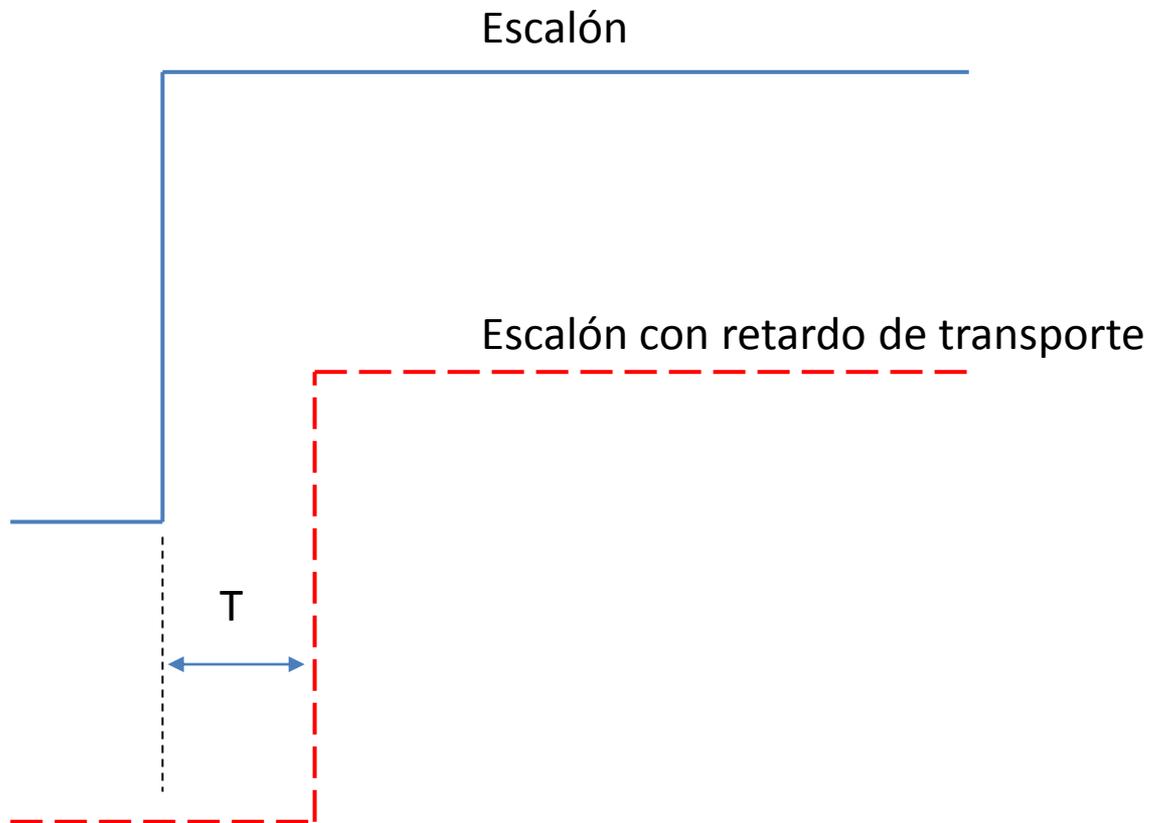
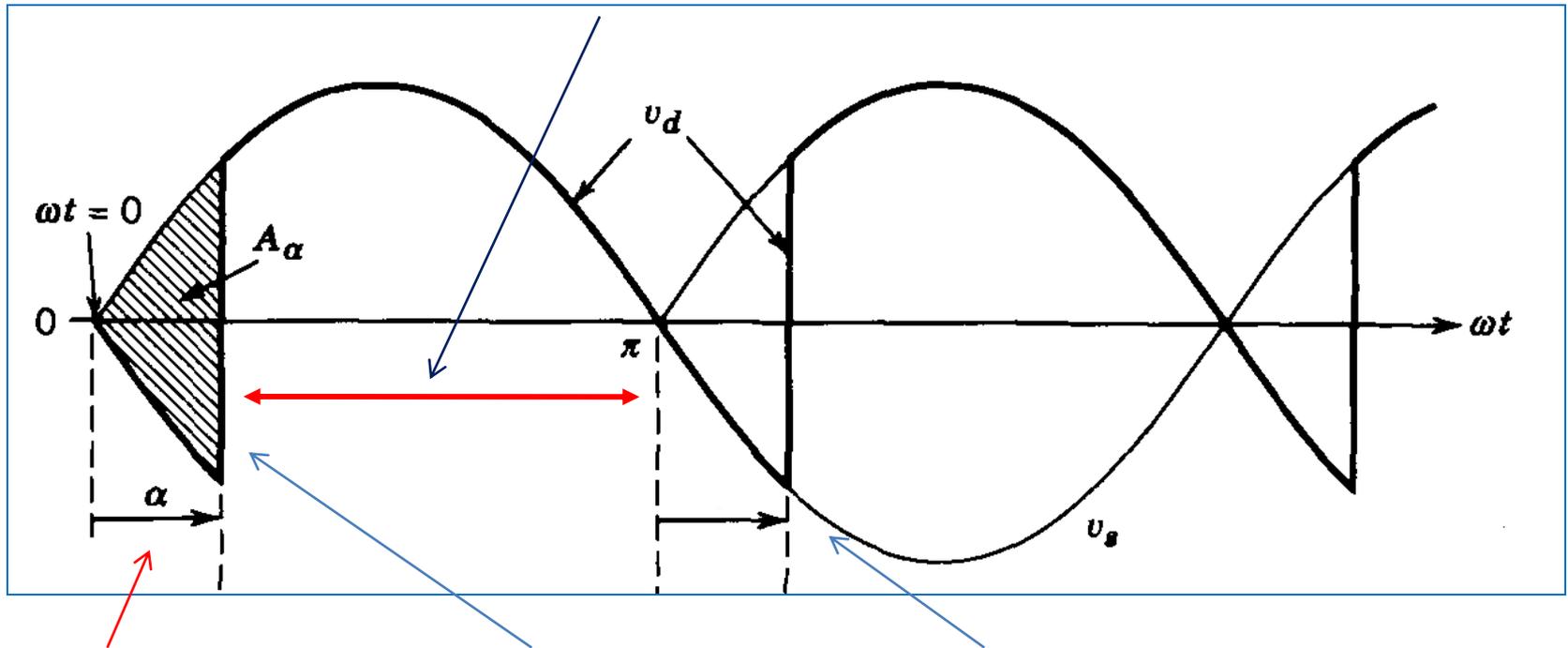


# Retardo de transporte



# Retardo de Transporte. Ejemplo de un Tiristor

$\approx$  Tiempo Muerto



Ángulo de Disparo  
(desde controlador)

Pulso de disparo

Nuevo Pulso de disparo

# Retardo de transporte

En el plano  $s$ ,  $e^{-sT}$  implica un retardo de transporte.

Habitualmente  $T$  o  $T_d$  ( $d$ =delay) se utilizan para simbolizar el tiempo del retardo.

# Retardo de transporte

- En general los dispositivos de electrónica de potencia tienen retardos asociados ya que no se puede cambiar la acción de control hasta el próximo instante de switching.
- En promedio el retardo de transporte es típicamente la mitad del período de switching. En el caso de un conversor de seis pulsos el retardo promedio es  $1/(12 f_e)$  o 1.666ms a 50Hz.
- Existen retardos de transporte en sistemas mecánicos o químicos.

# Retardo de Transporte

- En métodos de diseño en el dominio de la frecuencia, por ejemplo Bode o Nyquist, el retardo de transporte se puede considerar directamente con un módulo de 1 y una fase de  $-\omega T$ .
- El retardo de transporte disminuye el margen de fase debido a la fase negativa.

# Retardo de Transporte

- Cuando se utiliza root-locus el retardo habitualmente se representa utilizando la representación de Padé. Por ejemplo:

$$e^{-sT} \approx \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2}$$

- Además de Padé de primer orden, se puede utilizar ordenes mayores lo cual añade complejidad pero incrementa la exactitud.
- Padé permite representar el retardo como polos y ceros permitiendo considerar sus efectos al analizar el lugar de la raíz.

# Errores en la Aproximación de Padé

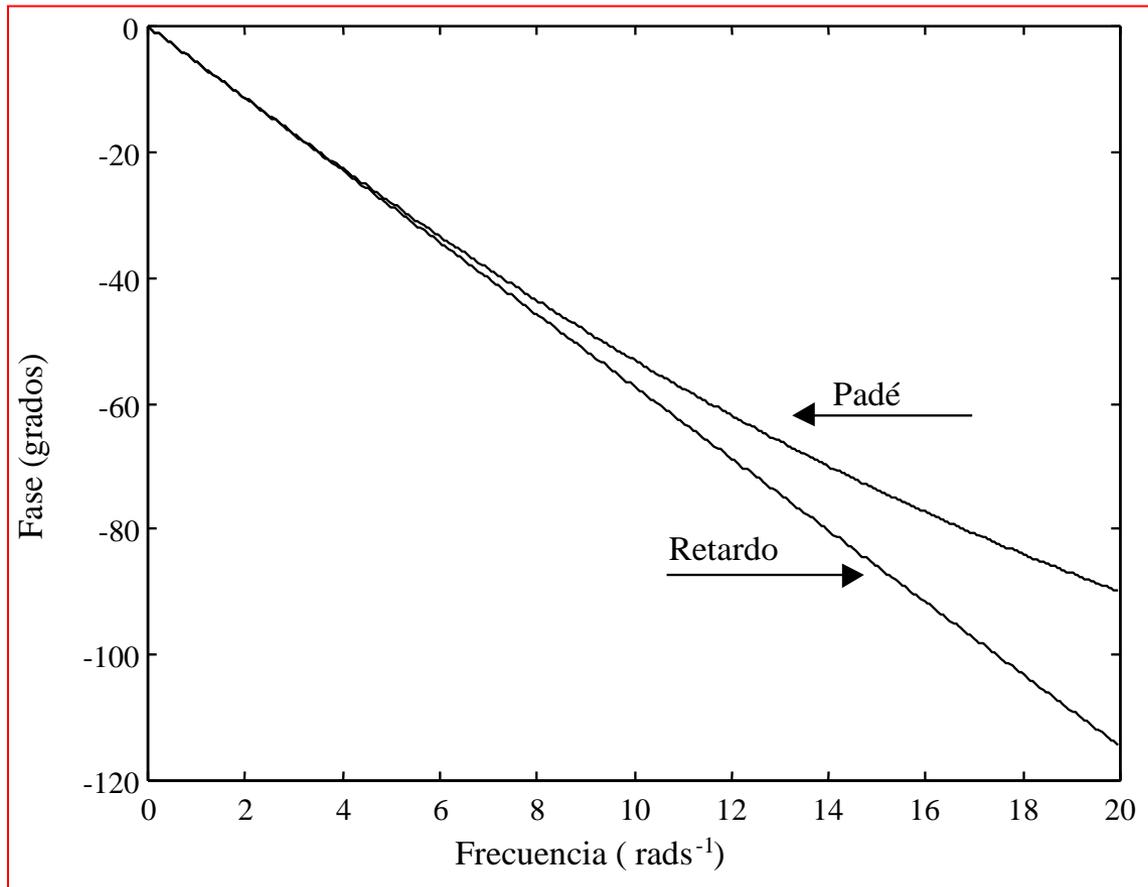
La aproximación de Padé es válida solo cuando los retardos son pequeños. Para analizar el error cometido por la aproximación de Padé utilizaremos la transformada de Fourier y la identidad de Euler. La representación en modulo y ángulo de un retardo es:

$$e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) - j\text{seno}(\omega T)$$

$$\text{Modulo} = \sqrt{(\cos(\omega T))^2 + (\text{sen}(\omega T))^2} = 1$$

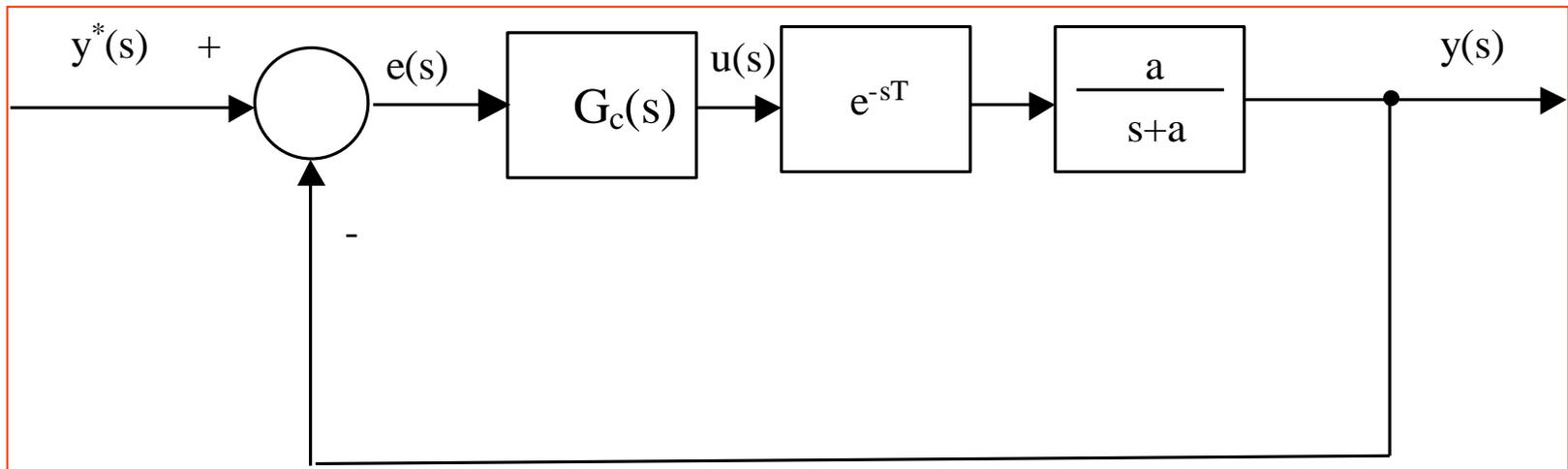
$$\text{Angulo} = -\omega T$$

# Errores en la Aproximación de Padé



# Diseño de Sistemas de Control Considerando Retardos.

Suponga que se quiere diseñar un controlador para el siguiente sistema:

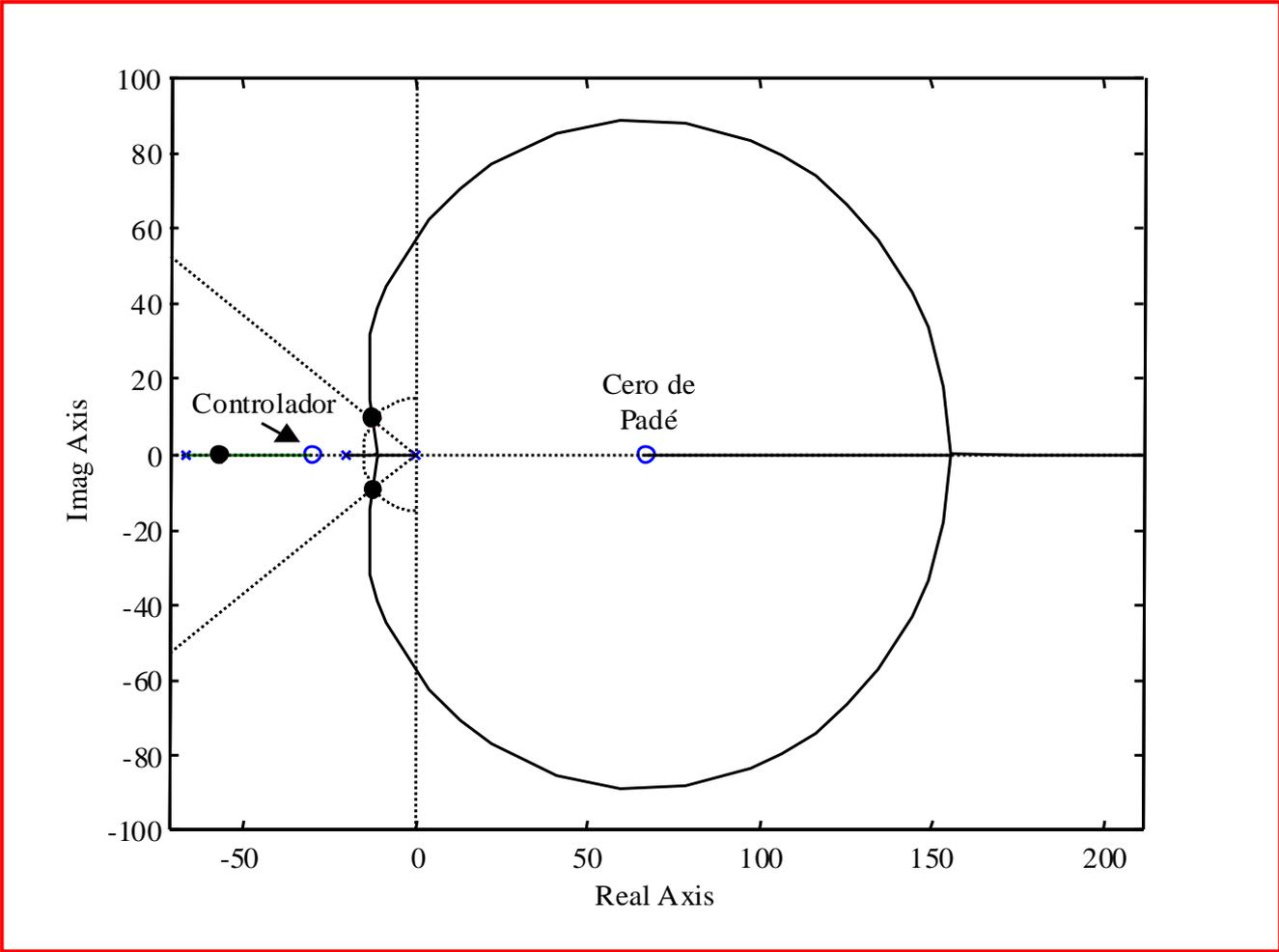


# Diseño de Sistemas de Control Considerando Retardos.

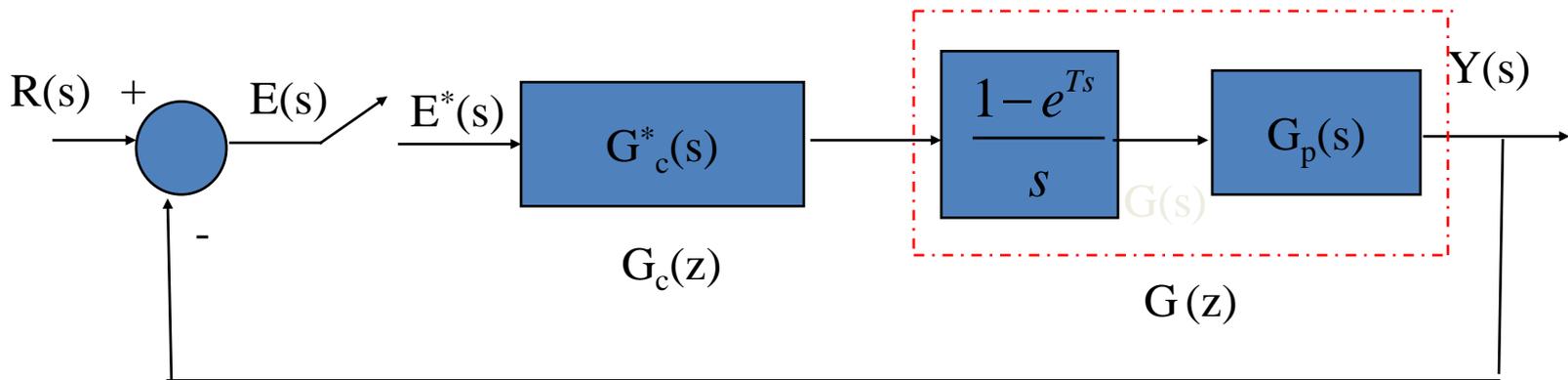
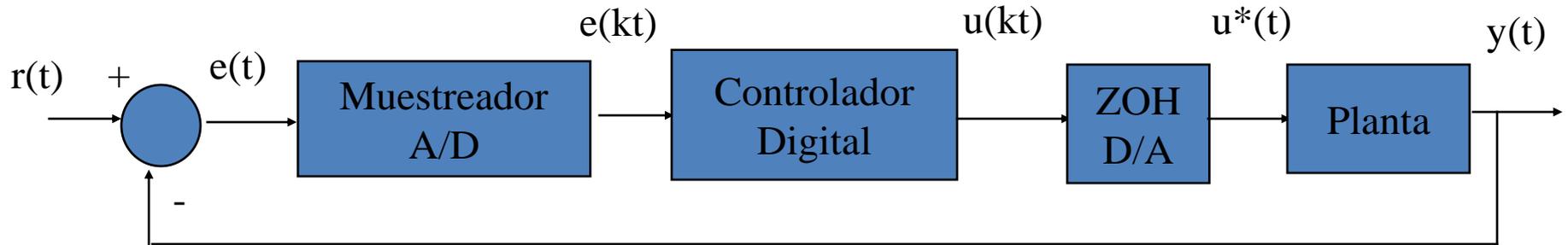
La función de lazo abierto es:

$$G(s)H(s) = G_c(s) e^{-sT} \frac{a}{s+a} \approx G_c(s) \frac{1-sT/2}{1+sT/2} \frac{a}{s+a} = -G_c(s) \frac{(-1+sT/2)}{(1+sT/2)} \frac{a}{(s+a)}$$

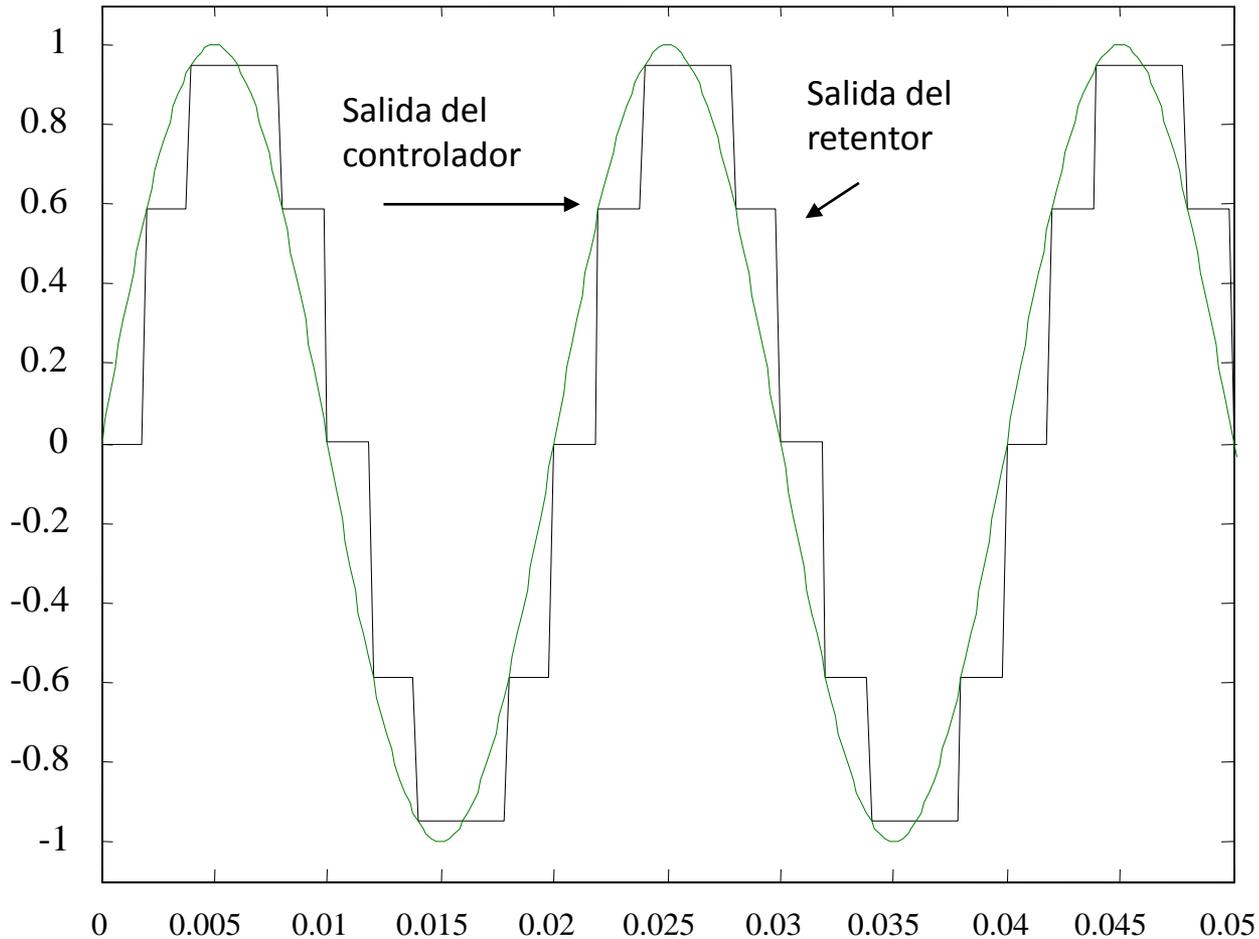
Esto indica que al utilizar la aproximación de Padé, el compensador debe diseñarse utilizando las reglas del lugar de la raíz para sistemas con ganancia negativa



# Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto



# Efectos de la Implementación Digital



# Implementación Digital

- Para implementar digitalmente el sistema de control, se debe representar el controlador en el plano  $z$ .
- Para esto se puede diseñar directamente en el plano  $z$ , por ejemplo utilizando root-locus digital, lo cual es parte de los contenidos de este curso.
- Una alternativa es convertir el controlador desde ' $s$ ' al plano  $z$ , utilizando la transformación bilineal o de Tustin.

# Implementación Digital

- La transformación Bilineal es:

$$s \approx \frac{2}{T_s} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

- Al utilizarla en un PI analógico nos lleva a:

$$K_p \frac{(s+a)}{s} \Rightarrow \frac{K_p (aT_s + 2)}{2} \frac{\left( z - \frac{(aT_s - 2)}{(aT_s + 2)} \right)}{z-1} = \frac{K_z (z - a_z)}{z-1}$$

PI  
Analógico

Transformación  
bilineal

PI  
Digital

# Transformación Bilineal

- La transformación Bilineal no es exacta y para conservar la dinámica del sistema, muchos autores recomiendan utilizar la bilineal con una frecuencia de muestreo varias veces superior al ancho de banda o frecuencia natural del sistema.
- En control de máquinas lo normal es utilizar la transformada bilineal cuando la frecuencia de muestreo es 15-30 veces superior a la frecuencia natural. Personalmente recomiendo al menos 20 veces.
- Se debe tener en cuenta que estas son 'recetas' que frecuentemente tienen excepciones.

# Implementación Digital

- Al implementar el controlador PI en un DSP (Digital Signal Processor) u otro procesador, es frecuente separar la parte proporcional de la integral:

$$K_z \frac{(z - a_z)}{(z - 1)} = K_{pz} + K_{iz} \frac{z}{z - 1}$$

PI Digital

Parte  
proporcional

Integrador  
Digital

# Implementación Digital

Valor anterior de la integral

```
Error=y*-y; /*Referencia -señal medida*/
```

```
O1=O0+kiz*Error; /*parte integral de la salida*/
```

Constante Integral

Nuevo valor de la integral

```
U=O1+kpz*Error; /*salida total P+I */
```

Constante proporcional

Salida al actuador

```
/* Rutina antiwindind-up*/
```

```
If (U>MAX) /* Verifica límite superior*/
```

```
U=MAX; /*Limita*/
```

```
Elseif (U<MIN) /* Verifica límite inferior */
```

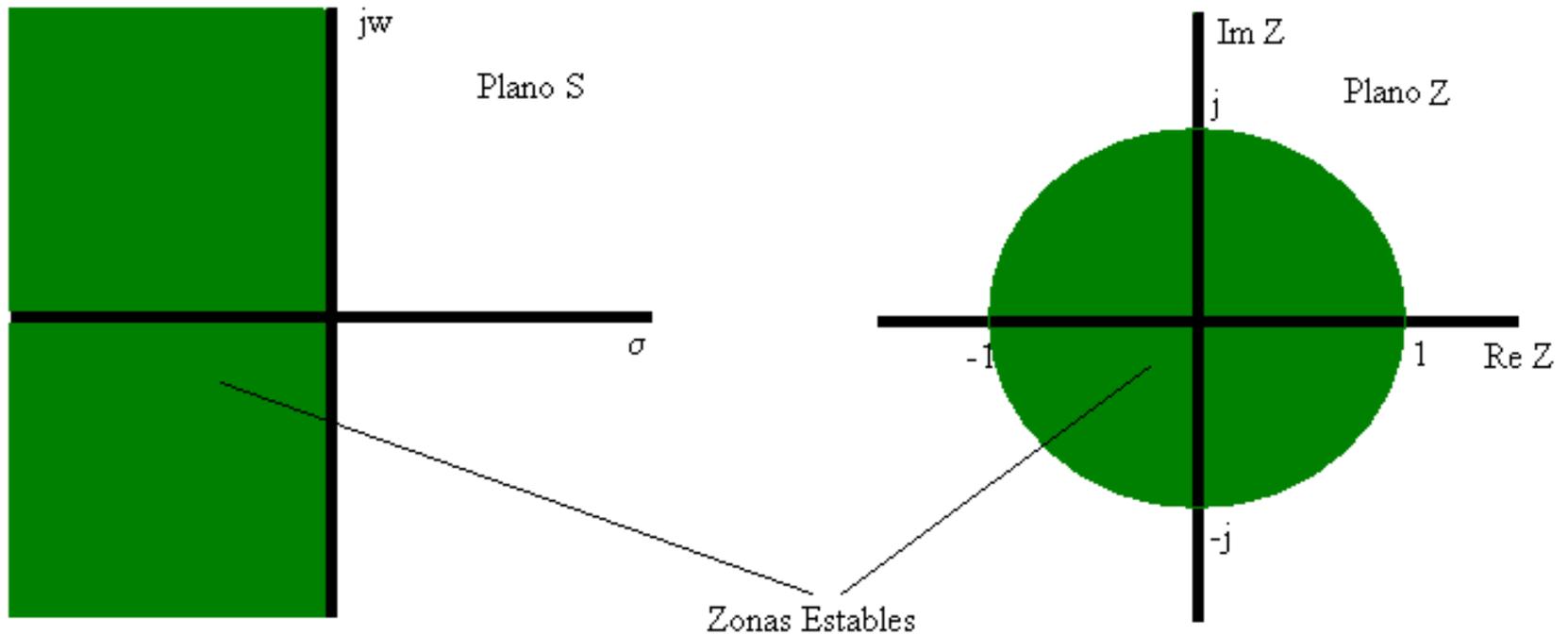
```
U=MIN; /*Limita*/
```

```
Else
```

```
O0=O1; /* Integra solo si no se limita la salida*/
```

# Mapeo entre Plano S y Plano Z

Transformación:  $z = e^{sT}$ , Plano  $s = \sigma + j\omega$



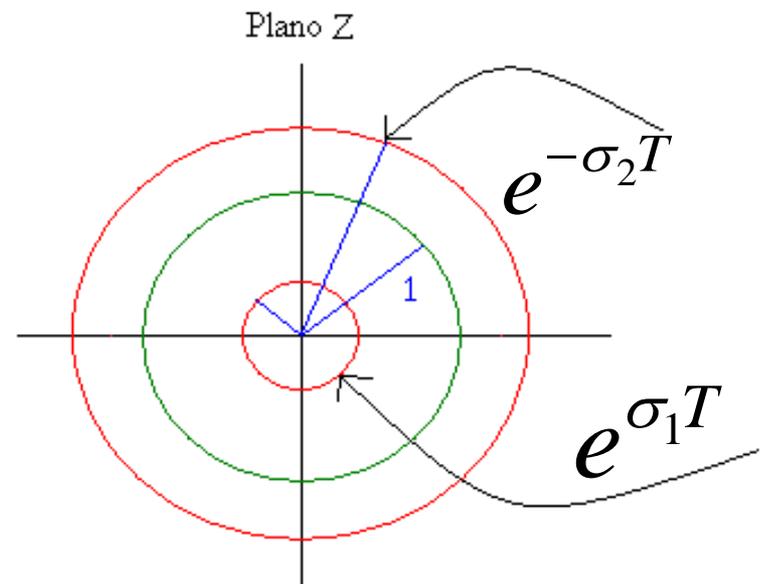
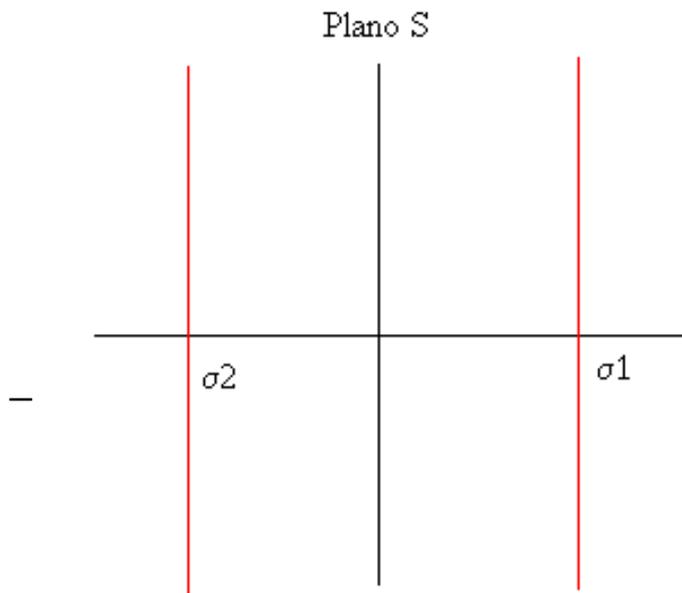
# Mapeo entre Plano S y Plano Z

Transformacion:  $z = e^{sT}$ , Plano  $s = \sigma + j\omega$

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1) $s = j\omega \leftrightarrow  z  = 1$ | $z = e^{j\omega T}$     |
| 2) $s = 0 \leftrightarrow z = 1$         | $z = e^{0T} = 1$        |
| 3) $s = -\infty \leftrightarrow z = 0$   | $z = e^{-\infty T} = 0$ |
| 4) $\sigma < 0 \leftrightarrow  z  < 1$  | Zona estable en verde   |

# Mapeo entre Plano S y Plano Z

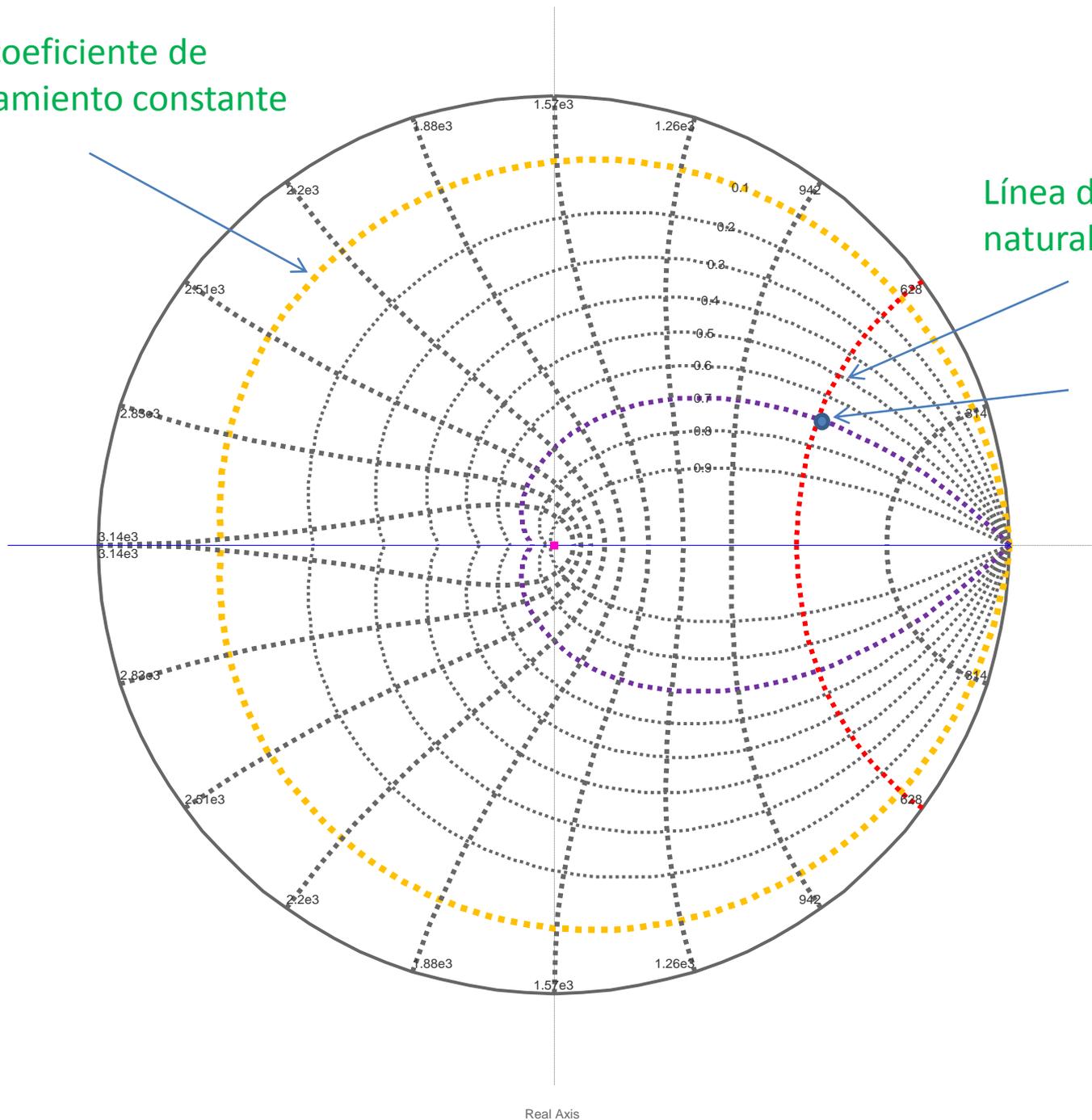
Ejemplos:



Línea de coeficiente de Amortiguamiento constante

Línea de frecuencia natural constante

Intersección con  $\zeta=0.707$



# Polos Discretos para Sistemas de Segundo Orden

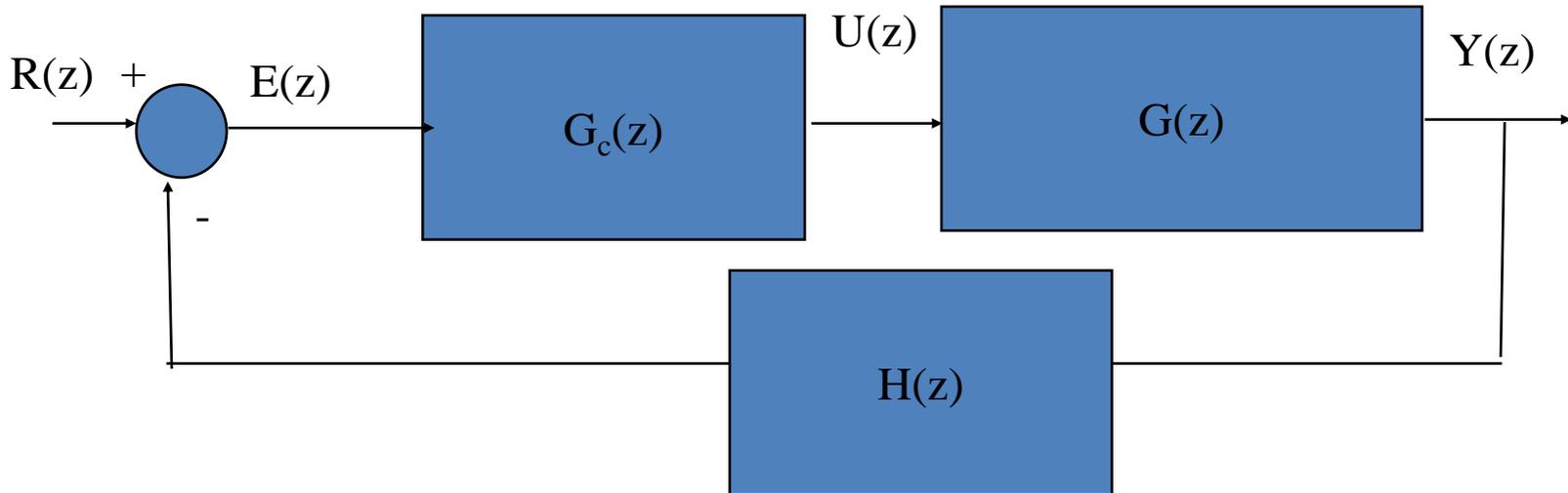
- Polos dominantes para sistema continuo

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

- Polos dominantes discretos

$$z_{1,2} = \exp \left[ T \left( -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right) \right]$$

# Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto



# Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

- Error en régimen permanente:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} e(KT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$$

- Para un sistema realimentado:

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G(z)G_c(z)H(z)}$$

# Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

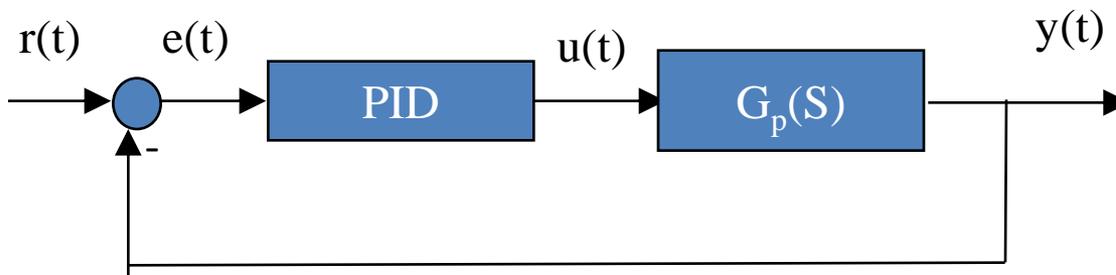
- Constante de error estático de posición ( $K_p^*$ )

$$R(z) = \frac{z}{z-1}; \quad \text{Escalón} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{(1-z^{-1})} \frac{1}{1+G(z)G_c(z)H(z)}$$

$$\text{Se define } K_p^* = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)G_c(z)H(z) \rightarrow e_{ss}^* = \frac{1}{1+K_p^*}$$

# Controlador Proporcional, Integral, Derivativo



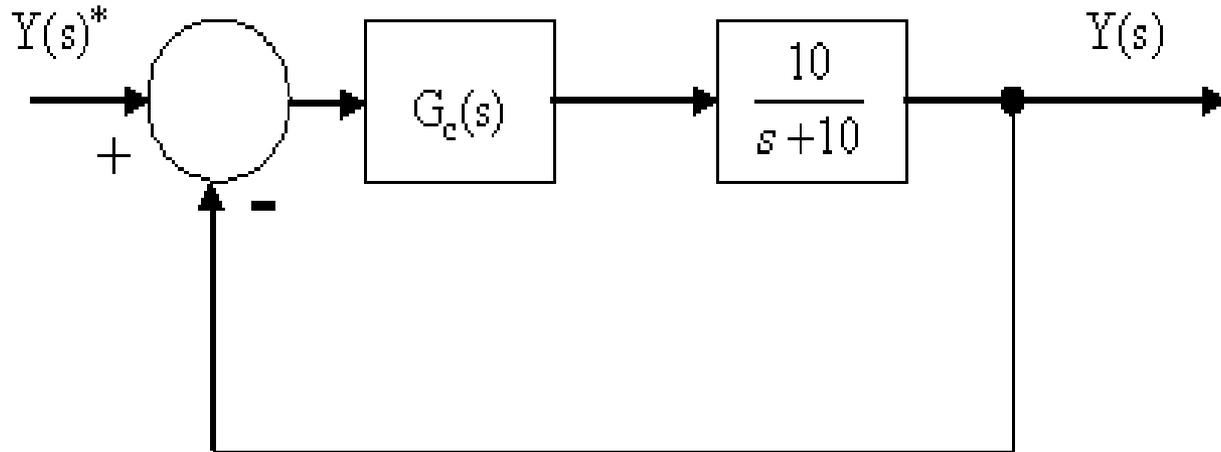
$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{U(S)}{E(S)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$$

# Diseño de Controladores Digitales Utilizando Métodos de Diseño Analógicos

- Un controlador digital puede ser diseñado utilizando Root Locus, Bode u otra metodología de diseño en el plano  $s$ .
- El controlador así obtenido se discretiza utilizando la transformada bilineal.
- Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la transformada bilineal es solo una aproximación.
- Además, al diseñar en el plano  $s$  un sistema de control digital, usualmente el retardo de transporte del retentor de orden cero es despreciado, lo que produce una disminución del margen de fase (con su correspondiente efecto desestabilizante) cuando el tiempo de muestreo es bajo.

- Se diseña un sistema de control para la planta  $10/(s+10)$ , con cero error en estado estacionario a entrada escalón, coeficiente de amortiguamiento de 0.8 y  $\omega_n=30\text{rads}^{-1}$ .



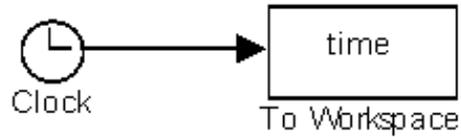
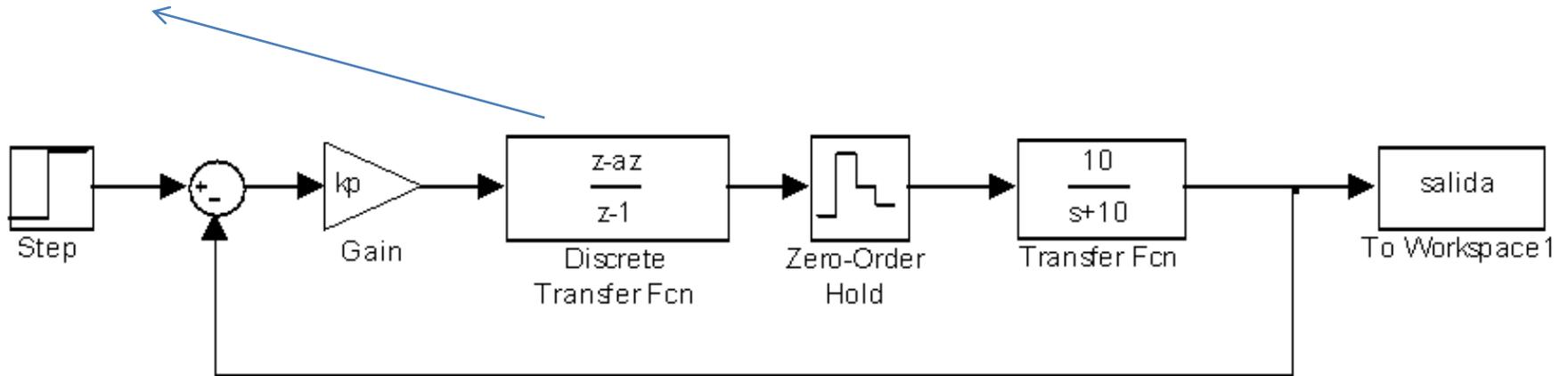
$$G_c(s) = 3.73 \frac{(s + 23.4)}{s}$$

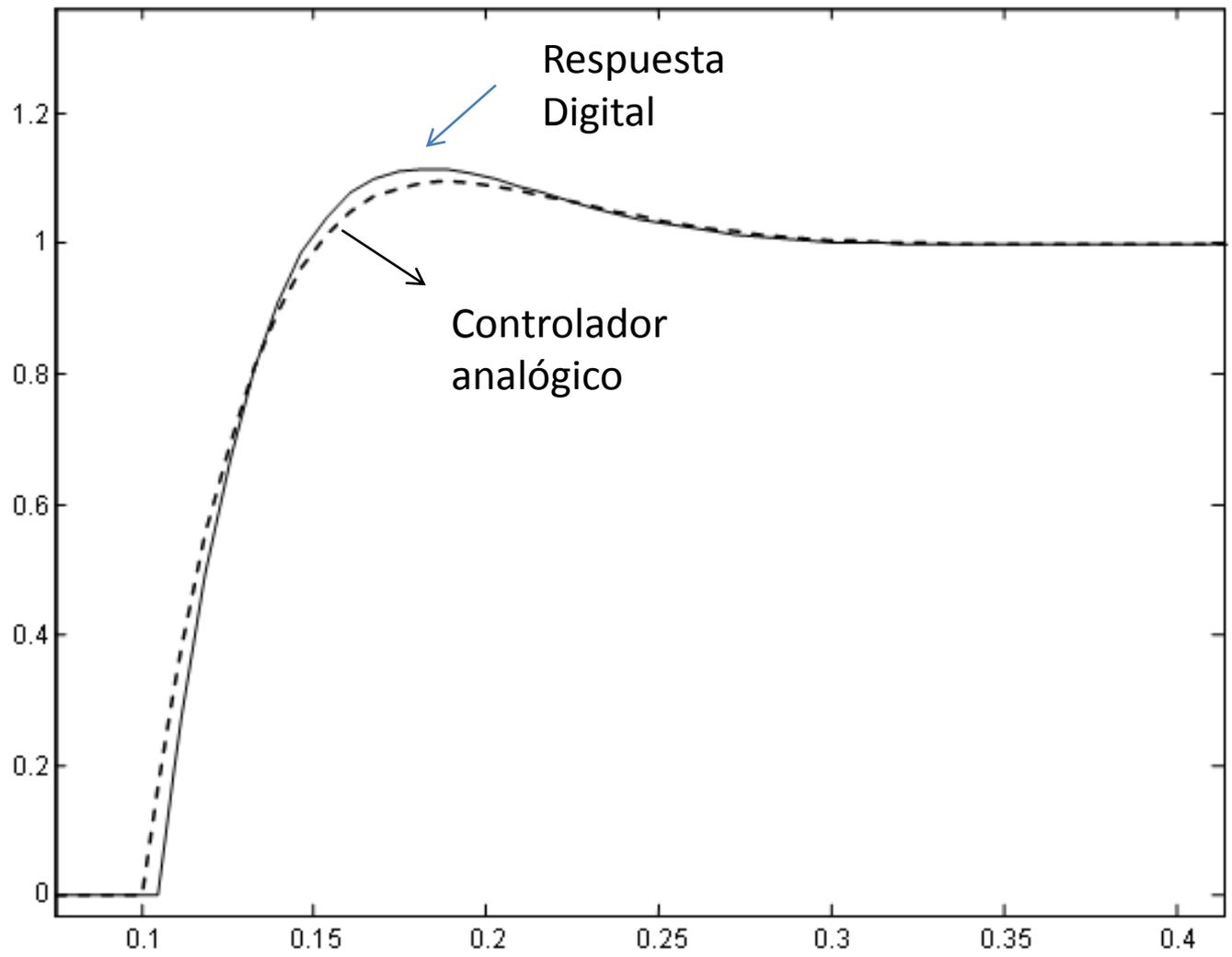
- Al discretizar el PI analógico con una frecuencia de muestreo  $\omega_s = 30\omega_n$  se tiene:

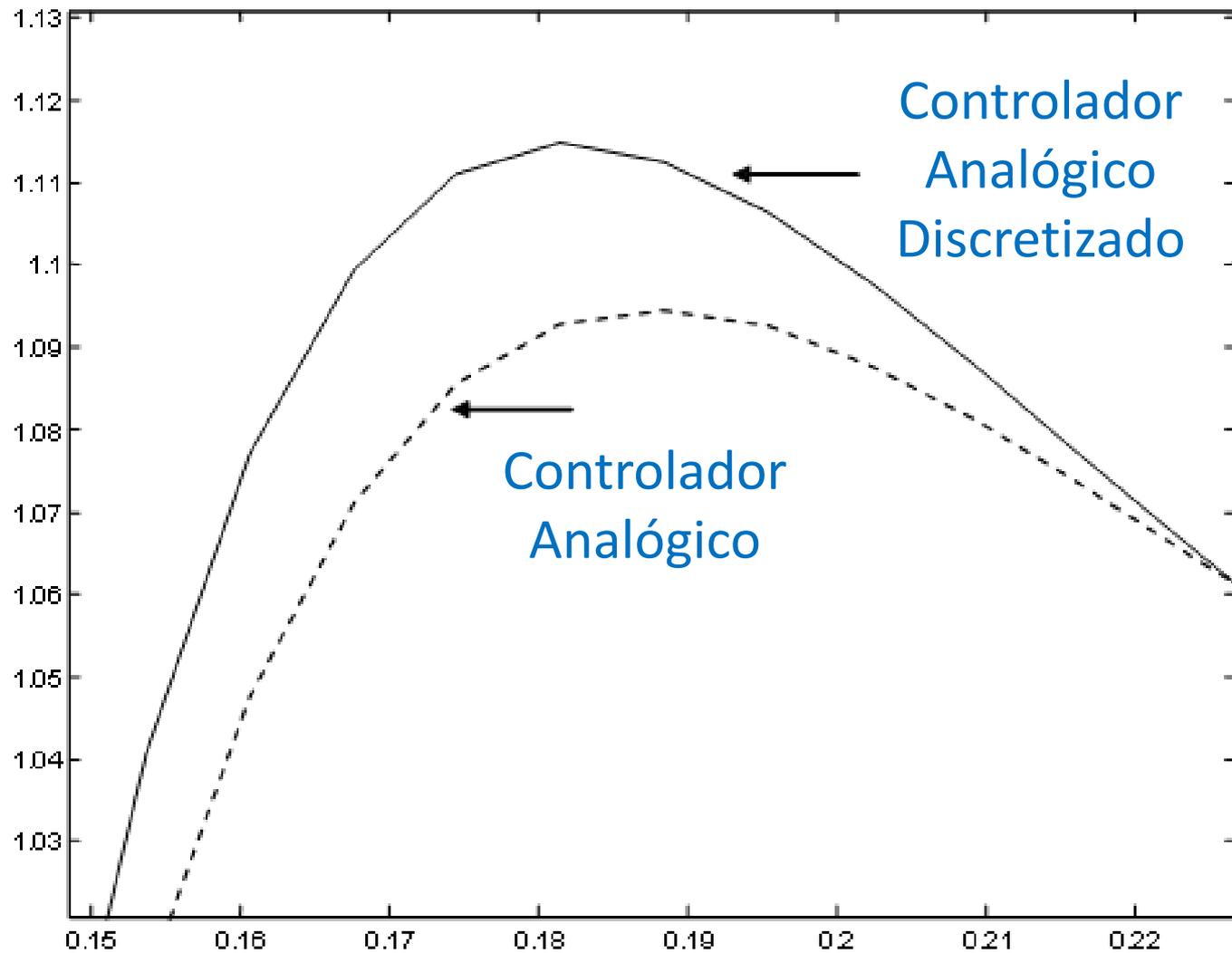
$$G_c(z) = 4.034 \frac{(z - 0.849)}{(z - 1)} \quad (8)$$

# Simulación del sistema

Controlador analógico  
discretizado

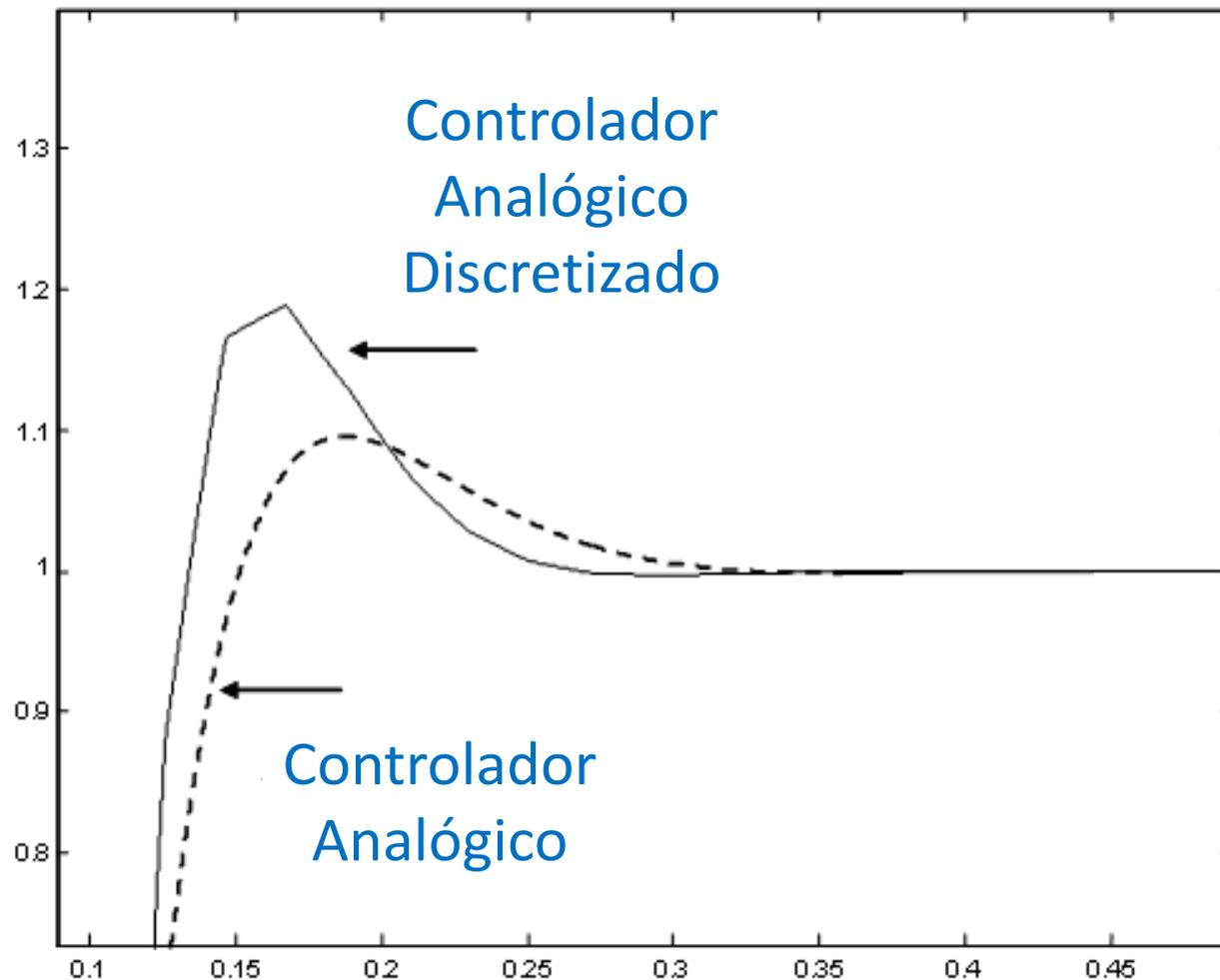






**Vista Amplificada  
de la figura anterior**

- El buen desempeño del controlador discretizado se debe a que la frecuencia de muestreo es muy alta comparada con la frecuencia natural. Sin embargo si la frecuencia de muestreo se reduce a  $300 \text{rads}^{-1}$  correspondiente a  $\omega_s = 10\omega_n$  (frecuencia de muestreo bastante superior a la de Shannon), el nuevo controlador, obtenido al discretizar el PI analógico pero esta vez con  $T_s = 2\pi/300$  es:



Controlador obtenido  
con  $\omega_s = 10\omega_n$

$$G_c(z) = 4.64 \frac{(z - 0.606)}{(z - 1)}$$

# Exactitud de los Diseños Realizados Utilizando Tustin.

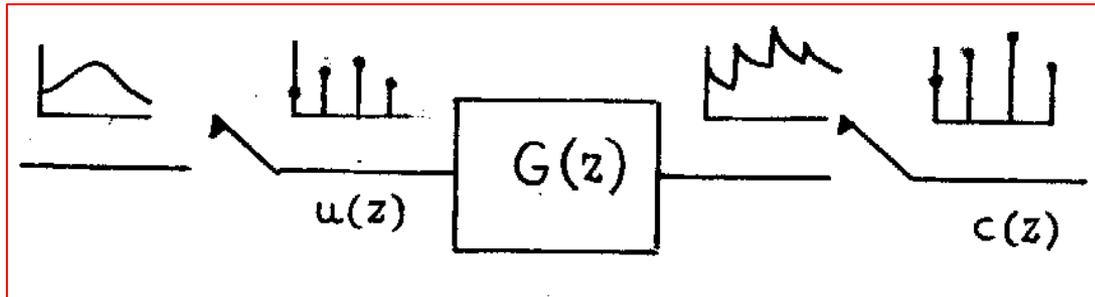
- En general los diseños realizados utilizando Tustin tienen un buen desempeño si es que es posible utilizar una alta frecuencia de muestreo.
- Sin embargo, si el hardware utilizado no puede operar con altas frecuencias de muestreo, el desempeño del controlador discretizado puede ser notoriamente distinto al obtenido con el controlador analógico original.
- En la Tabla I se muestra el desempeño de un control digital discretizado considerando distinta frecuencia de muestreo. En el diseño analógico el controlador fue diseñado para  $\omega_n=7.07\text{rads}^{-1}$ , con un coeficiente de amortiguamiento de  $\zeta=0.707$ .

- Controlador analógico discretizado utilizando distintas razones para  $\omega_n / \omega_s$

$\omega_s / \omega_n$ ( $\omega_n$ continuo)	Frecuencia natural equivalente al utilizar el diseño discretizado	Coefficiente de amortiguamiento en z
1.5	2.34	Inestable
3	4.71	0.11
5	5.9	0.3
10	6.75	0.511
15	6.95	0.58
20	7.2	0.6
<u>continuo</u>	7.07	0.707

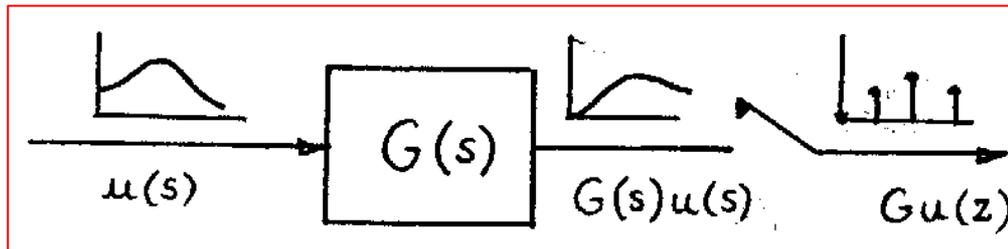
- En general la pérdida de amortiguamiento y frecuencia natural de un controlador discretizado, dependen del sistema de control y del diseño del controlador que se está discretizando (PI, PID, lead-lag, etc.).
- Sin embargo una regla ampliamente aceptada es asumir que no existe mayor pérdida de desempeño cuando el controlador se discretiza y se utiliza en un sistema de control digital con una relación  $\omega_s / \omega_n > 30$ .
- Esto es al menos 7 veces superior al límite establecido por la velocidad de Nyquist. (recuerde que en la presencia de ceros de lazo cerrado y/o polos de lazo cerrado mal amortiguado, el ancho de banda de un sistema puede ser hasta dos veces la frecuencia natural).

# Repaso Transformada Z



$$C(z) = G(z) * u(z)$$

Recuerde que esto es diferente a:

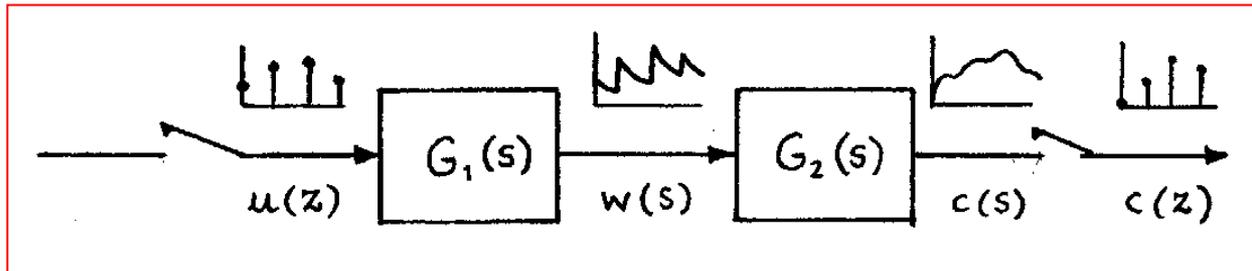


$$C(z) = Gu(z)$$

El término  $Gu(z)$  indica que primero se multiplican las funciones en Laplace y luego se obtiene la transformada z.

# Repaso Transformada Z

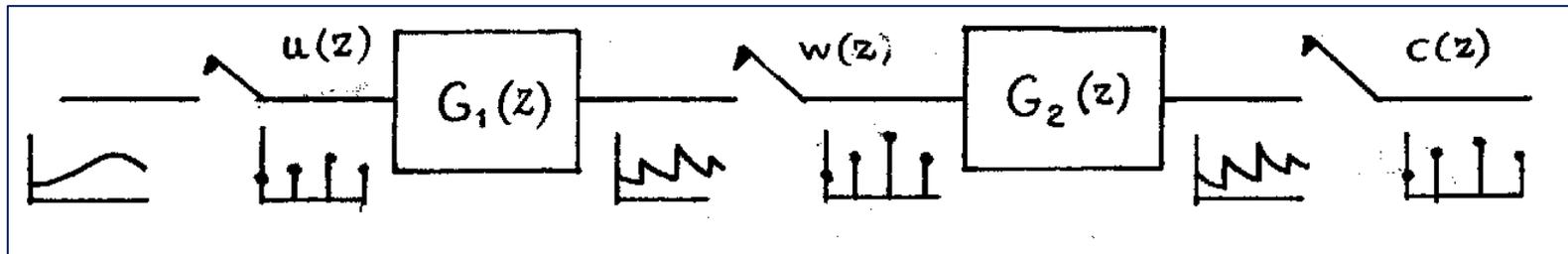
Lo mismo sucede con las funciones de transferencias donde no existe un muestreador en el medio



$$c(z) = u(z) * G_1 G_2(z)$$

# Repaso Transformada Z

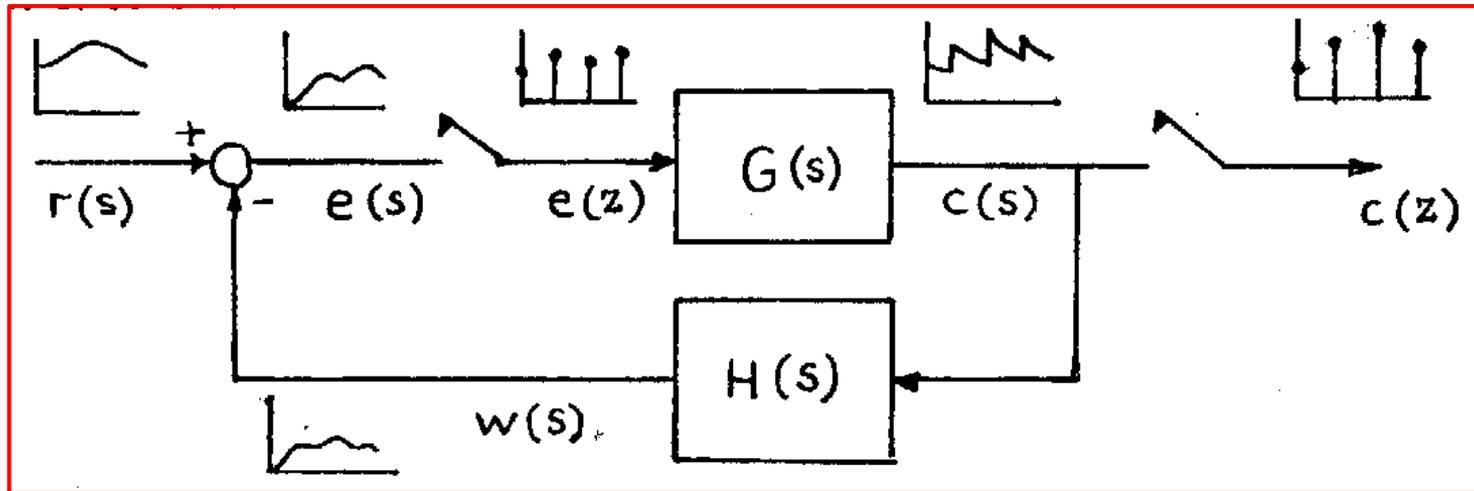
Si existe un muestreador la situación cambia



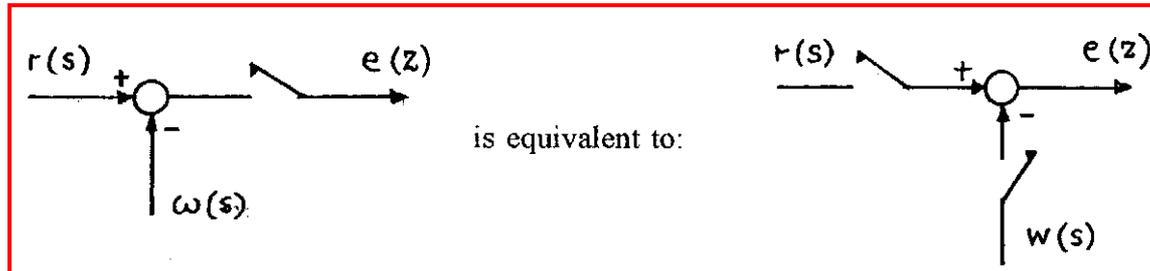
$$c(z) = u(z) * G_1(z) * G_2(z)$$

# Repaso Transformada Z

- Por ejemplo, encontrar la función de lazo cerrado de:



# Repaso Transformada Z

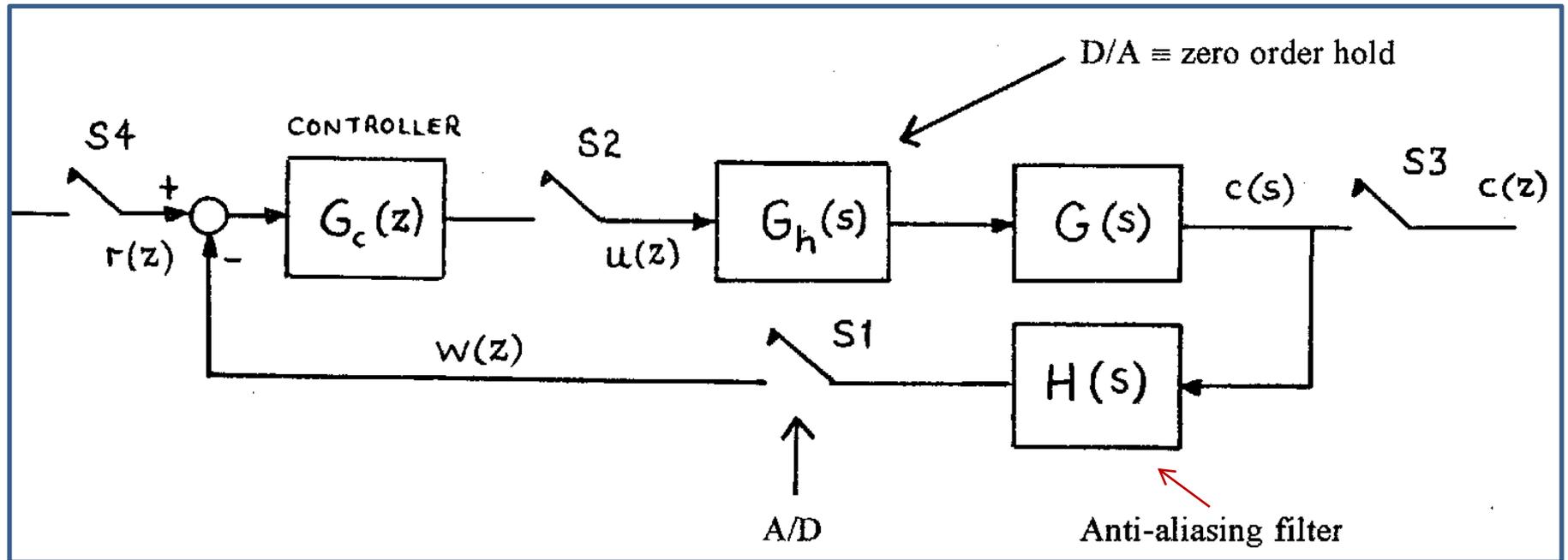


$$e(z) = r(z) - GH(z)$$

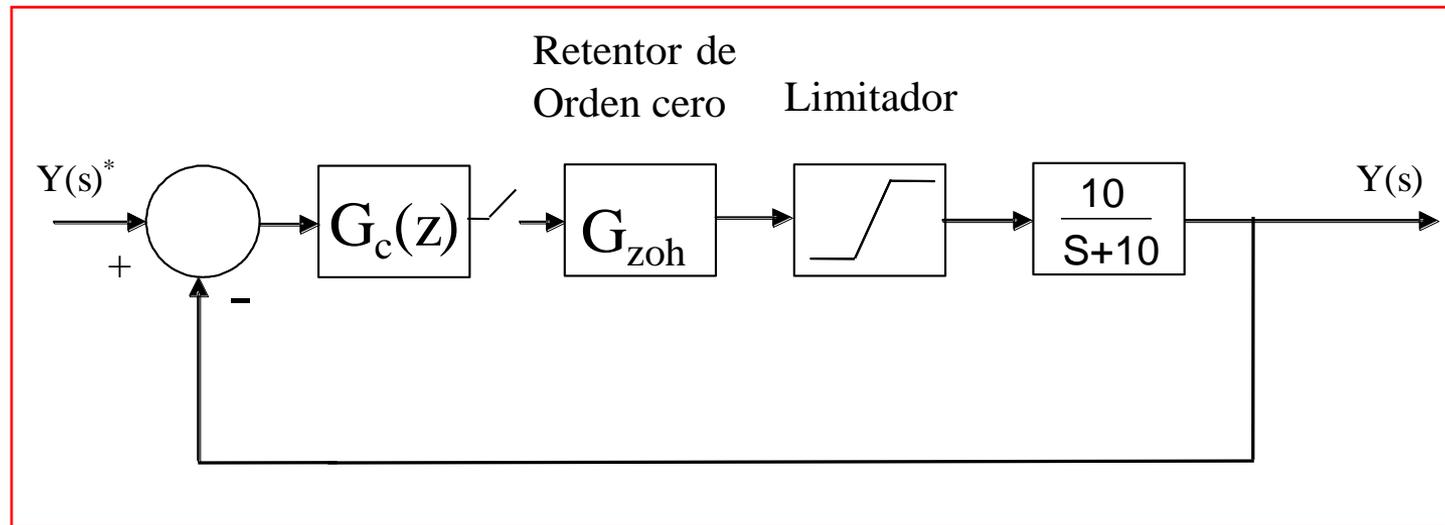
$$C(z) = e(z)G(z)$$

$$\frac{c(z)}{r(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

# Típico Lazo de Control



# Diseño en el plano Z para planta de primer orden



$$\omega_n = 40 \text{rads}^{-1}, \zeta = 0.8, \omega_s = 10\omega_n$$

# Transformada z del sistema

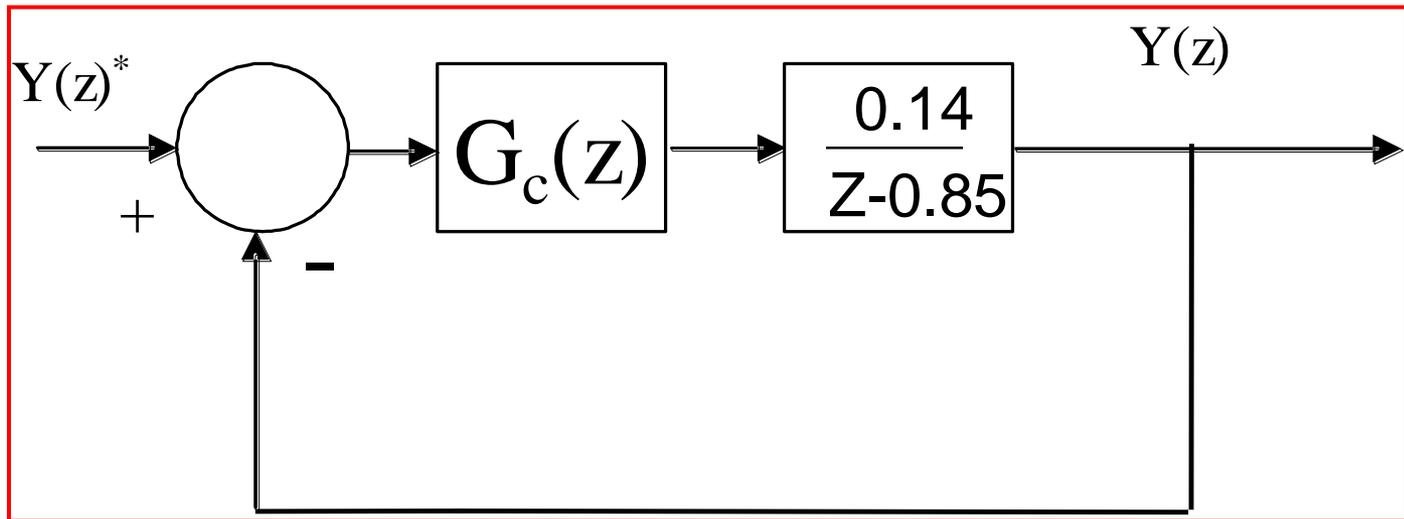
$$G_p(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left[ \frac{10}{s(s+10)} \right] = \frac{1 - e^{-10T}}{z - e^{-10T}} = \frac{0.14536}{z - 0.854635}$$

Una muy buena aproximación a la transformada z exacta puede lograrse utilizando la función de MATLAB:

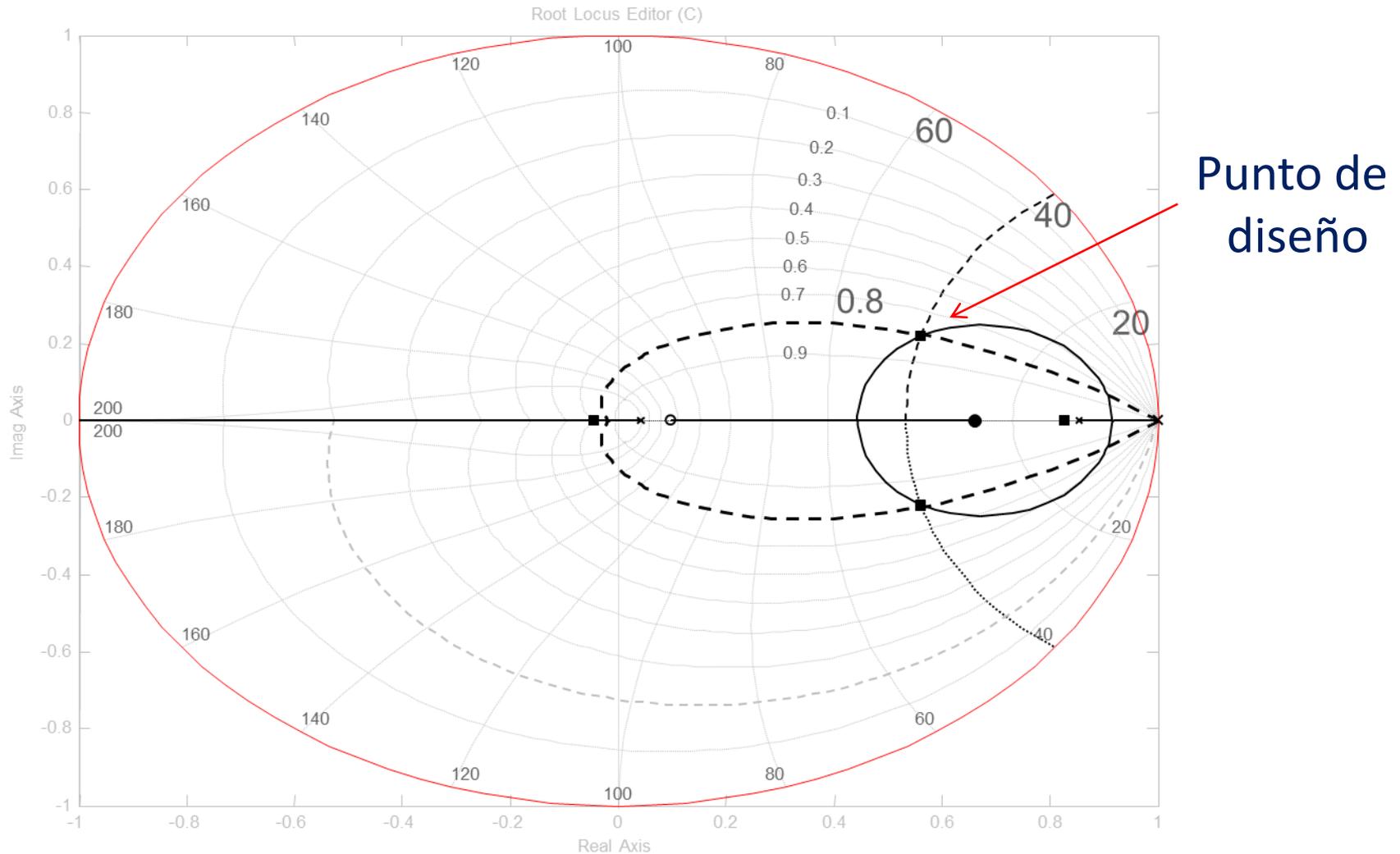
$$[numd, dend] = c2dm([10], [1 10], T_s, 'zoh')$$

Donde  $T_s$  es el tiempo de muestreo. El resultado obtenido es el numerador y denominador de la función en z

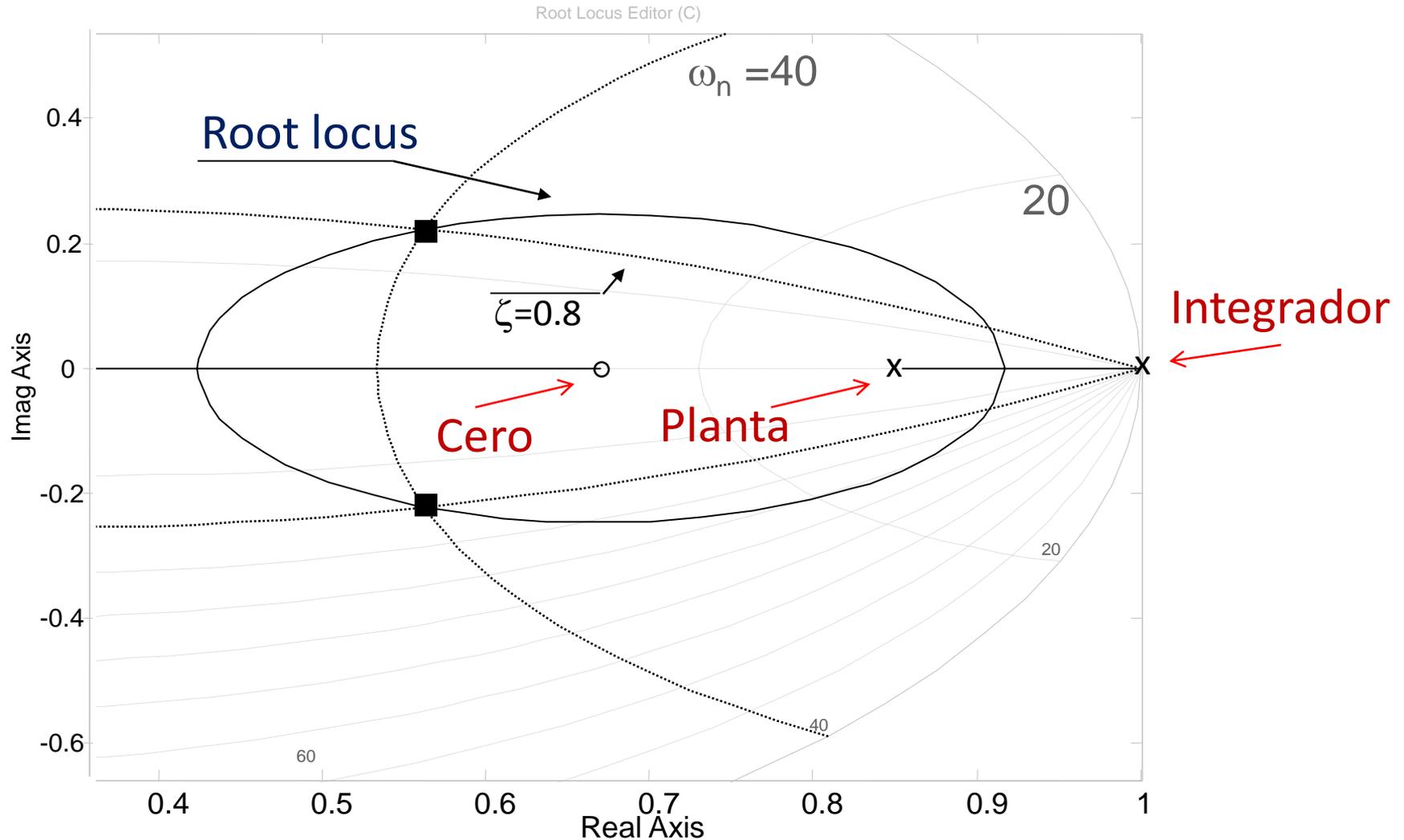
El diagrama de bloques en  $z$  es:



# Diseño utilizando lugar de la raíz digital



# Diseño utilizando lugar de la raíz digital



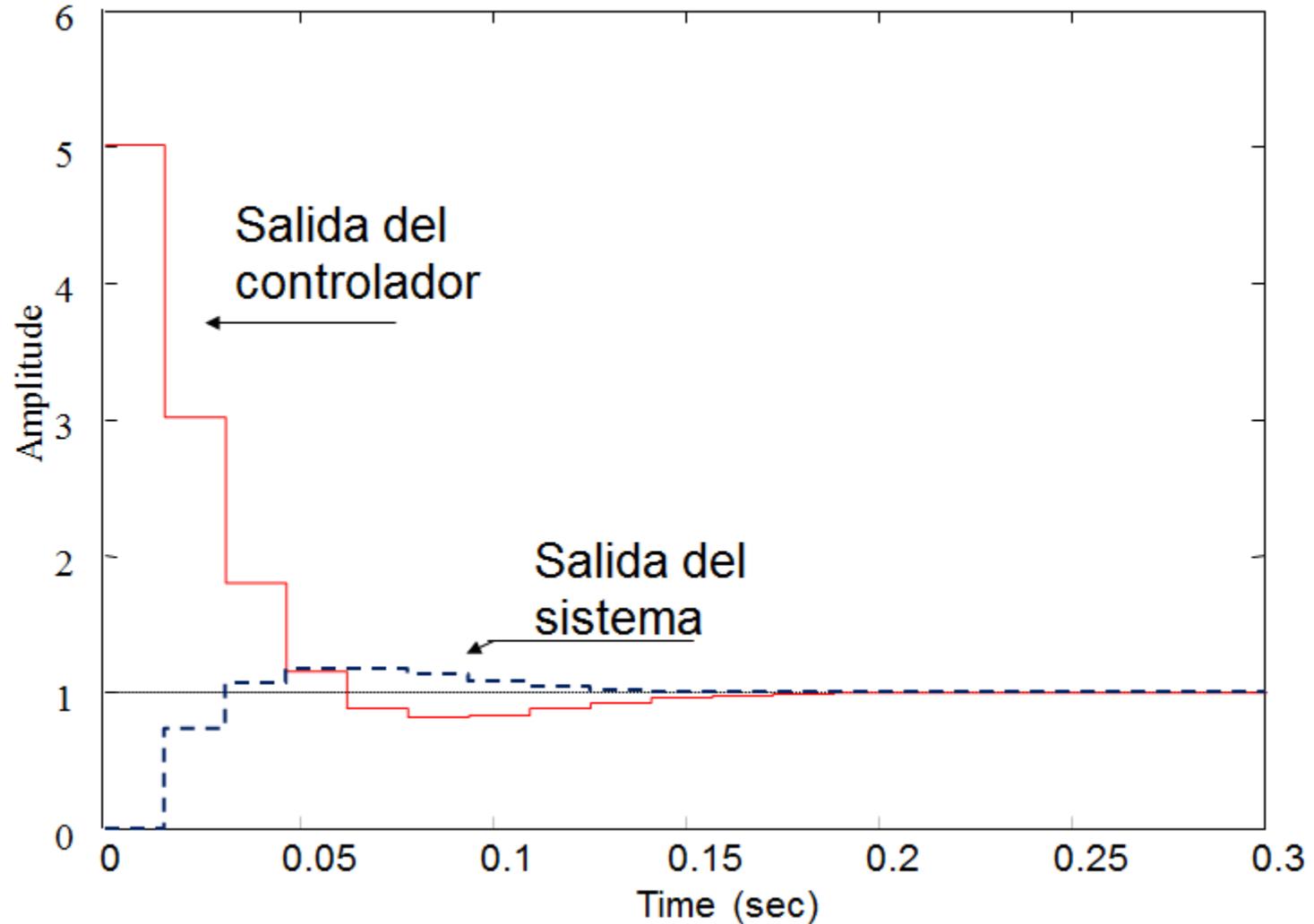
# Diseño utilizando lugar de la raíz digital

El controlador obtenido es:

$$G_c(z) = 5.01 \frac{(z - 0.67)}{(z - 1)}$$

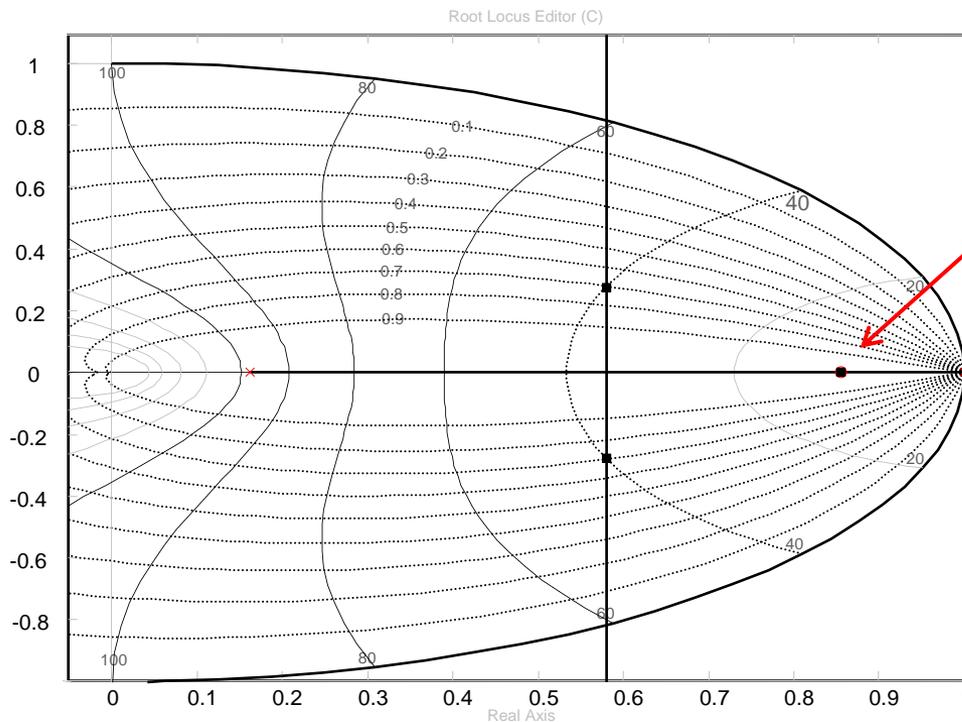
- Recuerde. Las reglas del lugar de la raíz son idénticas en el plano  $z$  que las existentes en el plano  $s$ . El punto de diseño no está ubicado en el mismo lugar.

# Respuesta en el tiempo



# Diseño considerando cancelación

$$G_c(z) = 1.74 \frac{(z - 0.8546)}{(z - 1)(z - 0.161)}$$



Polo de la planta cancelado  
Con cero del controlador

Lo mismo que se efectuaba en  
El plano z (las reglas son idénticas)

# Diseño considerando filtro antialiasing

- Se inserta en el sistema de control, lazo de realimentación un filtro antialiasing con una frecuencia de corte igual a  $f_s/2$ .
- Es decir  $\omega_c = \omega_s/2 = 5\omega_n$

# Diseño considerando filtro antialiasing

$$G_p(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left[ \frac{10}{s(s+10)} \frac{200}{s+200} \right] = 0.102 \frac{(z+0.3548)}{(z-0.85464)(z-0.04321)}$$

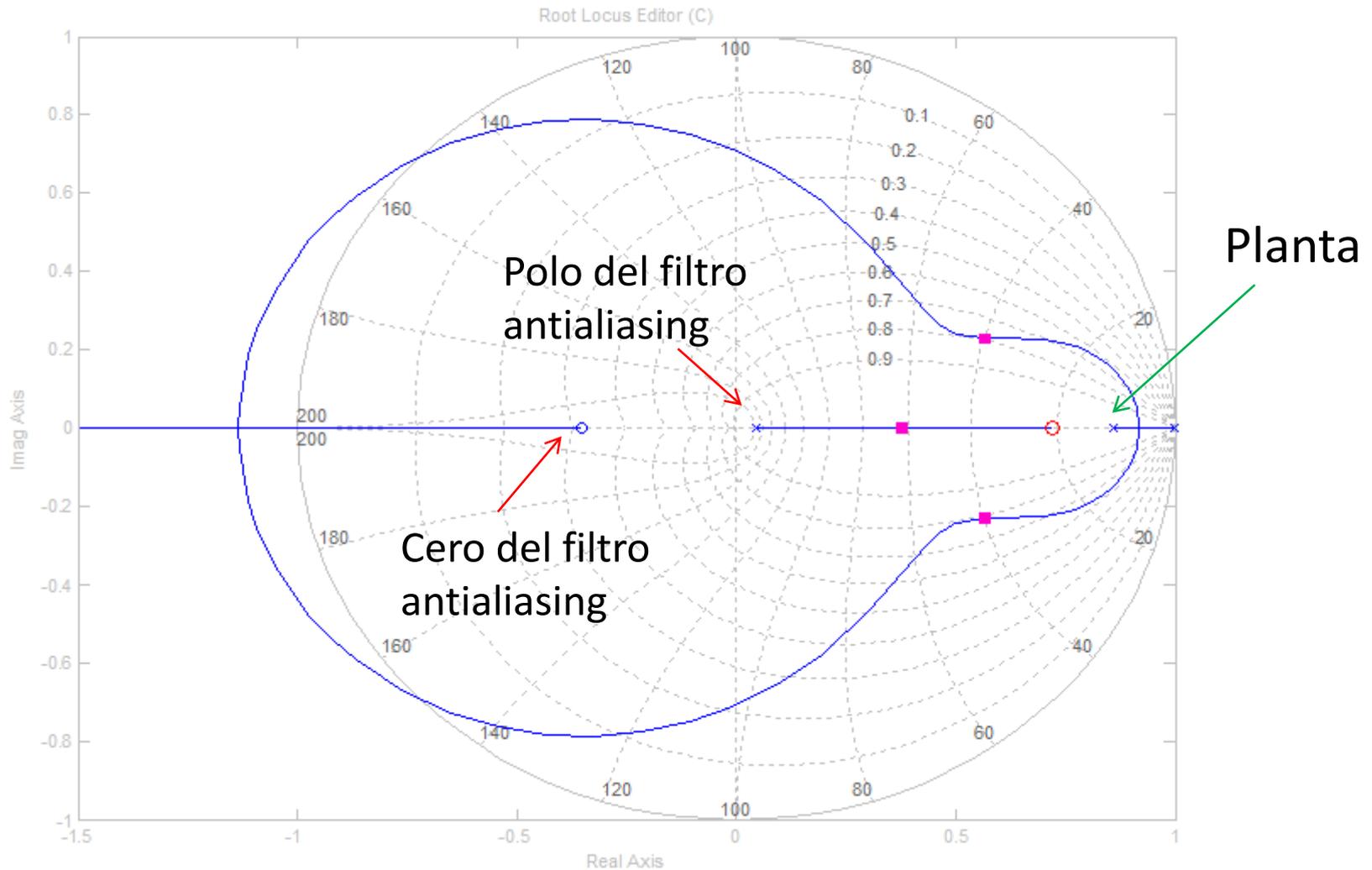
Parte del retentor  
de orden cero

Polo de la  
planta

Filtro  
antialiasing

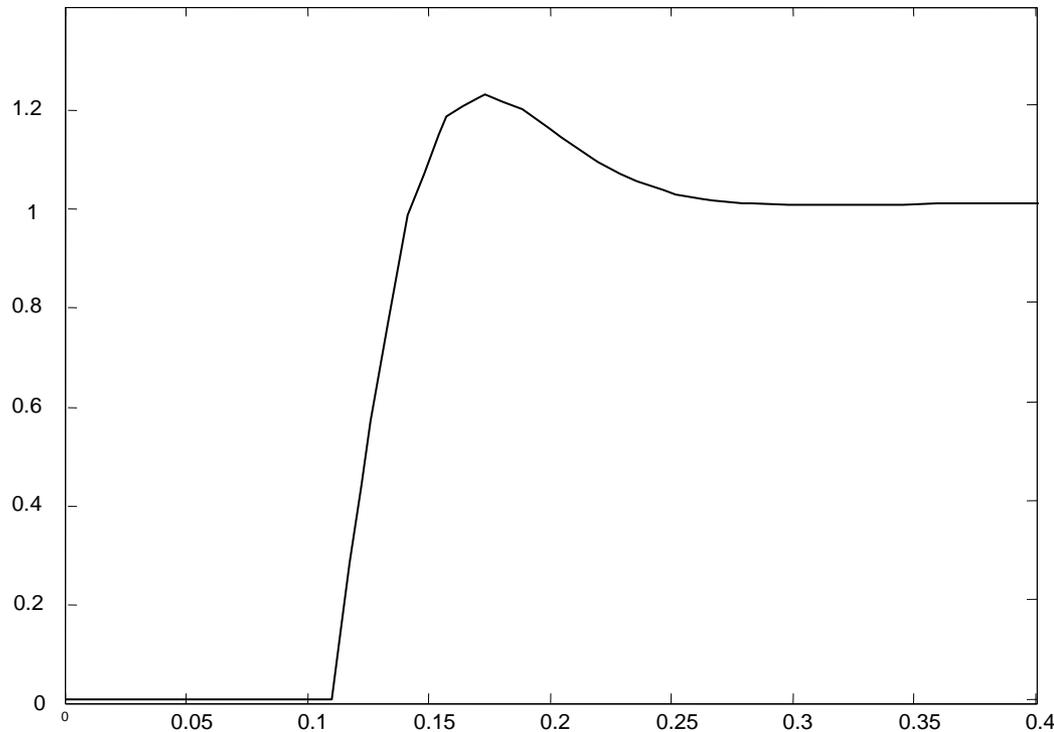
Transformada z del  
conjunto

# Lugar de la Raíz



# Controlador Obtenido

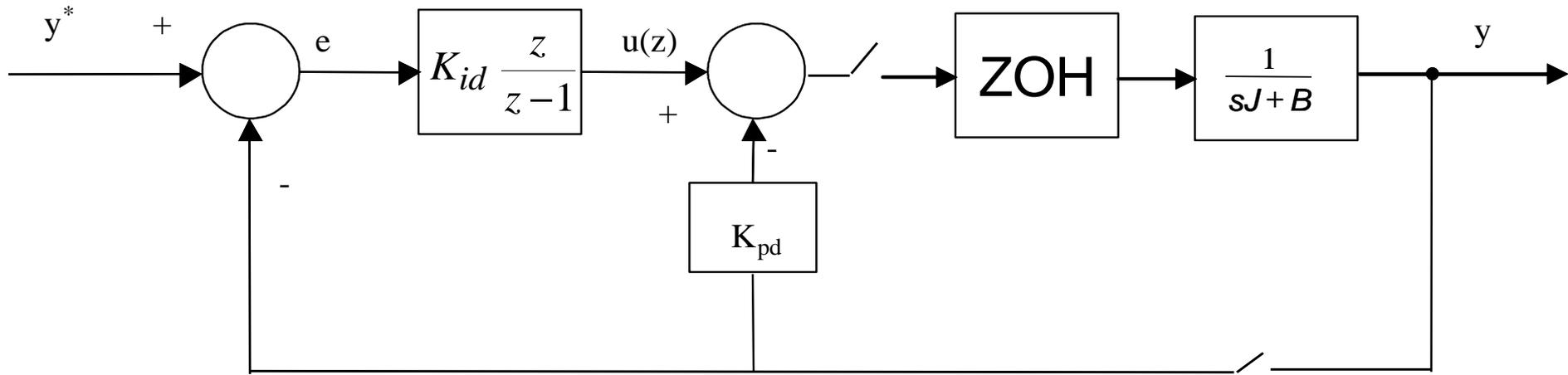
$$G_c(z) = 3.86 \frac{(z - 0.718)}{(z - 1)}$$



Respuesta del  
Sistema de control



# IP Digital



# IP Digital

- El controlador IP se puede diseñar en forma analógica y discretizar o se puede diseñar directamente en el plano  $z$ .
- Como ya se ha discutido anteriormente, el desempeño de los controladores discretizados utilizando bilineal, es bueno cuando la razón entre la frecuencia de muestreo y la frecuencia natural es alta, en lo posible 25-30 veces.
- Al diseñar el controlador IP, directamente en el plano  $z$ , generalmente se utilizan métodos algebraicos.

# IP Digital Utilizando Tustin

$$\frac{K_i}{s} \Rightarrow K_i \frac{T(z+1)}{2(z-1)}$$

Si la frecuencia de muestreo es suficientemente alta, se tiene:

$$e(z)(z+1) \approx 2ze(z)$$

Finalmente:

$$\frac{K_i}{s} \Rightarrow K_i \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \Rightarrow K_i T \frac{z}{z-1}$$

$$K_{id} = K_i T \quad y \quad K_{pd} = K_p$$

**Muy Fácil**