón de carga ya mencionada. Figura 18 muestra un detalle de la perturbación producida al aplicar el escalón de carga. El voltaje se reduce en casi cuarenta volts al aplicarse el cambio escalón en el valor de la resistencia.

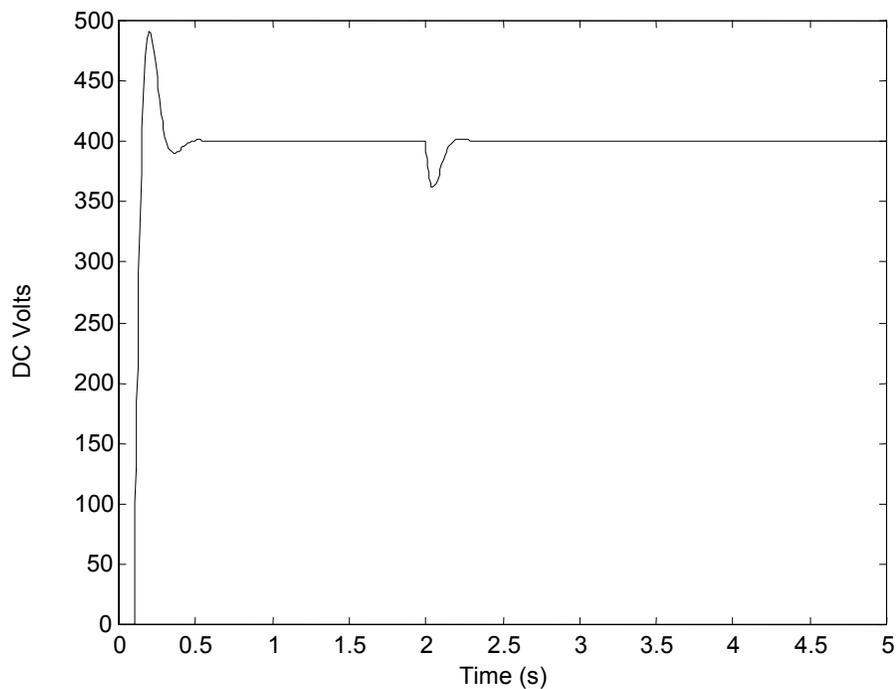


Figura 17. Respuesta del sistema de control.

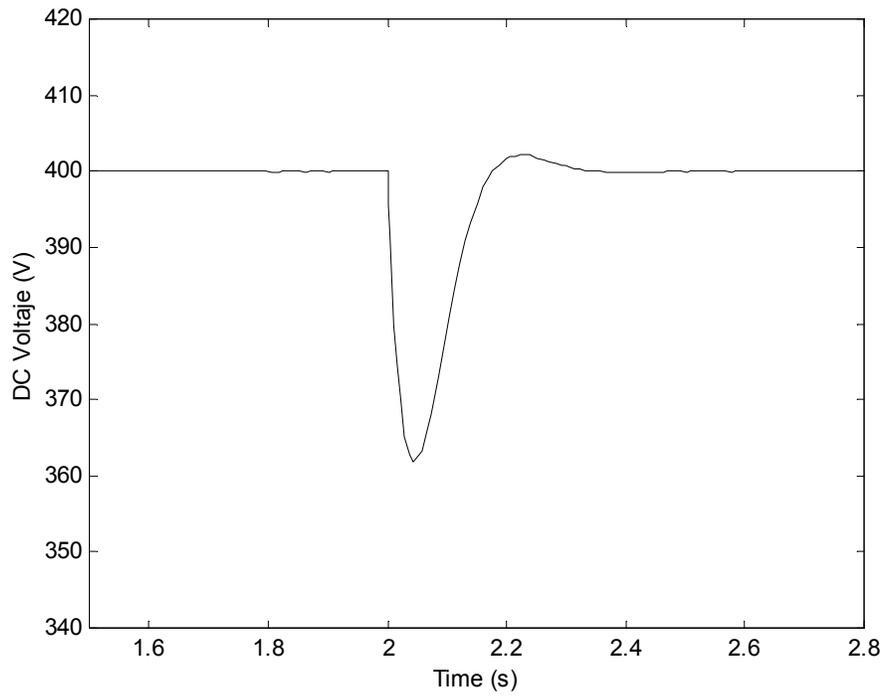


Figura 18. Perturbación producida al aplicar el escalón de carga.

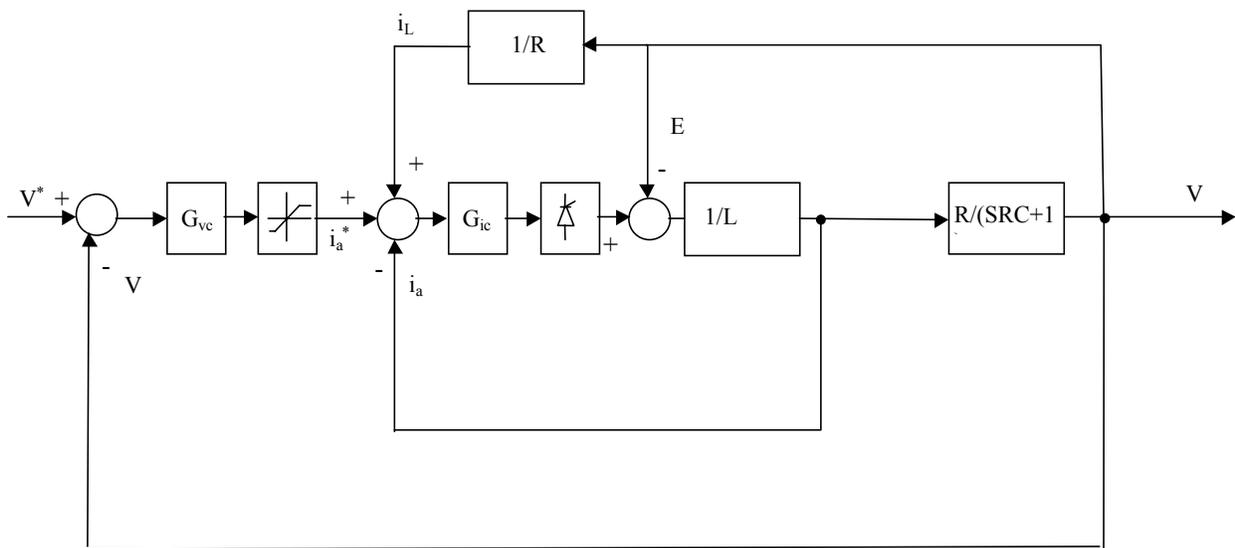


Figura 19. Diagrama de bloques considerando compensación feed-forward.

La figura 19, muestra el sistema de control con compensación feed-forward. En este caso la corriente de carga es medida y retroalimentada al lazo de corriente. De esta forma se tiene un cambio inmediato en la referencia de corriente al producirse el escalón de carga.

Cuando feed-forward no es considerado el efecto de la perturbación es controlado en su totalidad por el lento lazo de voltaje. En cambio cuando feed-forward es utilizado la mayor parte del esfuerzo de control es realizado por el rápido lazo de corriente.

Figura 20 muestra la implementación en Simulink del sistema de control incluyendo compensación feed-forward. Los controladores de corriente y voltaje son los mismos considerados anteriormente para el caso en que no se utiliza compensación feed-forward. Figura 21 muestra el efecto del escalón de carga en la salida del sistema. Como puede concluirse de la Fig. 21y 22 el escalón de carga tiene un efecto prácticamente despreciable cuando feed-forward es utilizado. Las escalas de las figuras 18 y 22 son iguales.

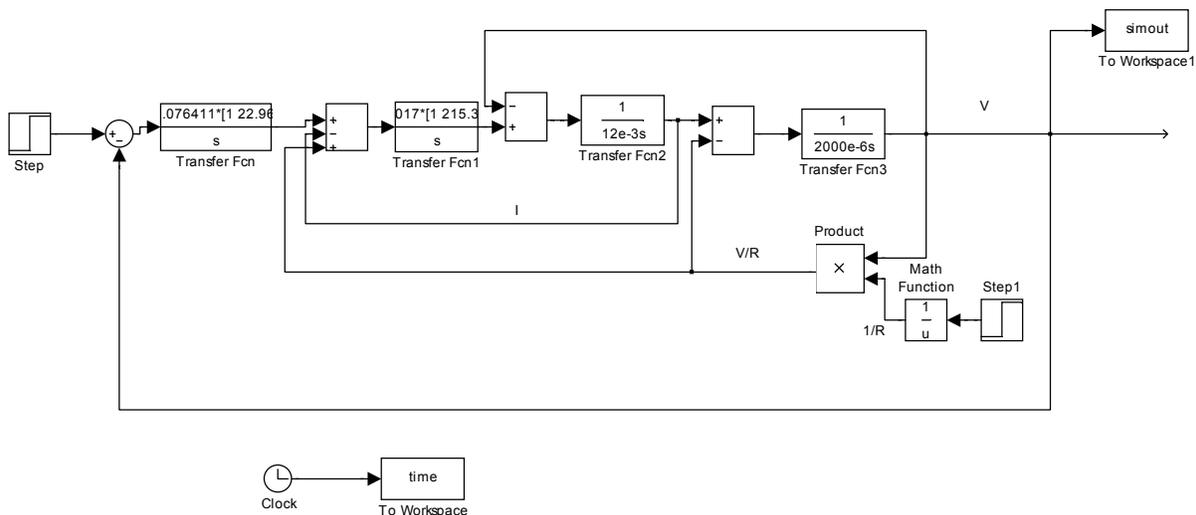


Figura 20. Implementación en Simulink considerando compensación feed-forward.

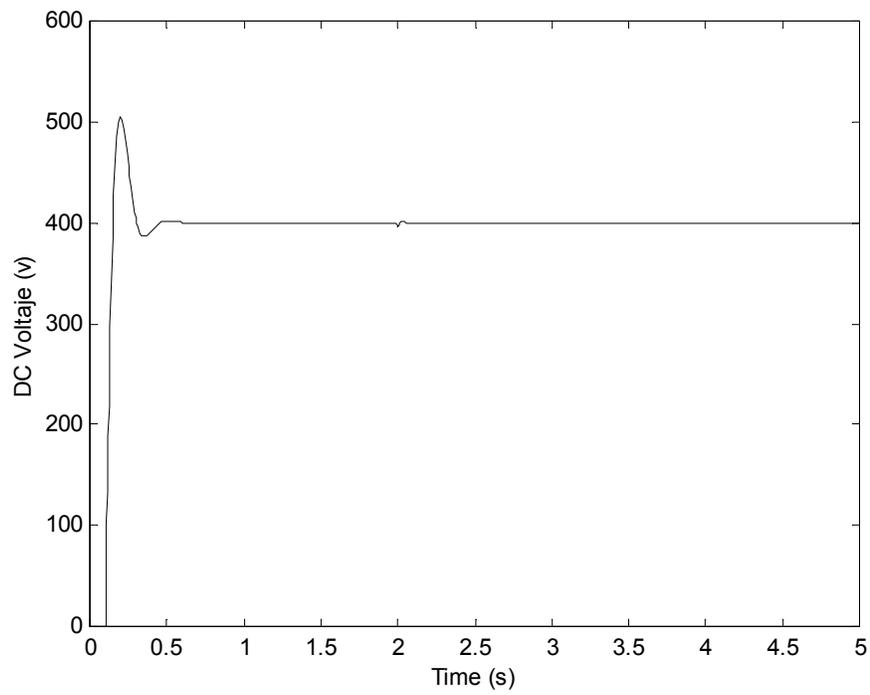


Figura 21. Respuesta del sistema.

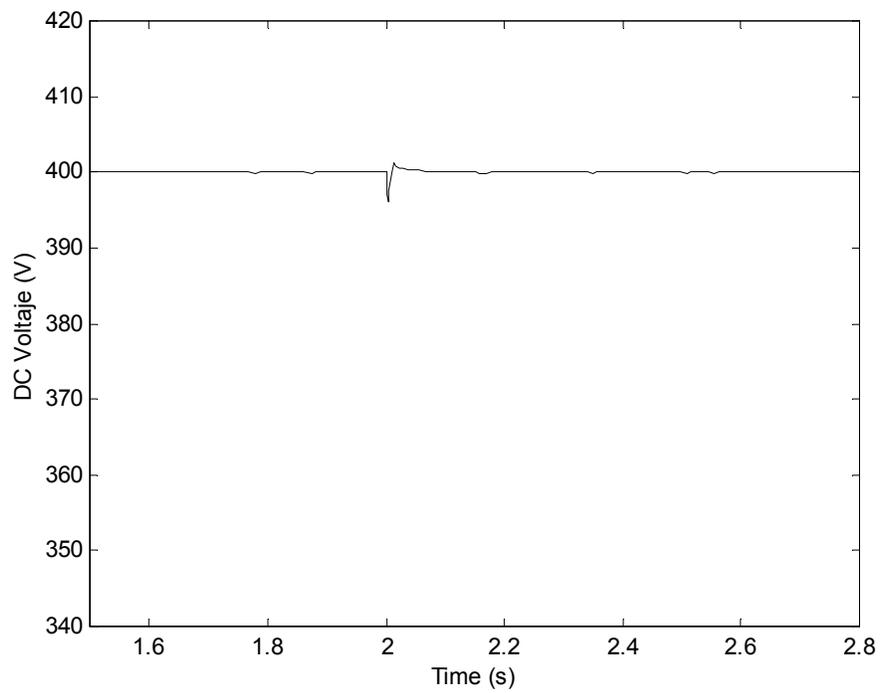


Figura 22. Respuesta del sistema al momento de aplicarse el escalón de carga.

### VIII.1 Efecto de la compensación Feed-forward

El efecto de la compensación feed-forward puede analizarse considerando que el lazo de corriente es muy rápido y que el voltaje  $V$  es dinámicamente más lento. De esta forma puede considerarse que el lazo de corriente tiene una función de transferencia igual a uno. El diagrama de bloques es:

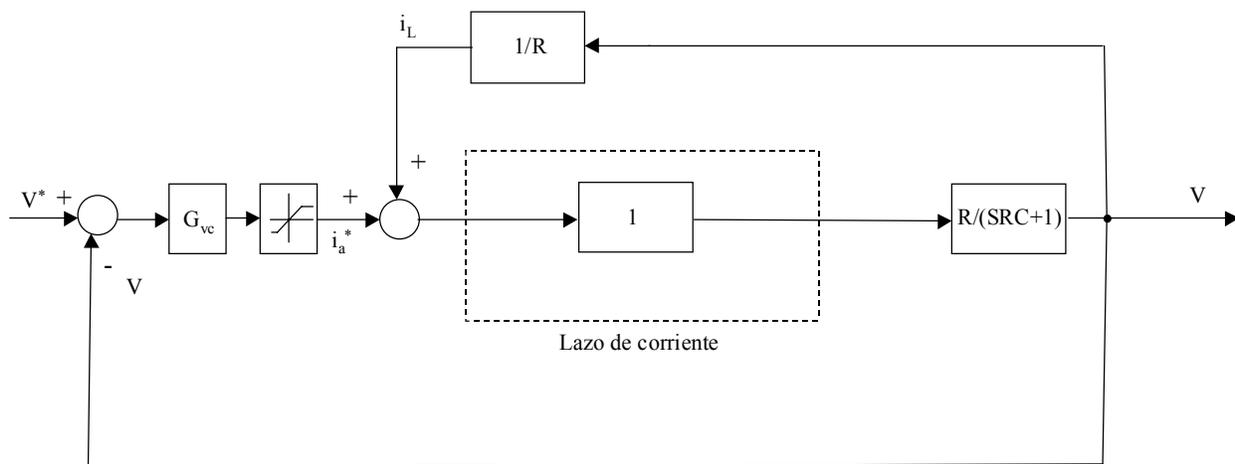


Figura 23. Diagrama de bloques simplificado considerando compensación feed-forward.

La función de transferencia  $V/i_a^*$  puede obtenerse como:

$$\frac{V}{i_a^*} = \frac{\frac{R}{SRC+1}}{1 - \frac{1}{R} \frac{R}{SRC+1}} = \frac{\frac{R}{SRC+1}}{\frac{SRC}{SRC+1}} = \frac{1}{SC} \quad (17)$$

Lo que significa que independiente de la magnitud del escalón, desde el punto de vista del lazo de voltaje la planta no varía. Esto porque los cambios de cargas son compensados por el lazo de corriente y no el de voltaje. En forma ideal y de acuerdo a (17) y a lo mostrado en la figura 23, los cambios de carga no producen ningún efecto en la salida. Sin embargo en una implementación real el lazo de corriente tiene una función de transferencia distinta a uno y generalmente la corriente de carga debe medirse utilizándose transductores y filtros. Estos efectos combinados producen una compensación feed-forward que no es ideal. Las figuras 21 y 22 muestran el efecto del lazo de corriente en la compensación feed-forward.

## IX Internal Model Control

Internal Model Control o IMC es una estructura de control de diseño algebraico, es decir a través de ecuaciones, y por ese motivo es un método de diseño popular entre aquellos ingenieros que no tienen una fuerte formación en áreas como lugar de la raíz, métodos de respuesta de frecuencia etc. En general IMC se ha con frecuencia en ingeniería química y control de procesos. También es utilizado en máquinas eléctricas.

Figura 24 muestra el diagrama de un sistema de control IMC.

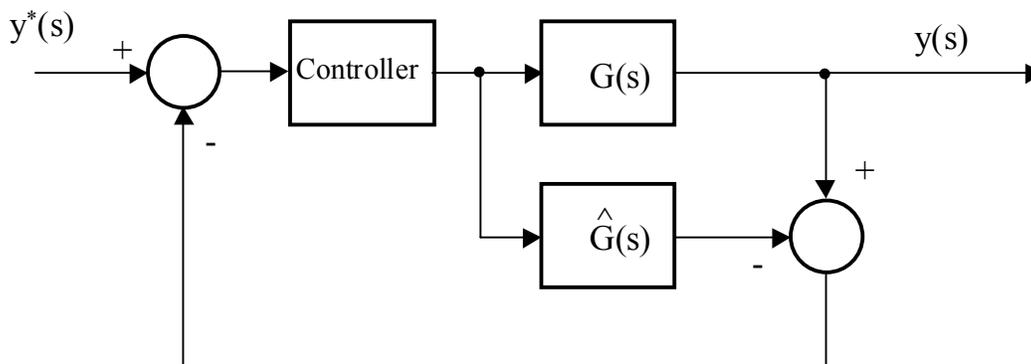


Figura 24. Sistema de control IMC.

En la figura la planta es  $G(s)$  y  $\hat{G}(s)$  es una estimación de la planta (efectuado por el diseñador). Suponiendo un controlador con una función de transferencia  $G_c(s)$ , la función de transferencia de lazo cerrado puede escribirse como:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)[G(s) - \hat{G}(s)]} \quad (18)$$

En general si la planta se encuentra bien identificada, el denominador de la función de transferencia a lazo cerrado es unitario es decir:

$$G(s) - \hat{G}(s) \approx 0 \Rightarrow \frac{y(s)}{y^*(s)} = G_c(s)G(s) \quad (19)$$

Ecuación (19) permite el diseño algebraico de un controlador, debido a que se eliminó la ecuación característica del sistema  $1 + G(s)H(s) = 0$ . Por ejemplo, suponiendo una planta de primer

orden, se desea diseñar un controlador para obtener una respuesta de lazo cerrado de segundo orden. Algebraicamente se tiene:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} = G_c(s) \frac{a}{s+a} \quad (20)$$

Donde  $a/(s+a)$  es la planta y  $G_c(s)$  el controlador que se desea diseñar. Resolviendo (20) el controlador a utilizar se obtiene como:

$$G_c(s) = \frac{(\omega_0^2/a)(s+a)}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (21)$$

Este controlador entregara la respuesta apropiada si es que la estimación  $\hat{G}(s)$  de la planta es correcta. En caso contrario la función de transferencia de lazo cerrado es  $\neq$  de  $G_c(s)G(s)$  y el uso de IMC no tiene mayores ventajas con respecto a otras técnicas de diseño. Existen otras limitaciones de IMC. Primero, el controlador debe ser realizable. Esto significa que el número de ceros del controlador debe ser menor o igual al número de polos. Por ejemplo si se desea una respuesta de lazo cerrado perfecta es decir  $y(s)/y^*(s)=1$  para la planta de primer orden discutido anteriormente se tiene:

$$\frac{y(s)}{y^*(s)} = 1 \Rightarrow G_c(s) = (1/a) \frac{s+a}{a} \quad (22)$$

Este controlador no es realizable y por supuesto no es posible obtener una respuesta a lazo cerrado igual a uno. Por lo tanto al seleccionar la respuesta de lazo cerrado que se quiere lograr con IMC, se debe verificar que el controlador es realizable.

Segundo, IMC es un controlador que funciona por cancelación. El controlador obtenido en (21) tiene un cero que cancela el polo de la planta. Generalizando se tiene que al diseñar un controlador IMC, los polos y ceros de la planta son cancelados por el controlador. Esto significa que la planta no debe polos o ceros de lazo abierto en el semiplano derecho (limitación que no se aplica a otros métodos de diseño de controladores), ya que como sabemos la cancelación es imperfecta y se produce un polo de lazo cerrado inestable.

Existen procedimientos de diseño de IMC que permiten obtener controladores en la presencia de elementos en el semiplano derecho o retardos de transporte en la planta. En general los procedimientos óptimos hacen perder la simplicidad propia del diseño de controladores IMC.

Mayor información acerca de IMC puede encontrarse en “The control handbook”, IEEE Press, editor William S. Levine.