

Fundamentos de Control

EL 40004

Dr. Roberto Cárdenas Dobson
Profesor de la Asignatura

Sistema de Control

- Interconexión de componentes, que en su conjunto, presenta un comportamiento deseado. Asume relaciones de causa-efecto.

Sistemas de Control

SISO: Single Input Single Output.

MIMO: Multiple Input Multiple Output.

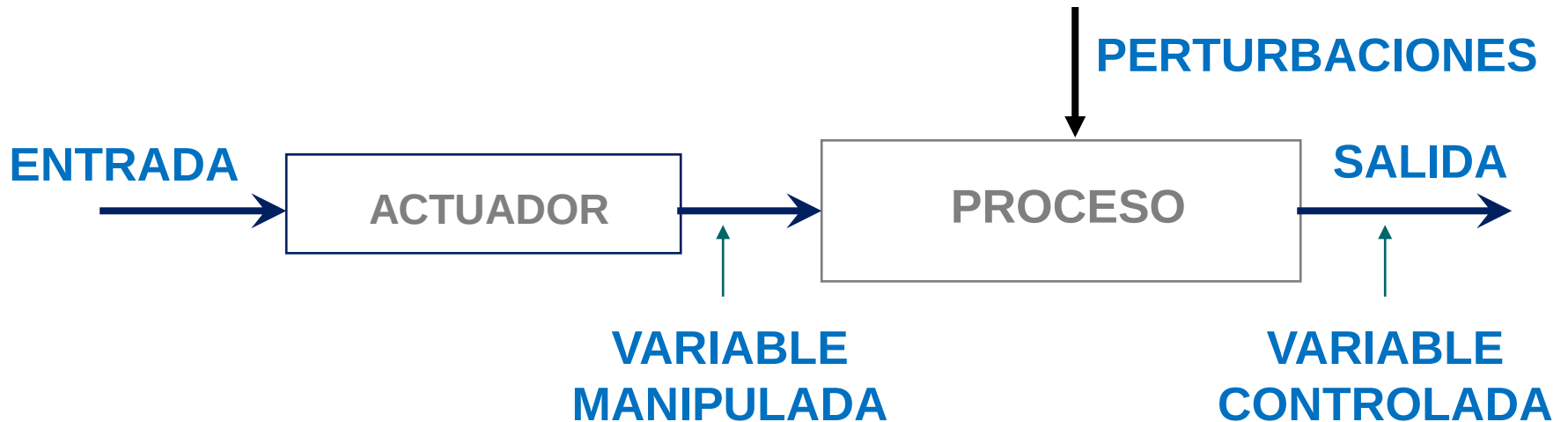
SISO: Lugar de la raíz o Root Locus, Métodos en el dominio de la Frecuencia como Bode, Nyquist. Métodos de control multivariable.

MIMO: Principalmente métodos de control multivariable.

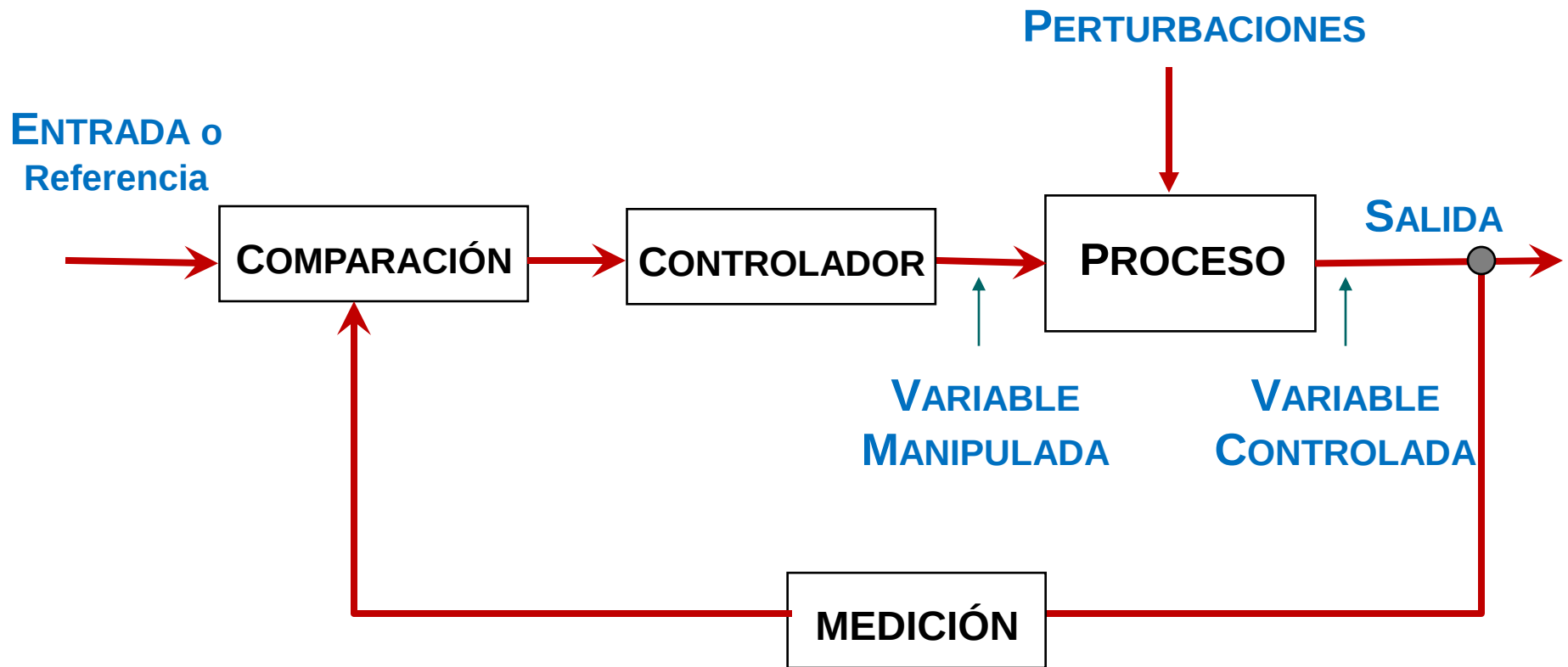
Sistemas de Control

- Control en lazo abierto o guiado.
- Control en lazo cerrado o realimentado.
- Control pre-alimentado.
- Otros tipo de control.

Control en Lazo Abierto



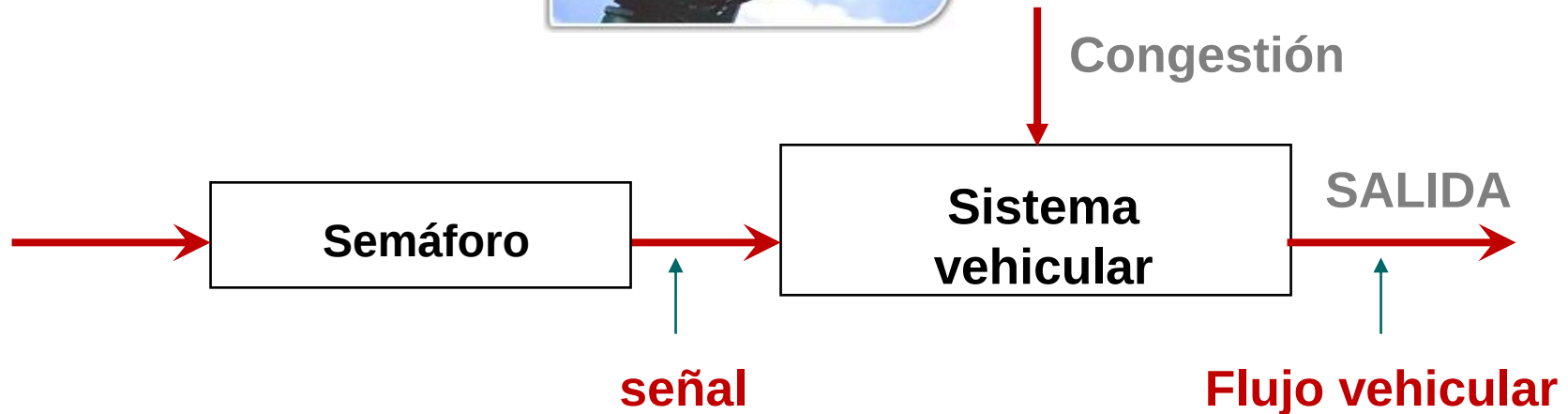
Control en Lazo Cerrado



Definiciones Básicas

- Planta
- Actuador
- Controlador o compensador
- Variables de estado
- Variables controladas
- Perturbaciones
- Set-points o referencias

Ejemplo: Control en Lazo Abierto



Sistemas

- No Lineal.
- Estáticos (no depende del tiempo).
- En tiempo continuo (Ec. Diferencial).

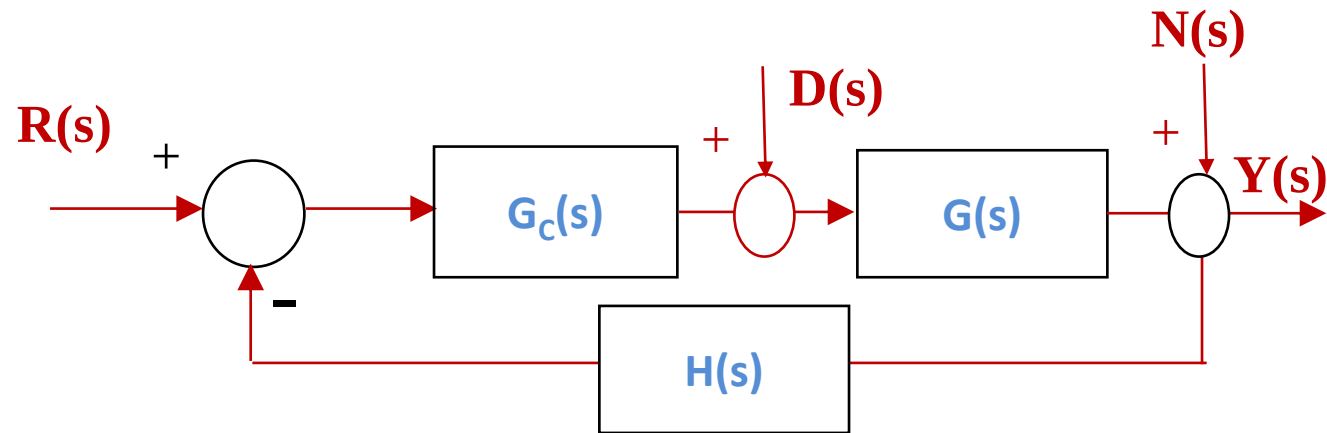
- Lineal.
- Dinámico (depende del tiempo).
- En tiempo discreto (Ec. de diferencia).

Representantes de Sistemas Lineales Dinámicos

- Ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencia.
- Función de transferencia (Laplace o Transforma Z).
- Representación en variables de estado continua o discreta

Sistema de Control Realimentado

Control en Lazo Cerrado



Función de Transferencia

Sistema de Segundo Orden

La función de transferencia de un sistema de segundo orden es:

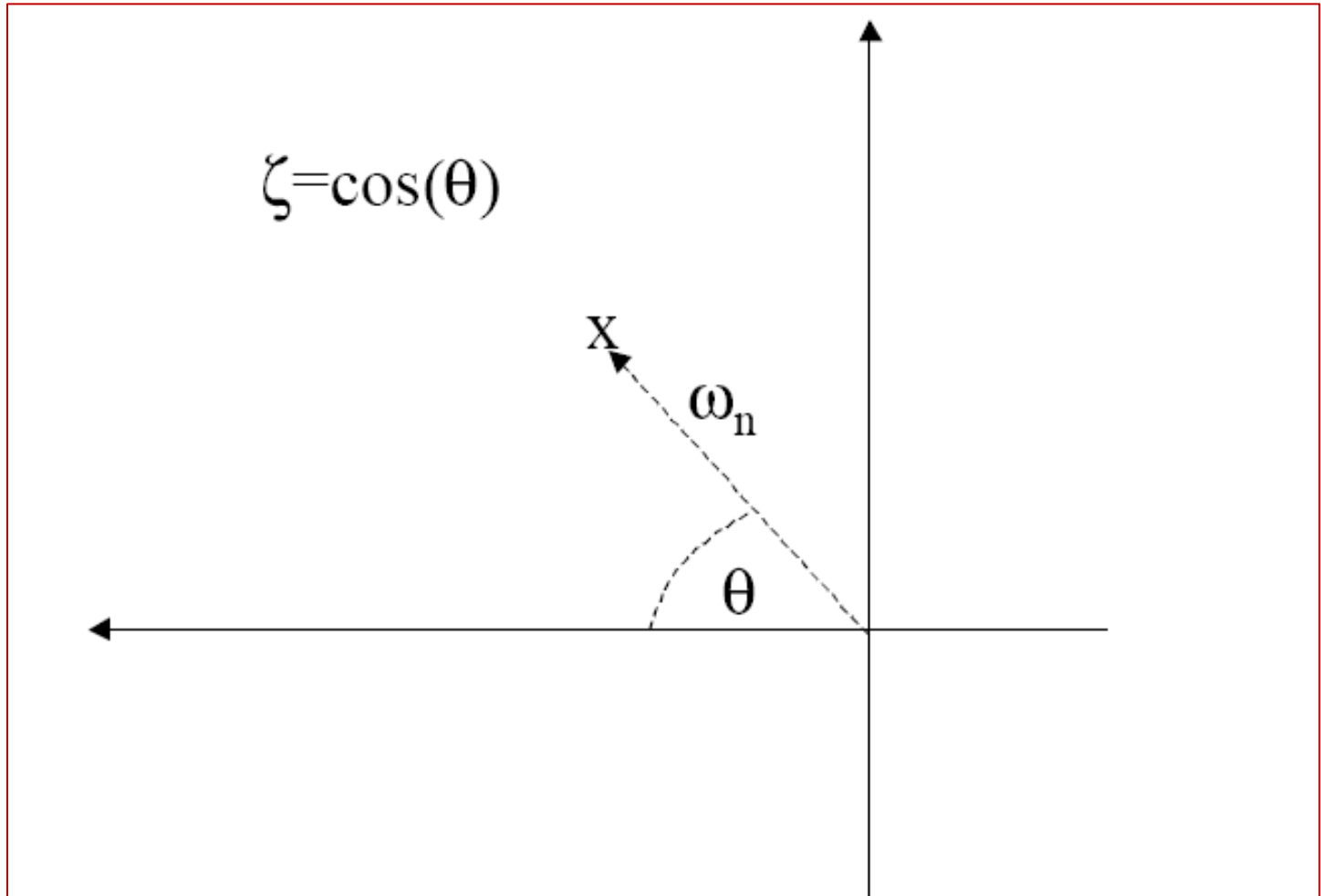
$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Respuesta a Entrada Escalón

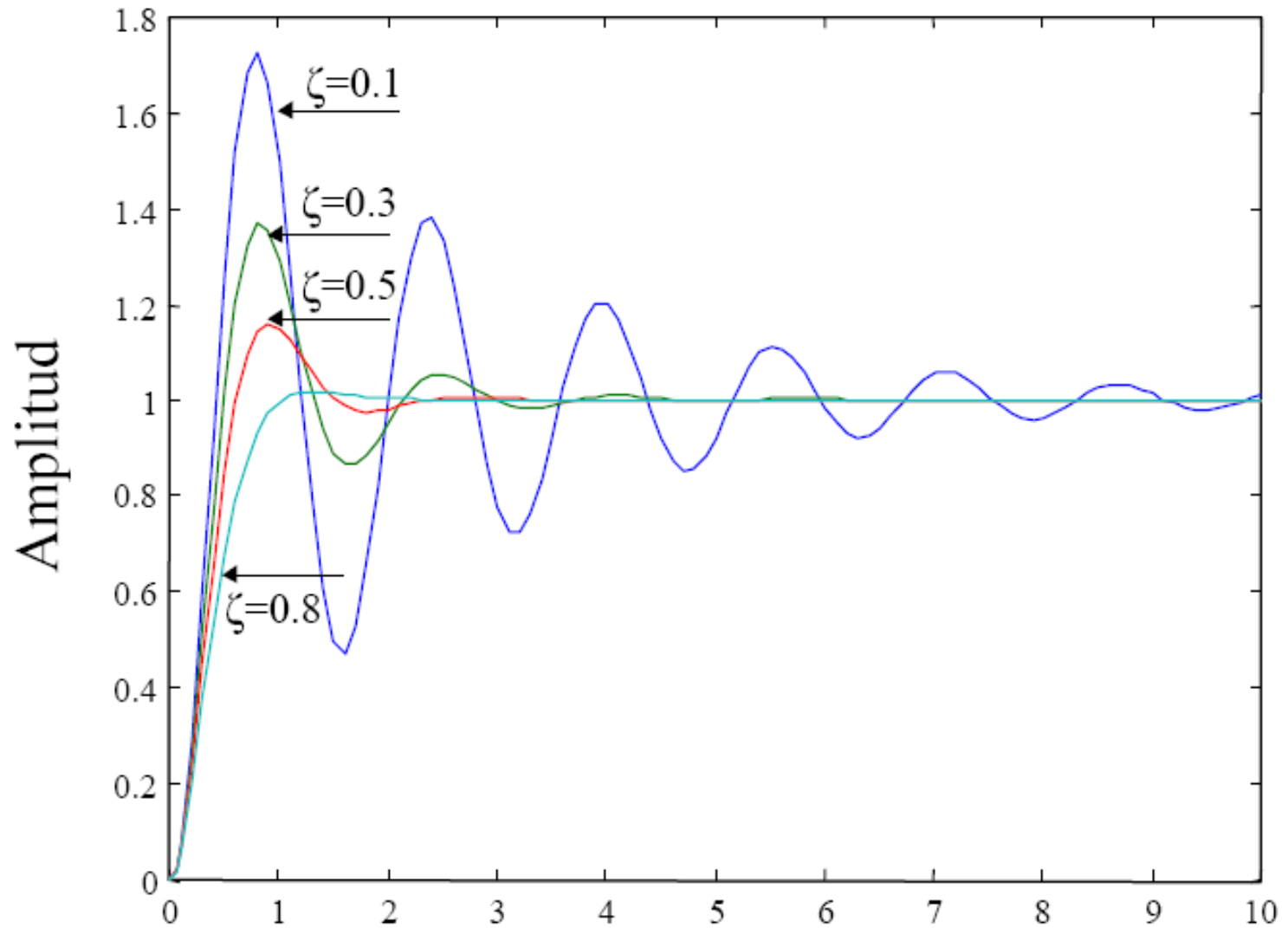
Sistema de Segundo Orden

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left[\omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \theta\right]$$

Representación de polos y ceros



Respuesta en el tiempo



Parámetros de diseño

De la discusión anterior se puede concluir que el sistema de segundo orden tiene dos parámetros de diseño, la frecuencia natural que esta relacionada con la velocidad de la respuesta y el coeficiente de amortiguamiento que esta relacionado con la forma de onda de la respuesta.

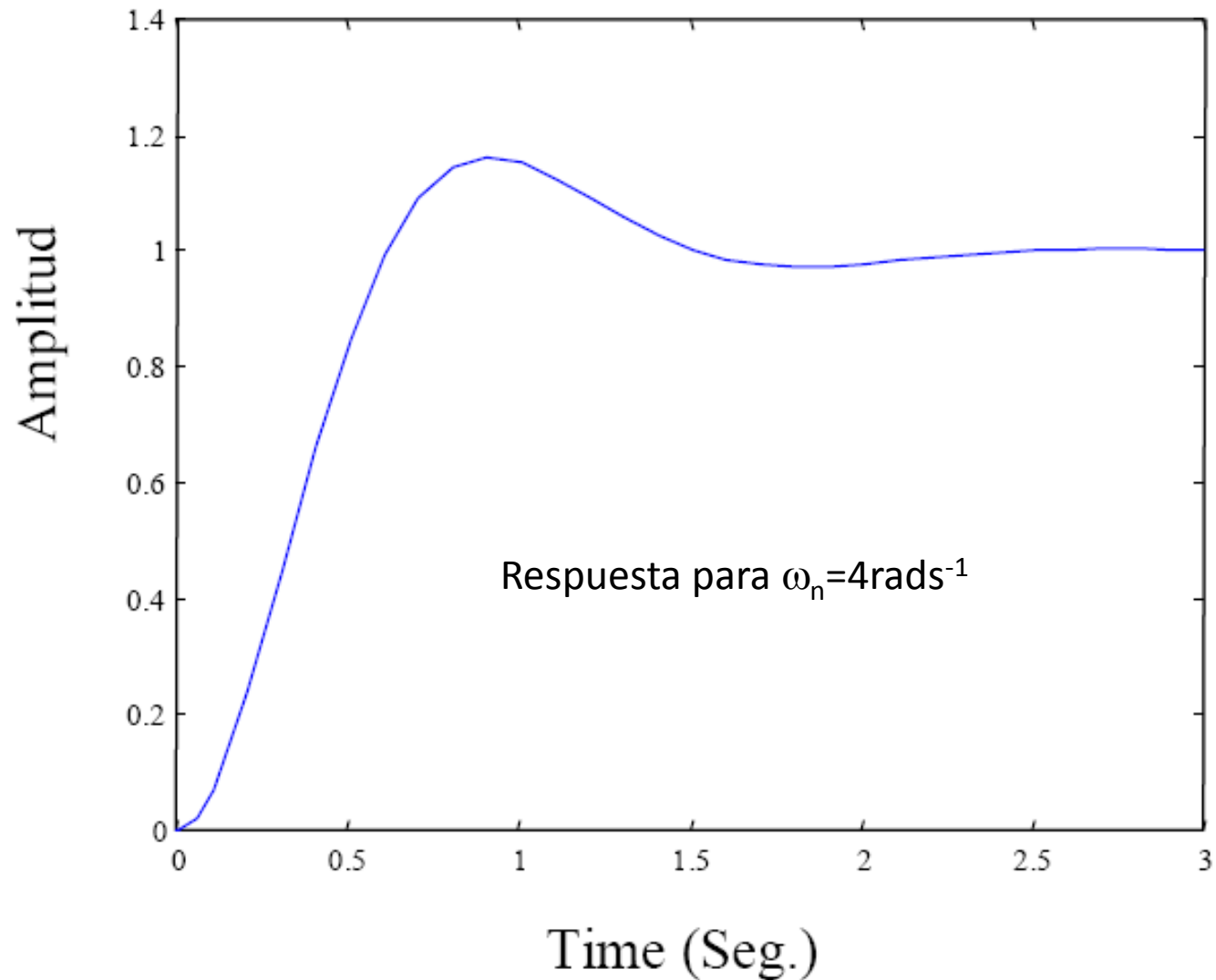
Al igual que el lugar de la raíz, la mayor parte de los métodos utilizan dos parámetros de diseño. Cuando se utilizan los gráficos de Bode los parámetros de diseño son el margen de fase y la frecuencia de cruce (o ancho de banda) y cuando se utiliza Nyquist directo o inverso

Parámetros de diseño

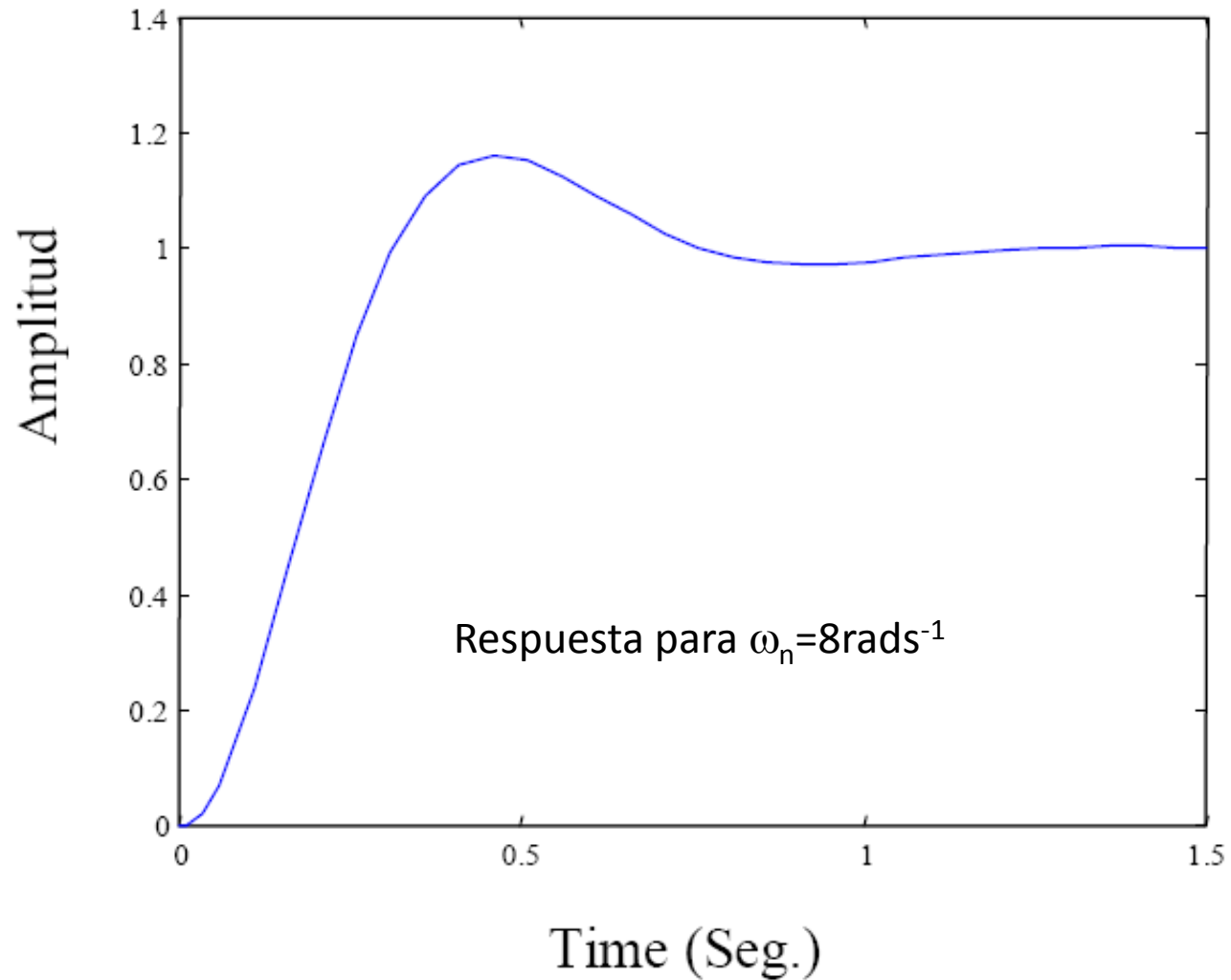
De la discusión anterior se puede concluir que el sistema de segundo orden tiene dos parámetros de diseño, la frecuencia natural que esta relacionada con la velocidad de la respuesta y el coeficiente de amortiguamiento que esta relacionado con la forma de onda de la respuesta.

Al igual que el lugar de la raíz, la mayor parte de los métodos utilizan dos parámetros de diseño. Cuando se utilizan los gráficos de Bode los parámetros de diseño son el margen de fase y la frecuencia de cruce (o ancho de banda) y cuando se utiliza Nyquist directo o inverso

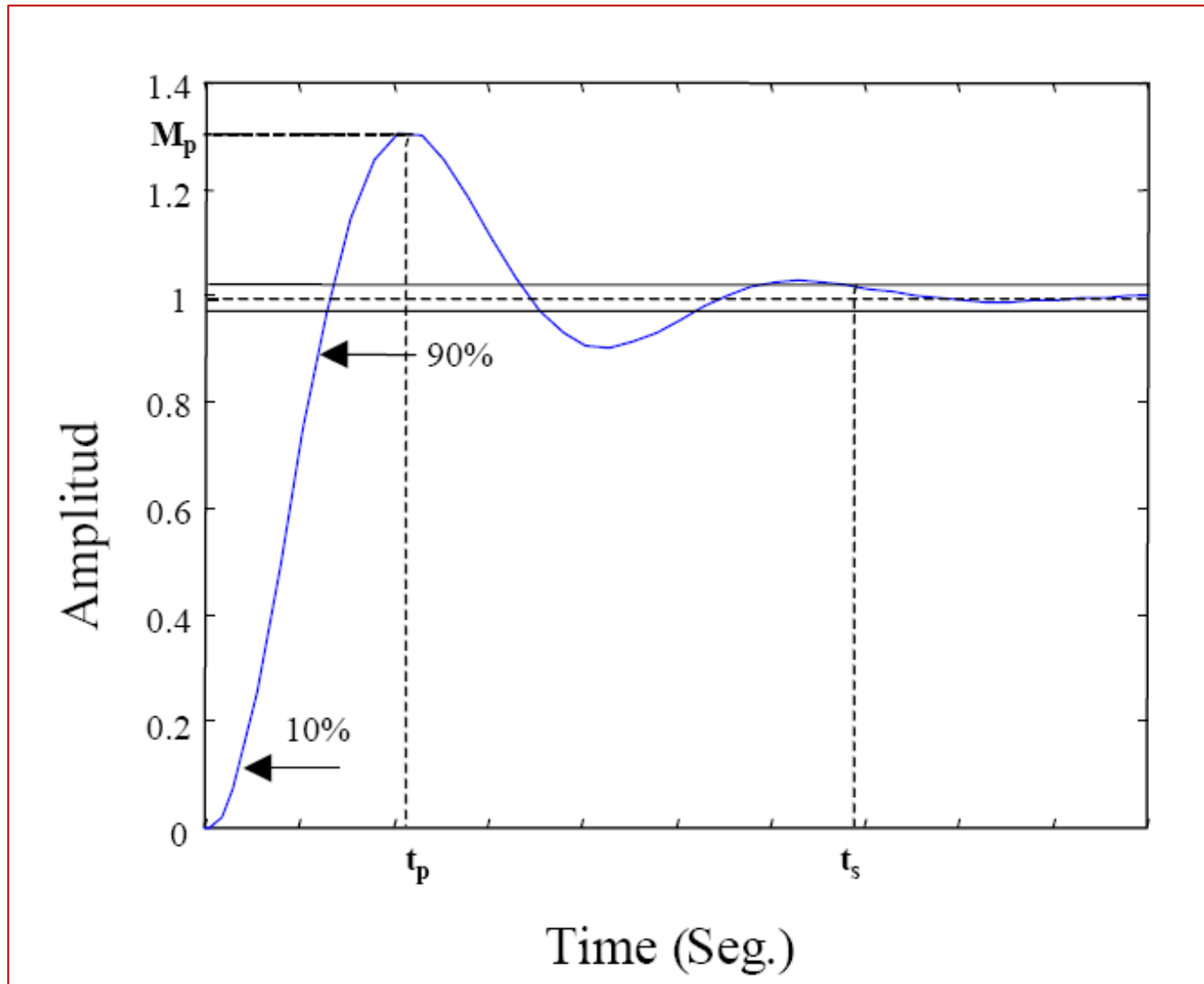
Influencia de ω_n



Influencia de ω_n



Formulas del sistema de segundo orden



Formulas del sistema

- El porcentaje de sobrepaso (overshoot) es una medida del valor de sobrepaso que tiene la respuesta del sistema por sobre la amplitud de la entrada escalón. En general sobrepasos muy altos deben ser evitados ya que producen esfuerzos inadecuados en los componentes físicos de un sistema (actuador, planta u otros). La fórmula para calcular el sobrepaso es:

$$M_p = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \text{ (Sobrepaso en tanto por uno)} \quad (4)$$

$$P.O = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \text{ (Porcentaje de sobrepaso o overshoot)} \quad (5)$$

Tabla I. Porcentaje de sobrepaso vs. coeficiente de amortiguamiento

ζ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
P.O	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

Formulas del sistema

El tiempo de establecimiento (settling time) es una medida de la velocidad del sistema. Este parámetro mide el tiempo en que la respuesta queda acotada a una cierta banda de amplitud (ver Fig. 5). Para una banda del 2% el tiempo de establecimiento esta definido como:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (6)$$

Formulas del sistema

El tiempo de respuesta máxima (time to peak). Este es el tiempo en que se produce la máxima amplitud de salida.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7)$$

El tiempo de subida (rise time o T_r) es el tiempo que toma la respuesta para subir desde el 10% al 90% de la amplitud del escalón de entrada. El tiempo de subida para un sistema de segundo orden es aproximado por la siguiente expresión.

$$T_r = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n} \quad 0.3 \leq \zeta \leq 0.8 \quad (8)$$

Nótese que el tiempo de subida, al igual que el de establecimiento, es afectado por el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural.

Sistema de segundo orden no ideal

A. Sistema de Segundo Orden con un Polo Extra.

La función de transferencia considerando un polo extra es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2 a}{(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)(s + a)} \quad (9)$$

Sistema de segundo orden no ideal

B. Sistema de Segundo Orden con un Cero Extra.

La función de transferencia, considerando un cero extra, es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2 / a (s + a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Sistema de segundo orden no ideal

La siguiente tabla muestra la respuesta del sistema en términos de sobrepaso y tiempo de establecimiento para un sistema con un cero extra, $\omega_n=1$, $\zeta=0.45$.

Tabla 3. Influencia de un cero en la respuesta del sistema

$a/(\zeta\omega_n)$	<i>Porcentaje de sobrepaso</i>	<i>Tiempo de establecimiento</i>	<i>Tiempo de peak</i>
10	21.1	8.13	3.28
5	23.10	8.0	3.0
1	89.90	10.1	2.2
0.5	210.0	10.3	1.5
0.1	1220	15.79	1.3

Influencia de los ceros

La influencia de los ceros es mejor entendida si consideramos la siguiente función en el dominio de Laplace (función de transferencia sin ceros):

$$y(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^N (s + p_i)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots \frac{A_N}{s + p_N} \quad (12)$$

La respuesta en el tiempo se encuentra aplicando la transformada inversa de Laplace a (12) obteniéndose:

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} + \dots A_N e^{-p_N t} \quad (13)$$

Polos Dominantes

En muchas aplicaciones es posible encontrar sistemas que tienen alto orden y que no pueden representarse fácilmente como un sistema de segundo orden o un sistema de segundo orden con un polo o cero extra. En este caso el diseñador debe identificar aquellos polos que son dominantes en la respuesta y concentrarse (pero no exclusivamente) en ellos. Por ejemplo en una función de transferencia como la siguiente:

$$y(t) = 1 - 3e^{-5t} - 3e^{-50t} \quad (16)$$

la respuesta en el tiempo que depende del polo ubicado en 5 es la dominante. Asumiendo que el valor de la exponencial es despreciable después de 3 veces la constante de tiempo, entonces la respuesta del polo ubicado en 50 desaparece después de solo 60 milisegundos mientras la respuesta en el tiempo del polo ubicado en 5 afecta al sistema por 600 milisegundos. Es decir el

Polos Dominantes

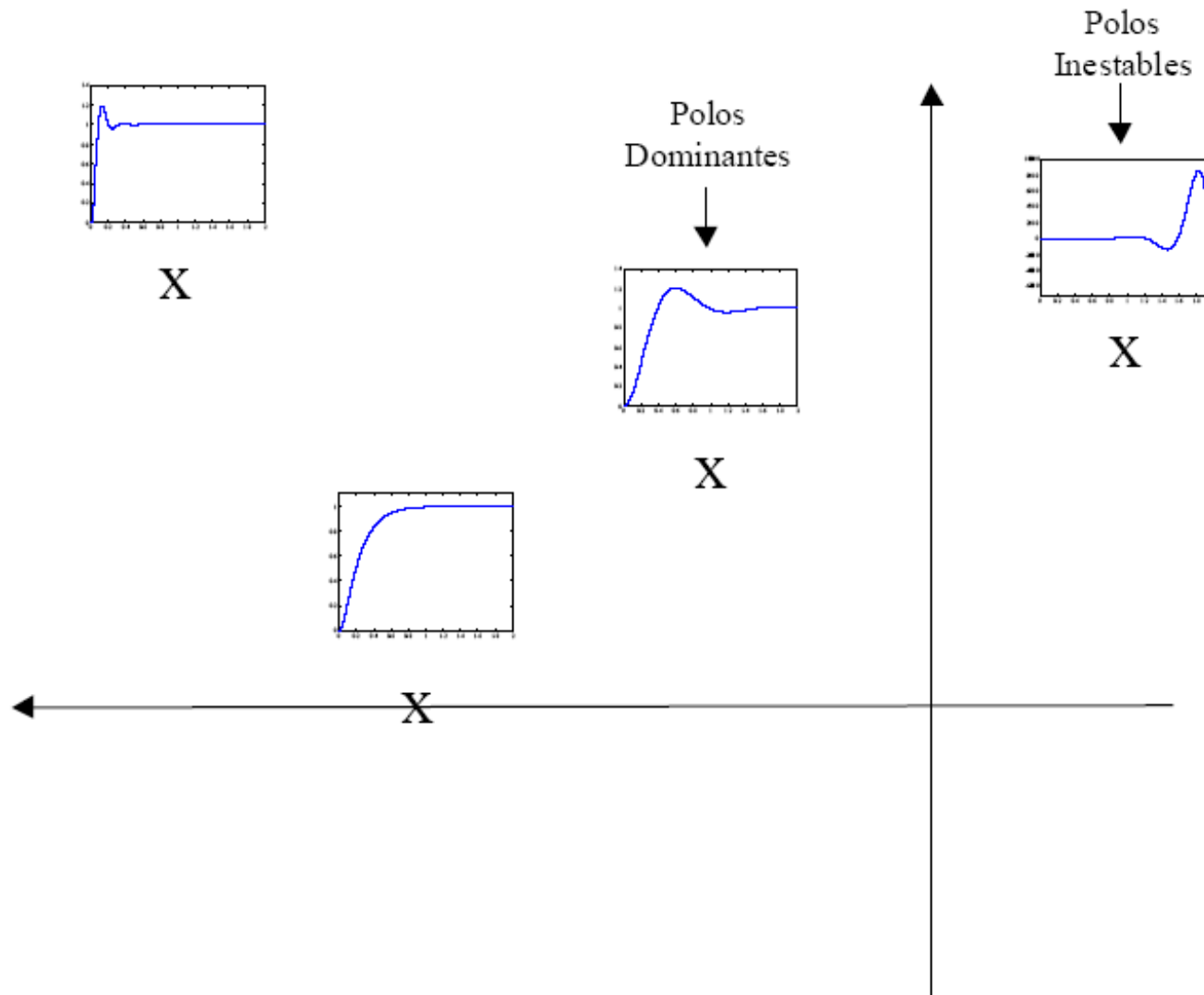


Figura 7. Influencia de la posición de los polos en la respuesta del sistema.