

Lugar Geométrico de las Raíces o Método de Evans

Lugar de la Raíz

- El lugar de la raíz (root locus) es un método gráfico de encontrar la posición de los polos de lazo cerrado de la función de transferencia:

$$\frac{y}{y^*} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Lugar de la Raíz

- Escriba aquí la ecuación. La ecuación característica se puede escribir:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + k \frac{\pi(s + z_i)}{\pi(s + p_j)} = 0$$

$$\pi(s + p_j) + k\pi(s + z_i) = 0$$

- K es la ganancia total del sistema a lazo cerrado. Es decir la multiplicadora de todas las ganancias incluyendo la del controlador

- Para un conjunto dado de polos y ceros de lazo abierto, p_j y z_i , la posición de los polos de lazo cerrado depende del valor de la ganancia K .
- Por simple inspección de se puede concluir que cuando la ganancia es cero o tiene un valor muy pequeño la posición de los polos de lazo cerrado es la misma que los polos de lazo abierto.
- Cuando la ganancia $K \rightarrow \infty$ los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto.
- **No se debe confundir los polos de lazo abierto con los de lazo cerrado.** Los polos de lazo abierto son los que se encuentran en la función de lazo abierto $G(s)H(s)$. Los polos de lazo cerrado son las soluciones de la ecuación característica.

Lugar de la Raíz

- Utilizando la ecuación característica se puede demostrar que existe un polo de lazo cerrado cuando se cumple la condición de módulo y la condición de ángulo.
- Estas condiciones se expresan en las siguientes ecuaciones:

$$|G(s)H(s)| = 1$$

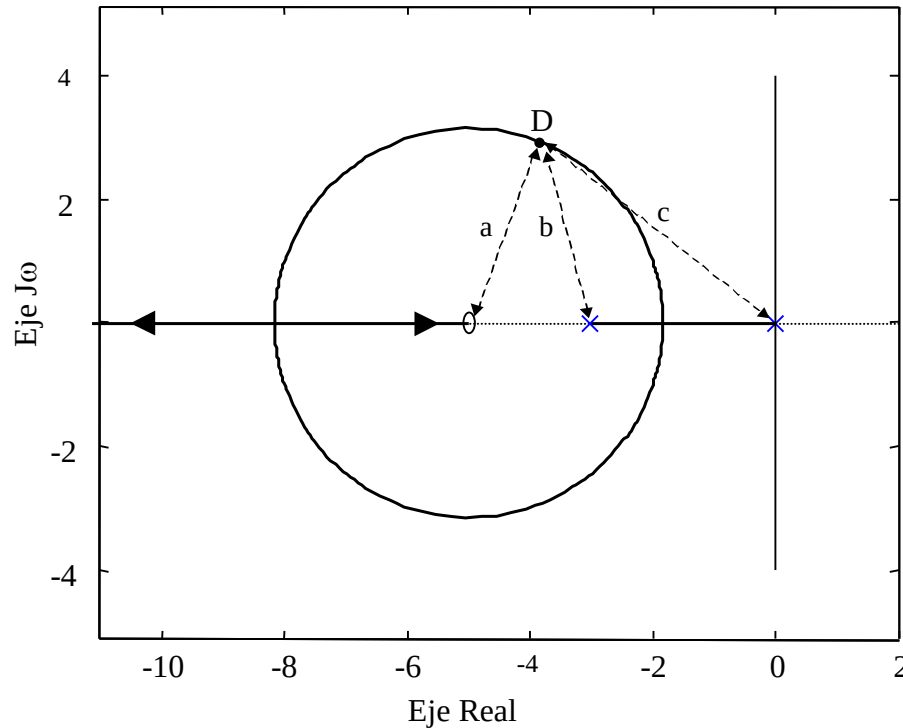
$$\text{Ángulo}[G(s)H(s)] = 180 \pm n360$$

Lugar de la Raíz

- Donde k es un entero. La condición de ángulo es la más importante ya que la condición de módulo es simple de obtener variando la ganancia del controlador u otros elementos. Para un punto $s = \sigma \pm j\omega$ en particular, la ganancia necesaria se puede calcular remplazando s por $\sigma \pm j\omega$ en $G(s)H(s)$ y calculando el módulo. El valor necesario de K es el inverso del módulo de $G(s)H(s)$.

$$|G(s)H(s)| = K \left| \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \right|_{s=\sigma \pm j\omega} = 1$$

Lugar de la Raíz



En la figura se muestra el lugar de la raíz correspondiente a la función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+3)}$$

Lugar de la Raíz

- Para ubicar el lugar de la raíz en el punto mostrado en la figura, la ganancia K a utilizar debe ser calculada utilizando

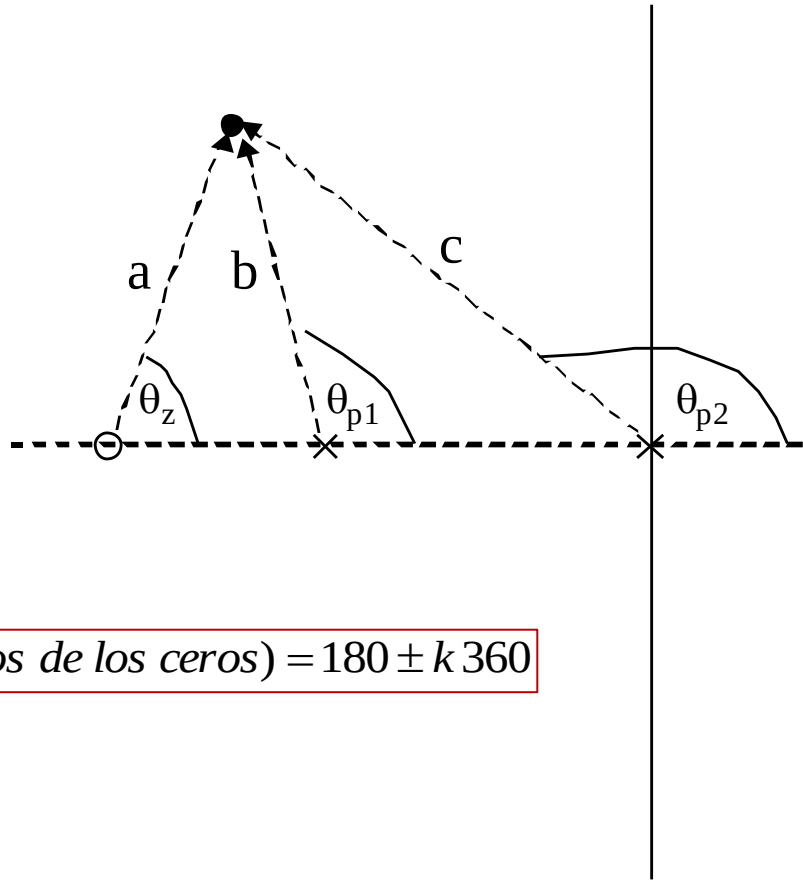
$$|G(s)H(s)| = K \left| \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \right|_{s=\sigma \pm j\omega} = 1$$

- Sin embargo puede demostrarse que esto es equivalente a utilizar:

$$K = \frac{\Pi(\text{distancia del punto a los polos})}{\Pi(\text{distancia del punto a los ceros})}$$

Lugar de la Raíz

- Al igual que la condición de módulo, el ángulo de la función de transferencia $G(s)H(s)$ puede calcularse gráficamente. Esto se muestra en la figura:

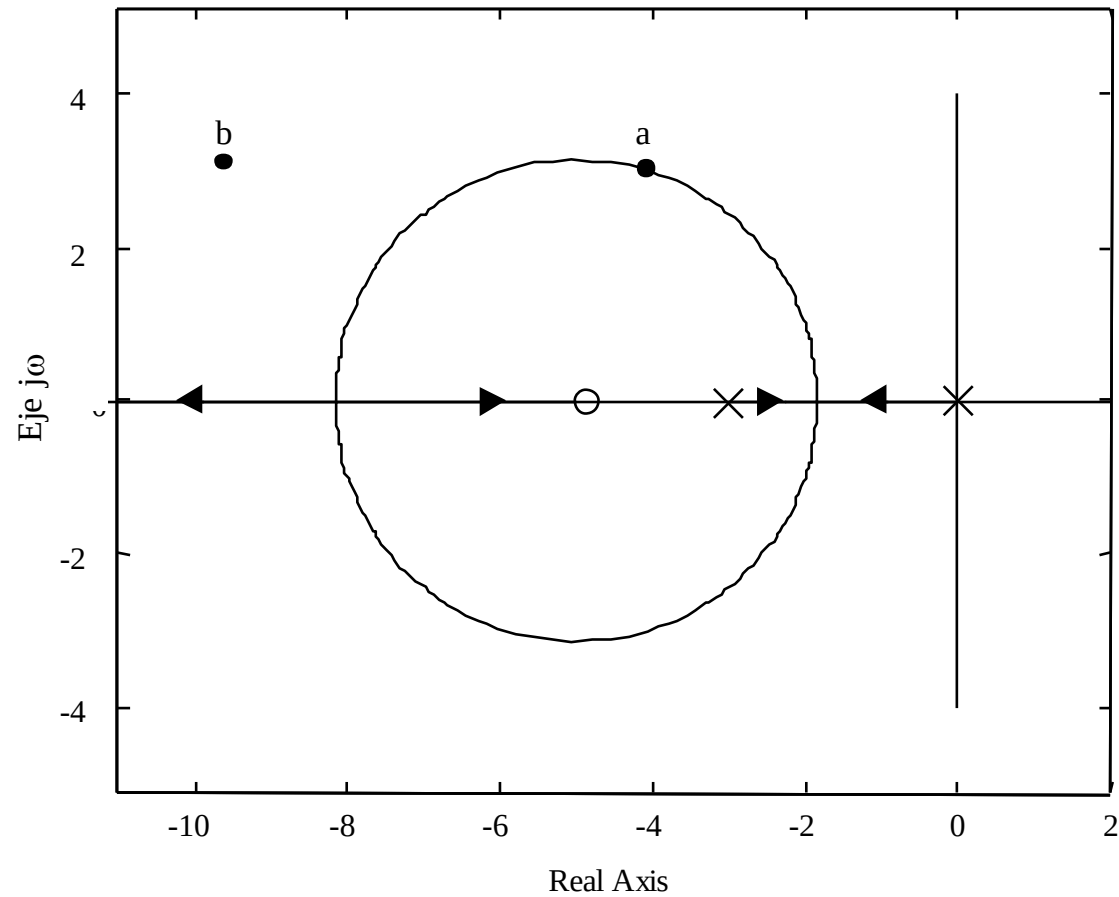


$$\Sigma (\text{Ángulos de los polos}) - \Sigma (\text{Ángulos de los ceros}) = 180 \pm k 360$$

Lugar de la Raíz

- La condición de ángulo es la mas importante debido a que entrega el conjunto de puntos en que pueden ubicarse los polos de lazo cerrado si se ajusta correctamente la ganancia del sistema (o controlador).
- Si es que punto cualquiera no cumple con la condición de ángulo entonces un polo de lazo cerrado no puede ubicarse en esa posición aunque se varíe la ganancia K entre cero e infinito. Esto se muestra en la siguiente figura:

Lugar de la Raíz



- El punto 'a' en la figura se encuentra ubicado en el lugar de la raíz (o sea cumple con la condición de ángulo). Para que un polo de lazo cerrado se encuentre en esa posición, basta con utilizar el valor correcto de ganancia. Sin embargo el punto 'b' no cumple con la condición de ángulo.
- Si se necesita un polo de lazo cerrado en esa posición es necesario cambiar la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$.
- Esto se hace utilizando un compensador o controlador en cascada con $G(s)$ o $H(s)$ (Estrictamente se puede ubicar un compensador en cualquier punto del lazo de control incluso en paralelo con $G(s)$ o $H(s)$).

Ceros de lazo cerrado

- Si se define $G(s)H(s)$ como:

$$G(s) = K_G \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})} \quad H(s) = K_H \frac{\Pi(s + z_{Hk})}{\Pi(s + p_{Hl})}$$

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_G \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})}}{1 + K_G K_H \frac{\Pi(s + z_{Gi})}{\Pi(s + p_{Gj})} \frac{\Pi(s + z_{Hk})}{\Pi(s + p_{Hl})}}$$

- Finalmente

$$\frac{y}{y^*} = \frac{K_G \Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + p_{Hl})}{\Pi(s + p_{Gj}) \Pi(s + p_{Hl}) + K_G K_H \Pi(s + z_{Gi}) \Pi(s + z_{Hk})}$$

Ceros

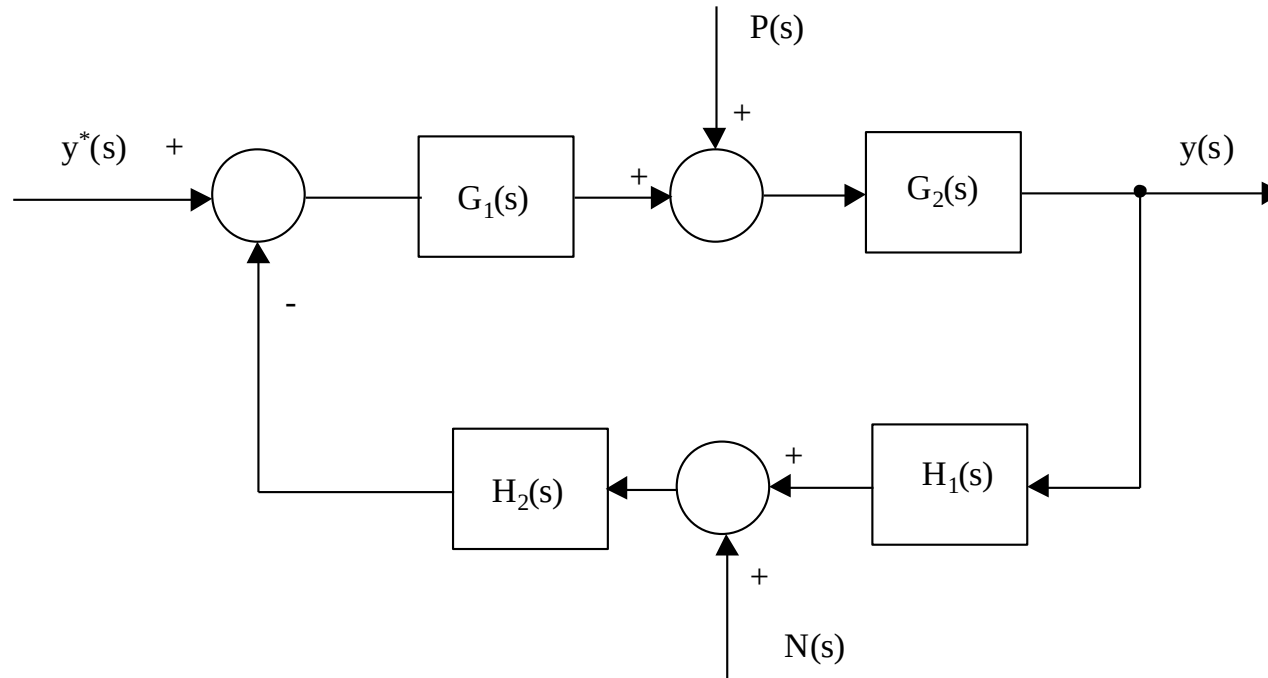
Ceros de lazo cerrado

- En un sistema SISO convencional, los ceros de lazo cerrado se pueden encontrar por simple inspección de las funciones de transferencia $G(s)$ y $H(s)$. Si el sistema de control tiene realimentación unitaria, entonces los ceros de lazo cerrado son los ceros de lazo abierto. Si el sistema tiene realimentación no unitaria entonces los ceros de lazo cerrado son los ceros de $G(s)$ y los polos de $H(s)$.

Ceros de lazo cerrado

- La posición de los ceros es importante aunque no afecten a la estabilidad. Como se mostró anteriormente, los ceros afectan notablemente el sobrepaso y también al tiempo de establecimiento.
- Por ejemplo, un cero de lazo cerrado en el semiplano derecho, aunque no necesariamente produce inestabilidad, puede producir efectos no deseados en la respuesta.
- Así como no se deben confundir los polos de lazo cerrado con los polos de lazo abierto, **no confunda los ceros de lazo cerrado con los ceros de lazo abierto** ya que no siempre son iguales.

Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos.



- El sistema de control que se muestra en la figura, esta sujeto a la perturbación $P(s)$ y ruido $N(s)$. La función directa es $G(s)=G_1(s)G_2(s)$ y la función de realimentación es $H(s)=H_1(s)H_2(s)$. Utilizando álgebra de bloques y aplicando superposición puede demostrarse que:

Sistema de control considerando perturbaciones y ruidos.

$$y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} y^*(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} P(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)H_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} N(s)$$

- La conclusión principal es que los polos a lazo cerrado son los mismos para todas las entradas que se encuentran en el sistema.
- Esto es un resultado interesante ya que si se asegura que los polos dominantes de $y^*(s)/y(s)$ están ubicados con la frecuencia natural correcta y un coeficiente de amortiguamiento apropiado, entonces el sistema es estable con respecto a todas las otras posibles entradas del sistema como ruidos y perturbaciones.
- Sin embargo debe tenerse presente que los ceros, que afectan a las otras entradas, son distintos.

Libros para estudiar root locus (literalmente cientos)

- Estos son los utilizados por mí en el siglo pasado.
- Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, “Modern Control System”, ninth edition.
- John J. D’Azzo and Constantine H. Houpis, “Linear Control System Analysis and Design, Conventional and Modern”, 3rd Edition.

Las reglas más importantes del lugar de la raíz

- No es necesario memorizar todas las reglas ya que un computador con el software adecuado realiza el lugar de la raíz.
- Sin embargo es necesario **entender** las reglas. El computador solo dibuja el lugar de la raíz pero el diseño lo hace usted.

1) El lugar de la raíz encuentra las soluciones de la ecuación característica $1+G(s)H(s)$.

2) Si se escribe $G(s)H(s)$ de la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^l (s + p_j)} \quad (21)$$

Entonces los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los polos de lazo abierto cuando la ganancia K es cero o muy pequeña. Cuando la ganancia K tiende a infinito, los polos de lazo cerrado están en la misma posición que los ceros de lazo abierto.

- 3) Para sistemas de ganancia positiva, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de polos y ceros a la derecha es impar. Esto es necesario para cumplir con la condición de ángulo en (9) que se muestra gráficamente en Fig. 3. Para sistemas con ganancia K negativa, existe lugar de la raíz en el eje real cuando el número de total de polos y ceros a la derecha es par. Recuerde esto porque al utilizar la aproximación de Padé para los retardos, se utilizarán sistemas con ganancia negativa.
- 4) El número de lugares de la raíz es igual al número de polos de lazo abierto. En otras palabras el número de polos de lazo cerrado es igual al número de polos de lazo abierto.

- 5) El lugar de la raíz es simétrico con respecto al eje real. Esto se debe a que la respuesta en el tiempo no puede contener términos imaginarios. Por lo tanto todas las raíces complejas deben existir en pares y una de ellas debe ser el complejo conjugado de la otra.
- 6) Si en un sistema existen N_p polos y N_z ceros, entonces $(N_p - N_z)$ lugares de las raíces van hacia el infinito a través de asíntotas. Estas asíntotas están centradas en:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{Polos } G(s)H(s) - \sum \text{Ceros } G(s)H(s)}{N_p - N_z} = \frac{\sum(-p_j) - \sum(-z_i)}{N_p - N_z} \quad (22)$$

7) El ángulo de las asíntotas con respecto al eje real puede calcularse como:

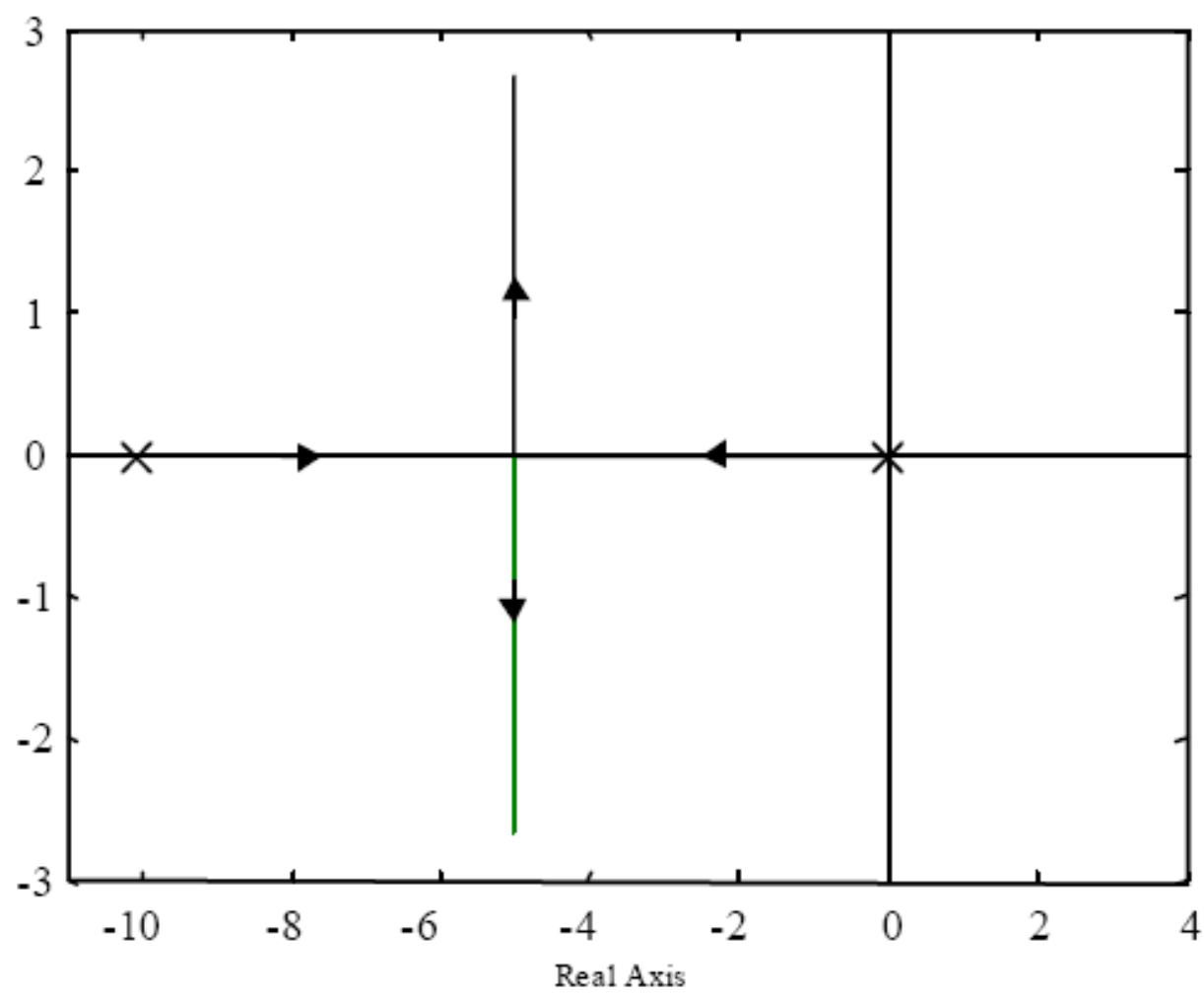
$$\theta = \frac{(2k+1)}{N_p - N_z} 180 \quad (23)$$

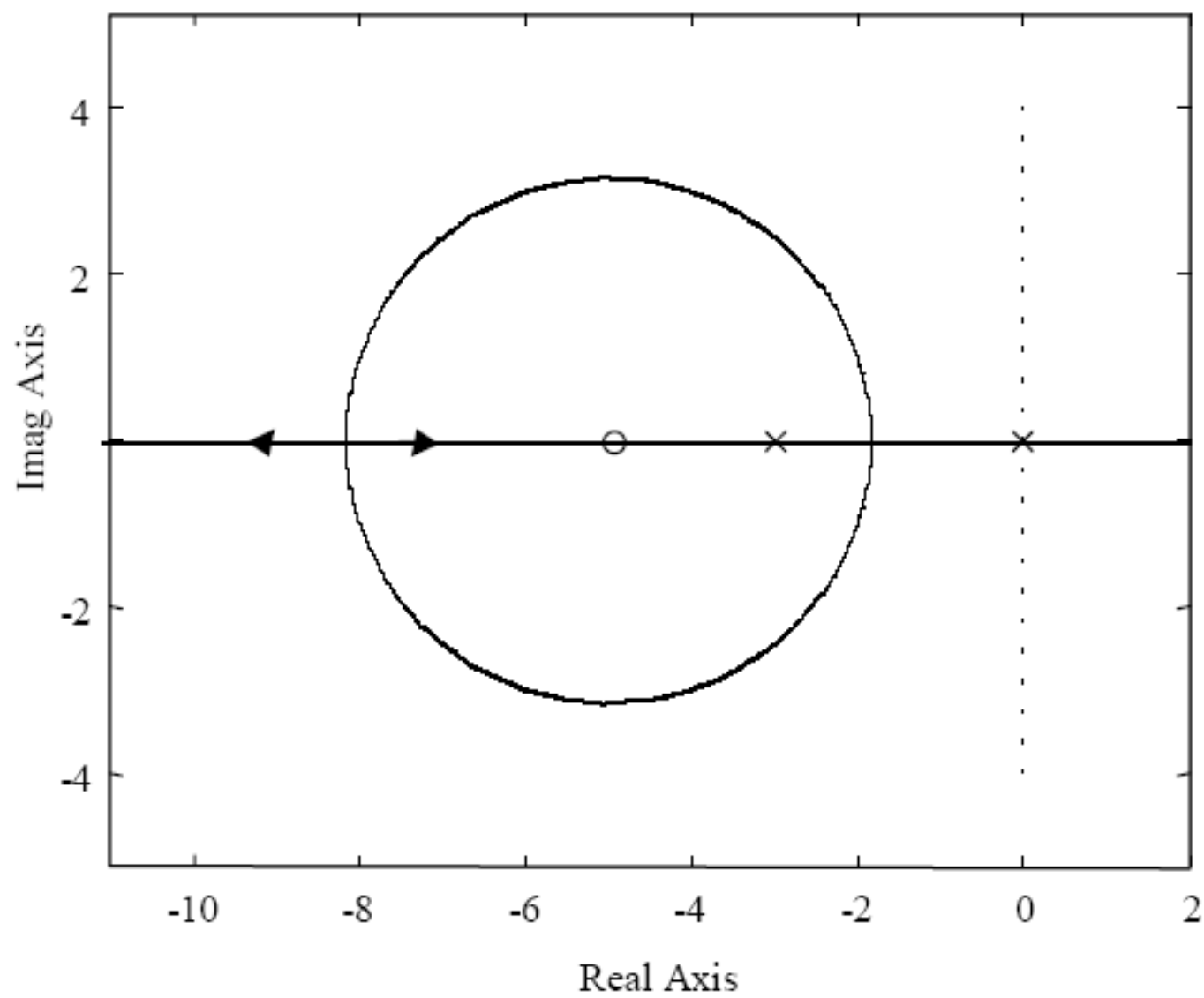
Donde $k=0,1,2,\dots,(N_p-N_z-1)$.

8) Existen tres reglas para la construcción del lugar de la raíz que a mi juicio no son tan importantes cuando se utiliza MATLAB para diseñar controladores. Sin embargo estas reglas deben ser entendidas por un buen diseñador. Estas reglas son:

- *El procedimiento para encontrar el valor de K con el cual el lugar de la raíz cruza al semiplano derecho. Este K crítico se encuentra utilizando el criterio de Root Hurwitz.*
- *El procedimiento para encontrar los puntos en que el lugar de la raíz se separa del eje real. (breakaway points).*
- *El procedimiento para encontrar los ángulos de partida y los ángulos de llegada a polos y ceros complejos conjugados.*

- 9) El lugar de la raíz se construye encontrando los puntos en que se satisface la condición de ángulo de (9). Nótese que la condición de ángulo es distinta para sistemas con K negativo.
- 10) El valor de ganancia necesaria para posicionar los polos de lazo cerrado en un determinado lugar se encuentra utilizando (12).

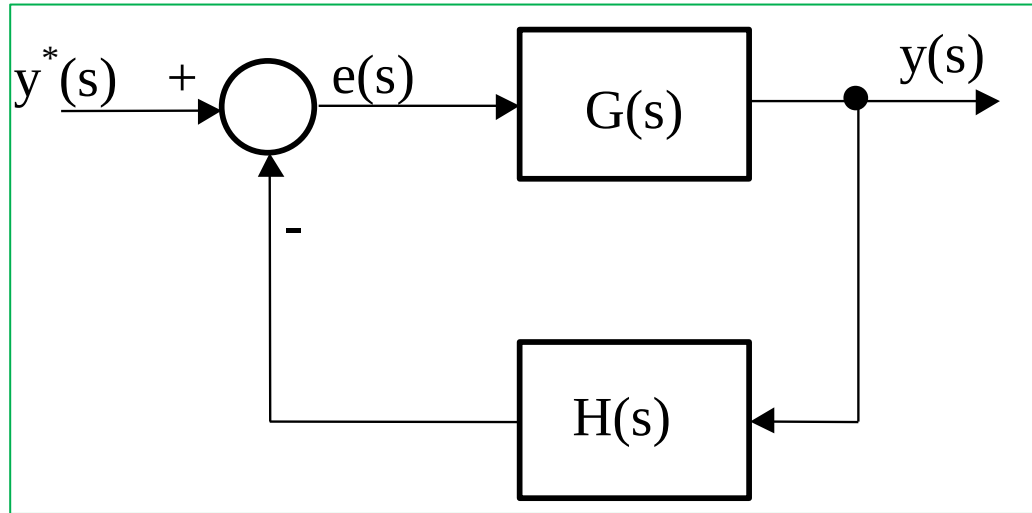




Errores

- Al especificar las características funcionales de un sistema de control, se deben considerar dos aspectos:
 - Respuesta en estado permanente.
 - Respuesta dinámica.
- La respuesta dinámica o en estado transiente, depende fundamentalmente de la posición de los polos dominantes de lazo cerrado. Las especificaciones dinámicas se efectúan en términos de coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural, tiempo de subida, máximo peak, etc.

- Para el sistema SISO



- Se puede demostrar que el error es:

$$e(s) = y^*(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

- Utilizando el teorema del valor final, el error en estado estacionario esta dado por la siguiente expresión:

$$\lim (t \rightarrow \infty) \quad e(t) = \lim (s \rightarrow 0) \quad s e(s) = \lim (s \rightarrow 0) \quad \frac{s y^*(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Por ejemplo, si el sistema esta sujeto a una entrada tipo escalón de magnitud A, el error en estado estacionario es:

$$\lim (t \rightarrow \infty) \quad e(t) = \lim (s \rightarrow 0) \frac{A}{1 + G(s)H(s)}$$

Se define:

$$K_N = \lim (s \rightarrow 0) s^N G(s)H(s)$$

K_N se denomina K_p para $N=0$, K_v para $N=1$ y K_a para $N=2$.

Resumen de errores para algunas entradas.

<i>Tipo de la función</i> $G(s)H(s)$	<i>Entrada Escalón</i> $y^*=A/s$	<i>Entrada rampa</i> $y^*=A/s^2$	<i>Entrada parabólica</i> $y^*=A/s^3$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$
1	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$e_{ss} = \infty$
2	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
3	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$

El tipo de la función es el número de integradores en $G(s)H(s)$