

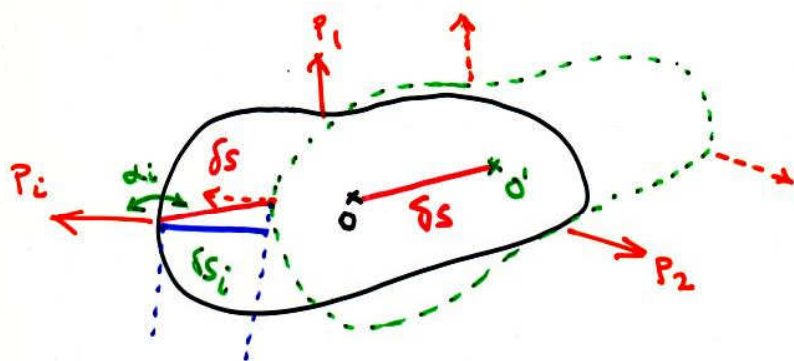
## Principio de los trabajos virtuales

### • desplazamientos virtuales

El principio parte de la base de que :

- si una fuerza  $\vec{P}$  es desplazada  $\vec{\delta s}$  el trabajo es  $W = \vec{P} \cdot \vec{\delta s}$   
si el desplazamiento es en la dirección de la fuerza:  $W = P \cdot \delta s$
- si un momento  $\vec{M}$  es rotado  $\vec{\delta \varphi}$  el trabajo es:  $W = \vec{M} \cdot \vec{\delta \varphi}$   
si la rotación es en la dirección del momento:  $W = M \cdot \delta \varphi$

consideremos un sistema de fuerzas  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  con resultante  $\vec{P}_r$ . Si al sistema se le aplica un desplazamiento  $\vec{\delta s}$  en la dirección de la resultante  $\vec{P}_r$ , el trabajo realizado por cada una de las fuerzas  $P_i$ , sumado, equivale al realizado por la resultante.



Trabajo realizado por  $P_i$  :

$$P_i \delta s_i = P_i (\delta s \cos \alpha_i)$$

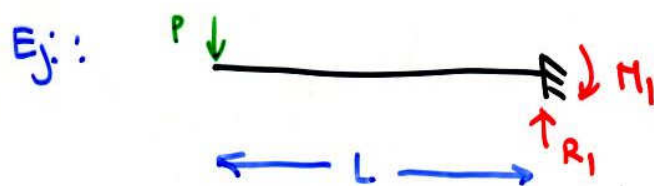
Trabajo total :  $\sum P_i \delta s_i = P_1 \delta s_1 + \dots + P_n \delta s_n = P_r \delta s$

cuando el sistema está en equilibrio, la resultante  $P_r = 0$ .

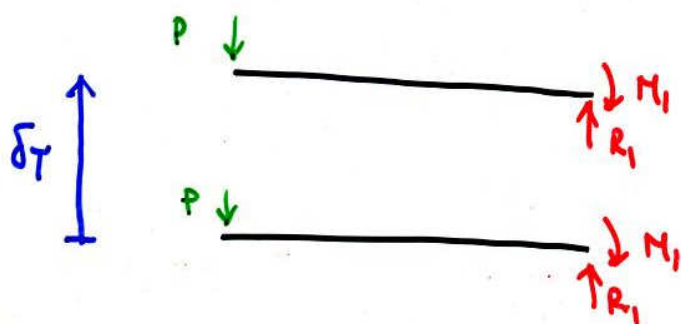
$$\Rightarrow P_1 \delta s_1 + \dots + P_n \delta s_n = 0$$

Es decir, la dirección  $\delta s$  puede actuar en cualquier dirección.

Puesto que no existen limitaciones sobre los desplazamientos, estos pueden ser infinitesimales o finitos,



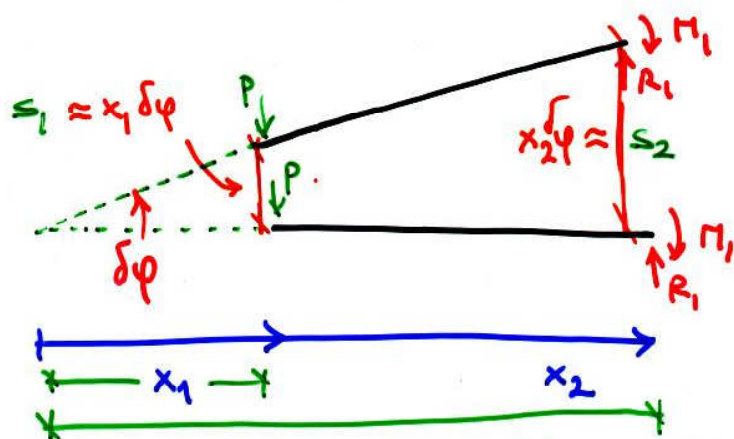
Supongamos un desplazamiento en la dirección vertical.



Notar que el apoyo ha sido reemplazado por dos reacciones desconocidas.

$$\Rightarrow -P \delta Y + R_1 \delta Y = 0$$

Si consideramos un giro  $\delta\varphi$



Para  $\delta\varphi$  pequeño,  $\delta\varphi = \tan(\delta\varphi) \approx \sin(\delta\varphi) = \frac{s_1}{x_1} = \frac{s_2}{x_2}$

$$\therefore -M_1 \delta\varphi - P x_1 \delta\varphi + R_1 x_2 \delta\varphi = 0$$

Las dos ecuaciones determinadas resuelven las reacciones del apoyo.

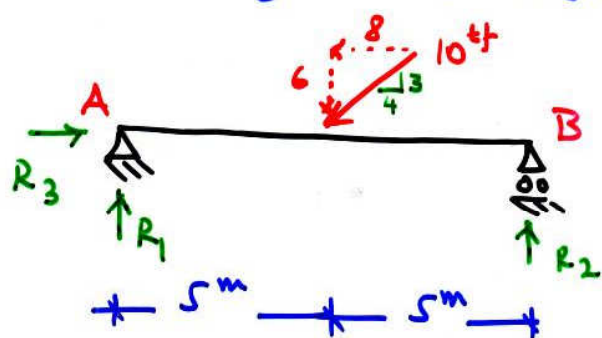
$$-P + R_1 = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = P$$

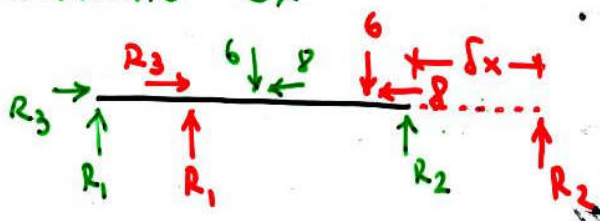
$$M_1 + P x_1 - R_1 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow M_1 = P(x_2 - x_1) = P \cdot L$$

Ej: Determinar las reacciones por medio de los trabajos virtuales.



Desplazamiento  $\delta x$

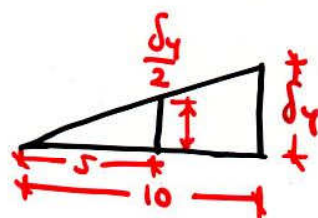
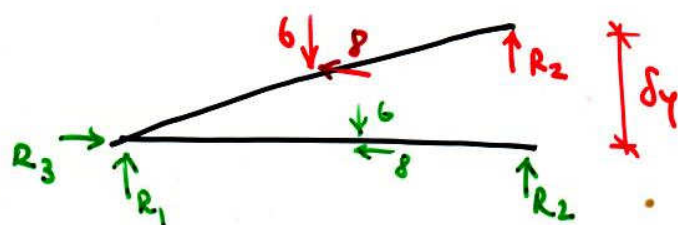


$$R_3 \delta x - 8 \delta x = 0$$

$$\Rightarrow R_3 = 8 \text{ kN}$$



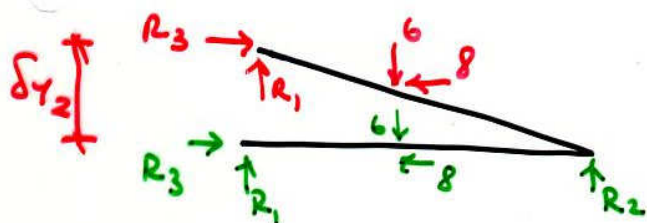
- giro en torno a A.



$\Rightarrow$  si el giro es pequeño :

$$R_2 \cdot \delta_y - 6 \cdot \frac{\delta_y}{2} = 0 \Rightarrow R_2 = 3^{tt}$$

- giro en torno a B :

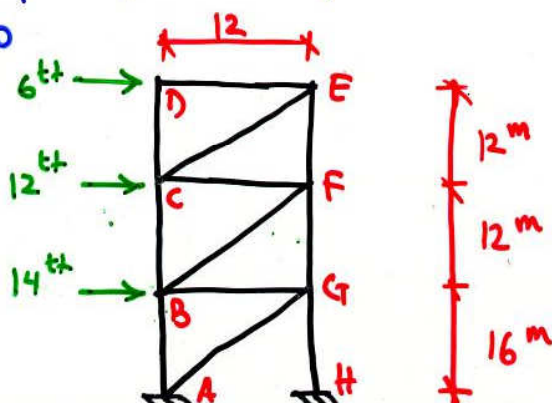


análogamente,  $R_1 \delta_{y2} - 6 \cdot \frac{\delta_{y2}}{2} = 0 \Rightarrow R_1 = 3^{tt}$

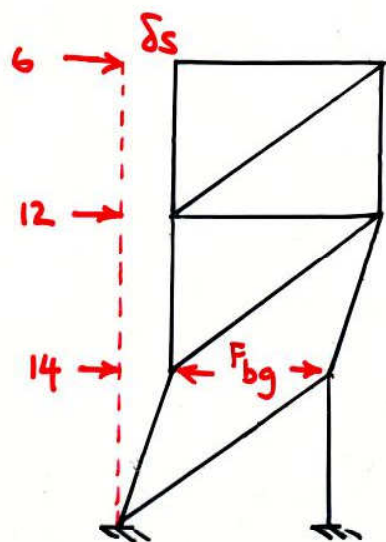
El principio de los trabajos virtuales no sólo nos permite determinar las reacciones en los apoyos, sino que además puede usarse para determinar los esfuerzos en estructuras.

### Aplicación de trabajos virtuales en enrejados.

Ej: Determinar el esfuerzo en las barras BG y GH del enrejado

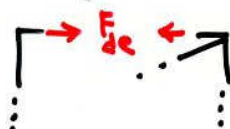


26.  
Para determinar el esfuerzo en BG se debe imponer un desplazamiento, tal que, sea sólo esta barra la que trabaje.



Se desplazan horizontalmente los diferentes niveles una distancia  $\delta s$ . La acción y reacción  $F_{bg}$  reemplaza la barra BG. Sólo esta barra es reemplazada puesto que las otras barras producen un trabajo nulo.

Ej.: Barra DE:

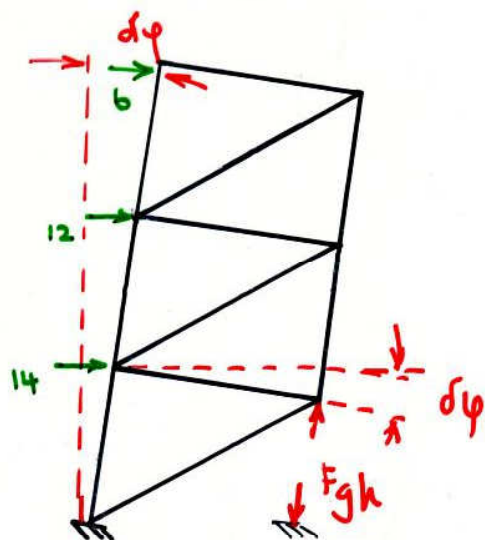


$$W_{DE} = F_{de} \delta s - F_{de} \delta s = 0.$$

Para el desplazamiento  $\delta s$ :

$$(6 + 12 + 14) \delta s - F_{bg} \delta s = 0 \Rightarrow F_{bg} = 32^{tt}$$

Para determinar el esfuerzo  $F_{gh}$



Para un desplazamiento (giro) pequeño  $\delta \varphi$ :

$$14 \cdot 16 \cdot \delta \varphi + 12 \cdot 28 \delta \varphi + 6 \cdot 40 \delta \varphi - F_{gh} \cdot 12 \delta \varphi \Rightarrow F_{gh} = 66,7^{tt}$$

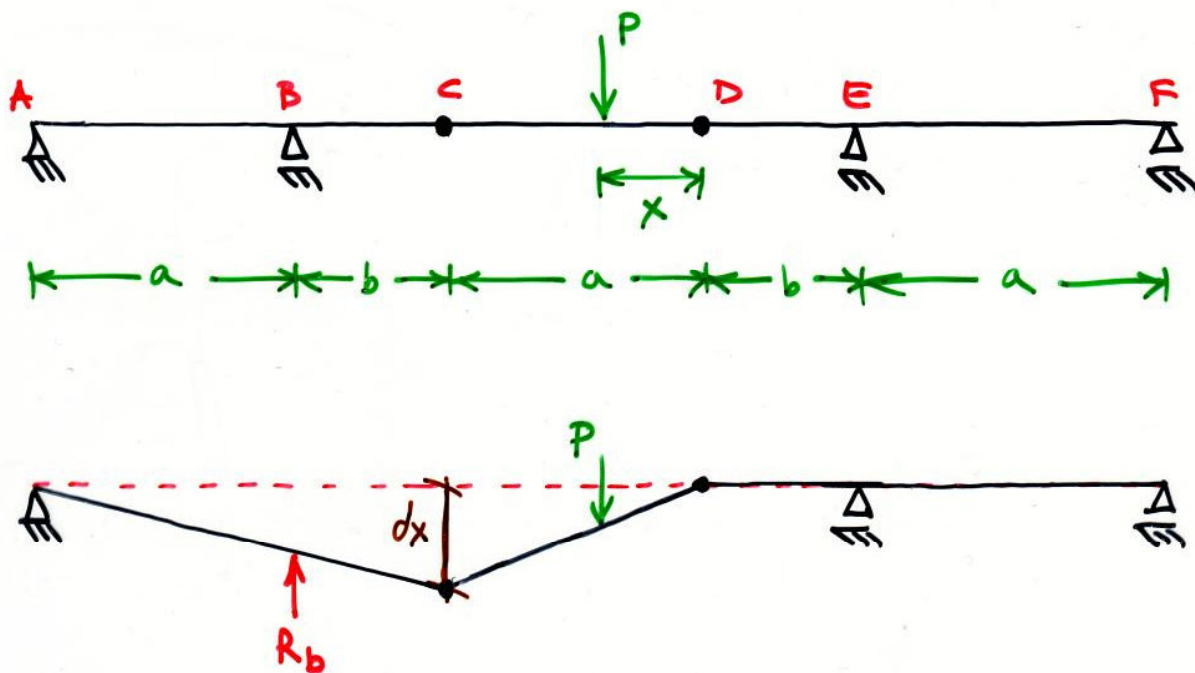


## Aplicación del principio de los trabajos virtuales en vigas.

87.

El principio de los trabajos virtuales puede permitir determinar las reacciones de un sistema

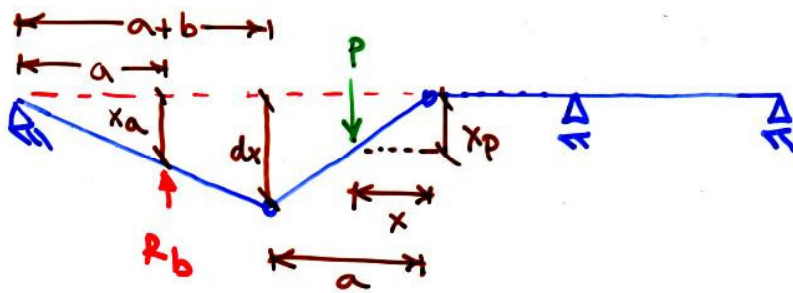
Ej.: Determinar la reacción en B.



Al reemplazar el apoyo B por su reacción equivalente, el sistema puede estar o no estar en equilibrio (dependiendo del valor de  $R_b$ ). Si se impone un desplazamiento virtual  $\delta x$  en C el sistema adquiere una nueva configuración, respetando todas las características estructurales del sistema, es decir, las rótulas trabajan como rótulas al igual que los apoyos.

Dada la nueva configuración, para imponer el equilibrio del sistema, basta con imponer que la suma de los trabajos virtuales es nula.

De esta forma ,



$$x_a = \frac{a}{a+b} \delta x$$

$$x_p = \frac{x}{a} \delta x$$

se impone la geometría del sistema.

$$P \cdot x_p - R_b \cdot x_a = 0$$

$$\Rightarrow P \cdot \frac{x}{a} \delta x - R_b \frac{a}{a+b} \delta x = 0$$

$$\therefore R_b = Px \left( \frac{a+b}{a^2} \right)$$

Se ha impuesto que el trabajo total es nulo, es decir, que el sistema está en equilibrio.

De esta forma el valor de  $R_b$  es tal que el sistema se mantiene en equilibrio.

Se puede utilizar la misma metodología para determinar las otras reacciones.

Por otra parte, puesto que los esfuerzos internos no son más que otras fuerzas "adicionales", se puede proceder de igual forma para determinarlos.



## Líneas de influencia

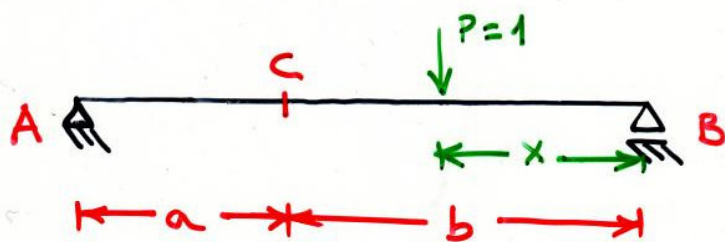
89.

Hasta ahora se han analizado estructuras geométricamente definidas, con cargas conocidas y la igual que las ubicaciones de éstas. Sin embargo, en algunos casos esta última situación (la ubicación de la carga) puede no estar completamente definida o puede ser variable (por ejemplo, el tránsito vehicular de un puente).

De esta forma es importante conocer cómo varía la distribución de esta carga móvil sobre las reacciones y esfuerzos internos.

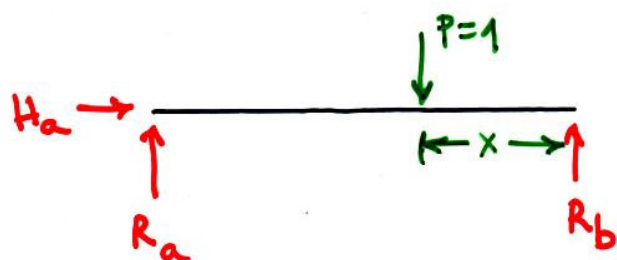
La representación de cargas (solicitaciones) móviles puede incorporarse en diferentes diagramas, llamada líneas de influencia o diagramas de influencia.

Ej.: Determinar las líneas de influencia de la reacción  $R_A$ , el esfuerzo de corte en C y el esfuerzo de flexión en C para una carga móvil de valor unitario.





- Línea de influencia de  $R_a$



$$\sum F_x: H_a = 0$$

$$\sum M_B: R_a \cdot (a+b) - P \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow R_a = \frac{x}{(a+b)}$$

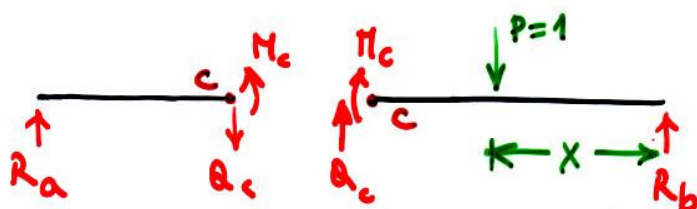


Recordar que dada la validez del principio de superposición basta "escalar" el valor de  $R_a$  para otro valor de  $P$ .

El gráfico  $R_a(x)$  representa el valor de  $R_a$  para las diferentes ubicaciones de la carga.

- Línea de influencia del corte en C ( $Q_c$ )

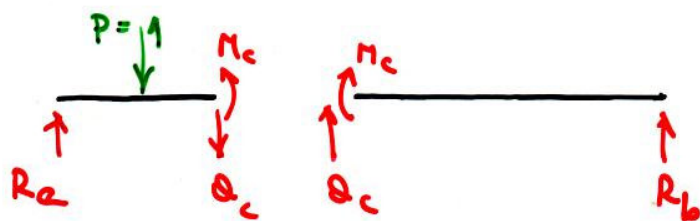
(a) Para  $0 < x < b$ ,



Del primer esquema tenemos,

$$\sum F_y: Q_c - R_a = 0 \Rightarrow Q_c = R_a = \frac{x}{a+b}$$

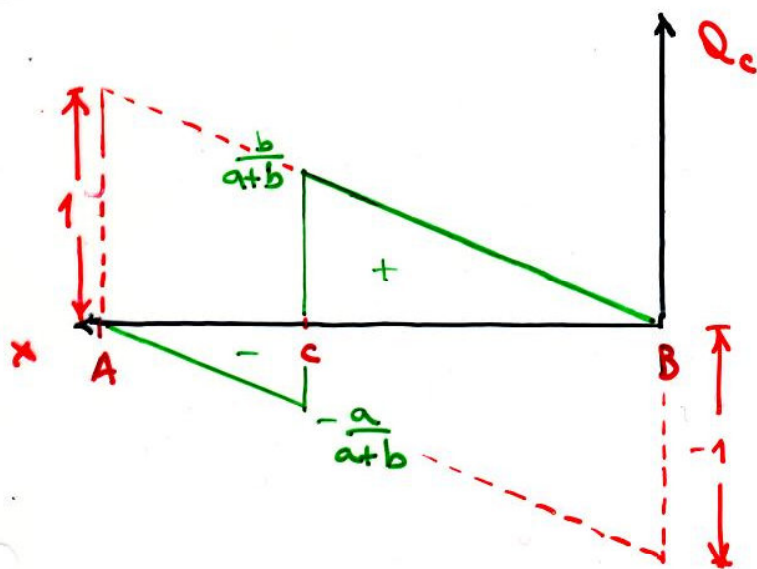
(b) Para  $b < x < a+b$



Del primer esquema,

$$\sum F_y: Q_c + \cancel{P} - R_A = 0$$

$$\Rightarrow Q_c = R_A - 1 = \frac{x}{a+b} - 1 = \frac{x - (a+b)}{a+b}$$



Es importante notar que el diagrama representa el corte en un punto particular de la viga (c) para una carga móvil.

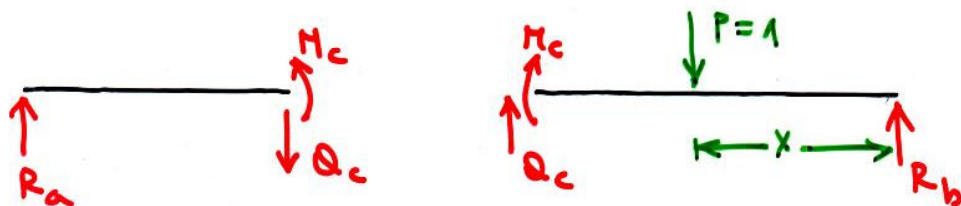
Sin embargo, y puesto que el punto c también puede ser variable, se ha graficado una línea punteada roja que hace el papel de envolvente (notar que a y b pueden tomar cualquier valor).

En el ejemplo, si "b" es grande y "a" chico el punto c se acerca al punto A adoptando el diagrama de influencia una discontinuidad cercana al valor "1".



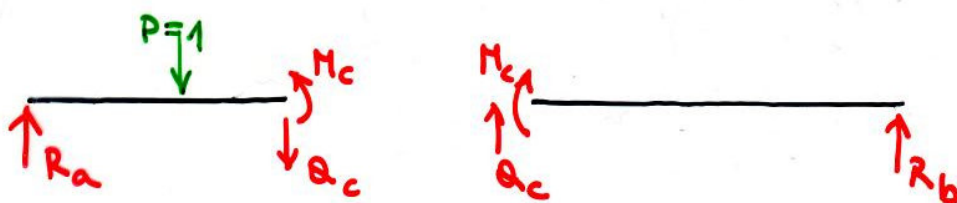
- Líneas de influencia de flexión en C,  $M_c$ .

Para  $0 \leq x \leq b$



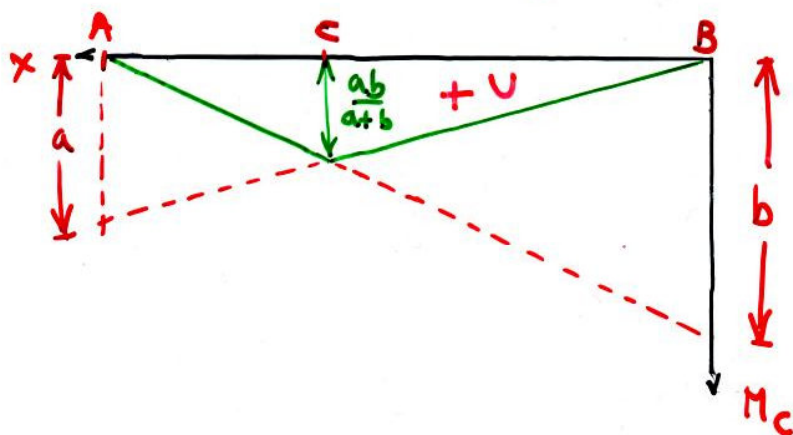
$$\sum \Pi_c: M_c - R_a \cdot a = 0 \Rightarrow M_c = R_a \cdot a = \frac{a \cdot x}{a+b}$$

Para  $b \leq x \leq a+b$



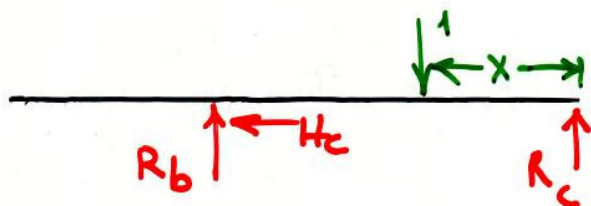
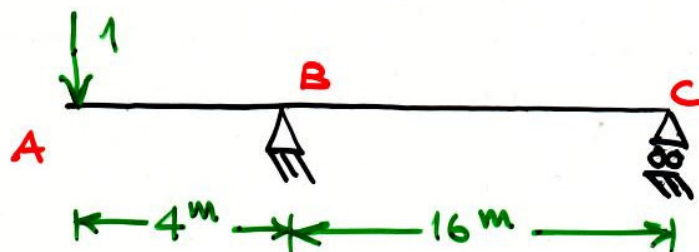
$$\begin{aligned} \sum \Pi_c: M_c - R_a \cdot a + P \cdot (x-b) &= 0 \\ \Rightarrow M_c &= R_a \cdot a - 1 \cdot (x-b) = \frac{b(a+b-x)}{a+b} \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos,

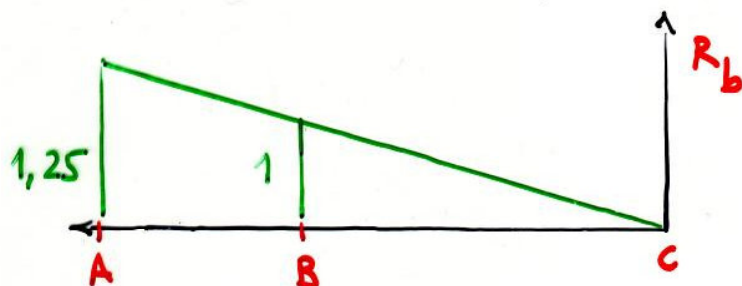


Al considerar  $P=1$  los diagramas de influencia son genéricos para cualquier carga puntual, sólo basta con "amplificar" estos diagramas para obtener el valor real en cada caso.

Ej.: construir las líneas de influencia para la reacción B y el corte justo a la derecha del apoyo B.



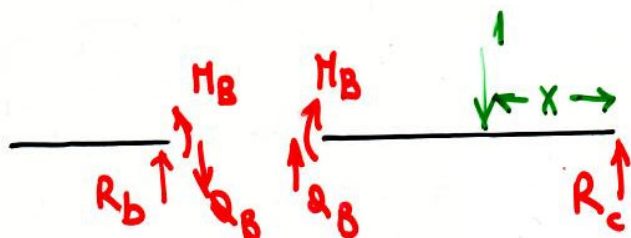
$$\sum M_c : 16 \cdot R_b - 1 \cdot x = 0 \Rightarrow R_b = \frac{x}{16}$$



Línea de influencia de  $R_b$

- Línea de influencia del corte  $Q_B$  (a la derecha de B).

Para  $0 < x < 16^m$



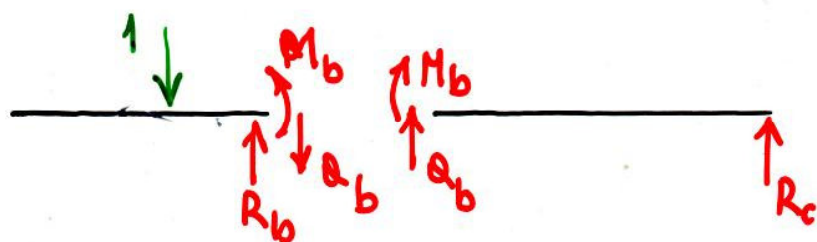
$$\sum F_y : R_b - Q_b = 0 \Rightarrow Q_b = R_b = \frac{x}{16}$$

Notar que el resultado sería diferente si se analiza el corte al lado izquierdo del apoyo.

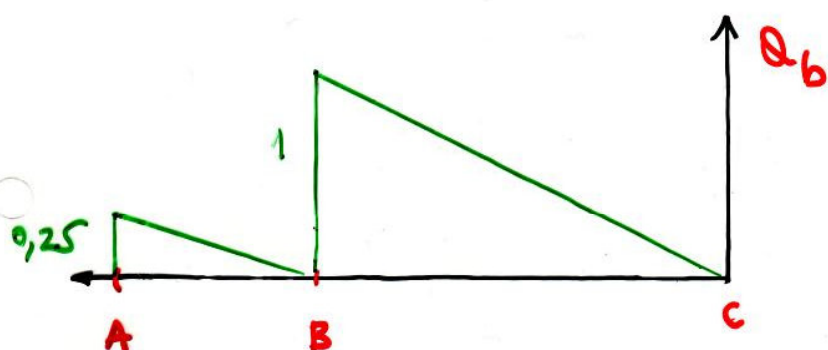


Para  $16 < x < 20$ ,

94.



$$\sum F_y: R_b - Q_b - 1 = 0 \Rightarrow Q_b = R_b - 1 = \frac{x}{16} - 1$$



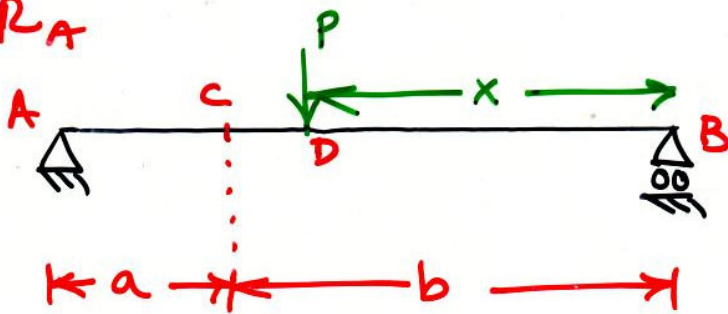
### Líneas de Influencia como diagramas de desplazamiento virtual

Las líneas de influencia también se pueden construir a partir del principio de los trabajos virtuales, recordando que para su uso se debe reemplazar "algún" elemento por el sistema de fuerzas (o momentos) equivalentes que se desea determinar.

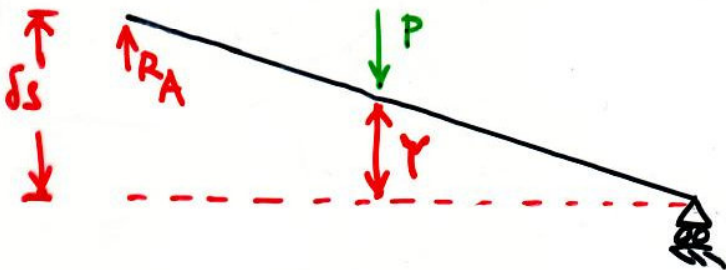
95.

Ej.: Determinar la línea de influencia para la reacción  $R_A$ ,  $Q_c$  y  $M_c$ .

(a)  $R_A$



Reemplazando el apoyo A por la reacción  $R_A$  e imponiendo un desplazamiento  $\delta s$ .



$$\delta W_T = R_A \cdot \delta s - P \gamma = 0$$

Si imponemos  $\delta s = 1$  y  $P = 1$

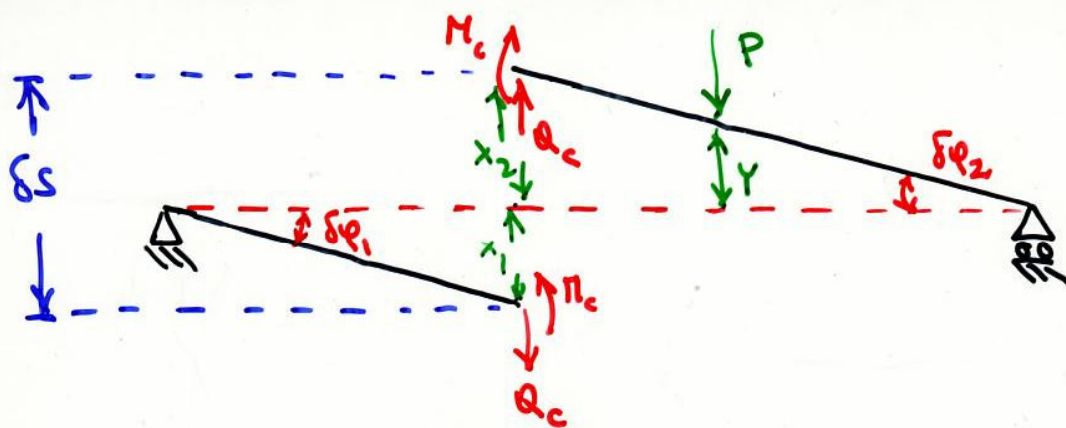
$$\Rightarrow R_A = \gamma$$

Es decir, la línea de influencia de  $R_A$  equivale a la altura del esquema anterior.

(b)  $Q_c$

Para usar el principio de los trabajos virtuales es necesario aislar la estructura tal que intervengan estos esfuerzos.





Si dividimos la estructura como en el esquema podemos analizar los esfuerzos pedidos, sin embargo, si sólo nos interesa  $Q_c$  el desplazamiento virtual que se debe imponer debe ser tal que "no" trabaje  $M_c$ . Para ello basta con imponer el mismo giro en ambos segmentos de barra, es decir,  $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$ .

$$\Rightarrow \delta W = Q_c \cdot x_1 + Q_c x_2 - M_c \delta\varphi_1 + M_c \delta\varphi_2 - P\gamma = 0$$

$$\Rightarrow Q_c \cdot \delta S - P\gamma = 0$$

Si imponemos  $\delta S = 1$  y  $P = 1$ ,

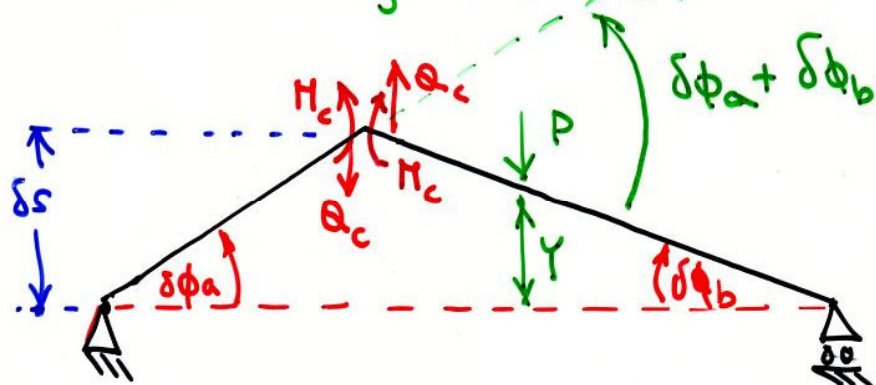
$$\Rightarrow Q_c = \gamma$$

Es decir, el esquema desplazado virtualmente representa la línea de influencia del corte  $Q_c$ .

En este caso los desplazamientos virtuales (que según se mencionó corresponden a la línea de influencia de  $Q_c$ )  $x_1$  y  $x_2$  quedan determinados por la geometría:

$$\text{Si } \delta S = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{L} \quad \gamma \quad x_2 = \frac{b}{L}, \quad L = a + b$$

En este caso la solución es similar a la anterior, salvo por que en este caso se quiere tener como incógnita  $M_c$ .



Puesto que los esfuerzos  $Q_c$  "apuntan" en sentido contrario, lo más conveniente es desplazar ambos extremos de las estructuras (segmentos de barras o vigas) una misma magnitud  $\delta s$ .

$$\Rightarrow \delta W = Q_c \cdot \delta s - Q_c \cdot \delta s + M_c \delta \phi_a + M_c \delta \phi_b - P \gamma = 0$$

$$\Rightarrow M_c (\delta \phi_a + \delta \phi_b) - P \gamma = 0$$

Si imponemos  $\delta \phi_a + \delta \phi_b = 1$  y  $P=1$ ,

$$\Rightarrow M_c = \gamma$$

Es decir, el diagrama de la línea de influencia de  $M_c$  queda representado por el desplazamiento de la figura.

con los valores impuestos y según la geometría podemos determinar:

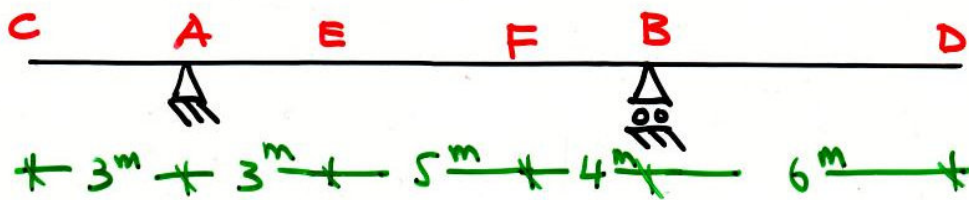
$$\delta s \approx a \delta \phi_a = b \delta \phi_b$$

$$\Rightarrow \delta \phi_a + \delta \phi_b = \delta s \left( \frac{a+b}{ab} \right) = 1 \Rightarrow \delta s = \frac{ab}{a+b}$$

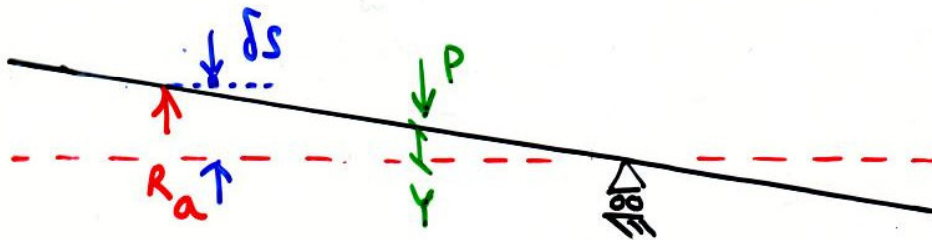


Ej: Construir las líneas de influencia por el método de los desplazamientos virtuales para los siguientes efectos:

- reacción en A.
- esfuerzo de corte en E.
- esfuerzo de flexión en F.



(a)  $R_A$



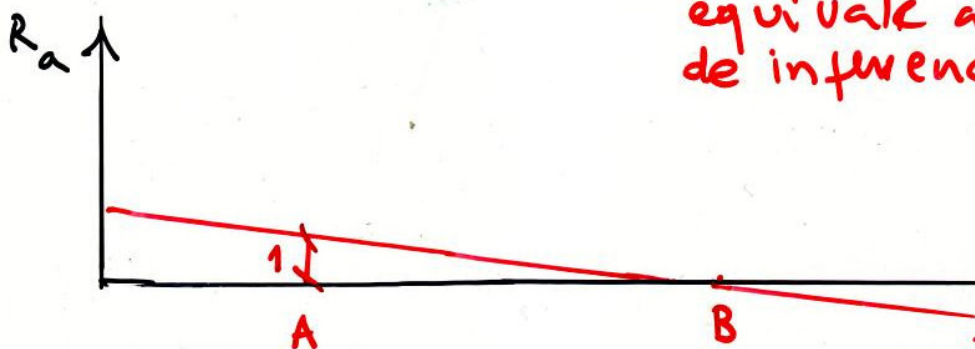
Si  $\delta_s = 1 \Rightarrow$  desplazamiento virtual de la reacción  $R_a$  es unitaria

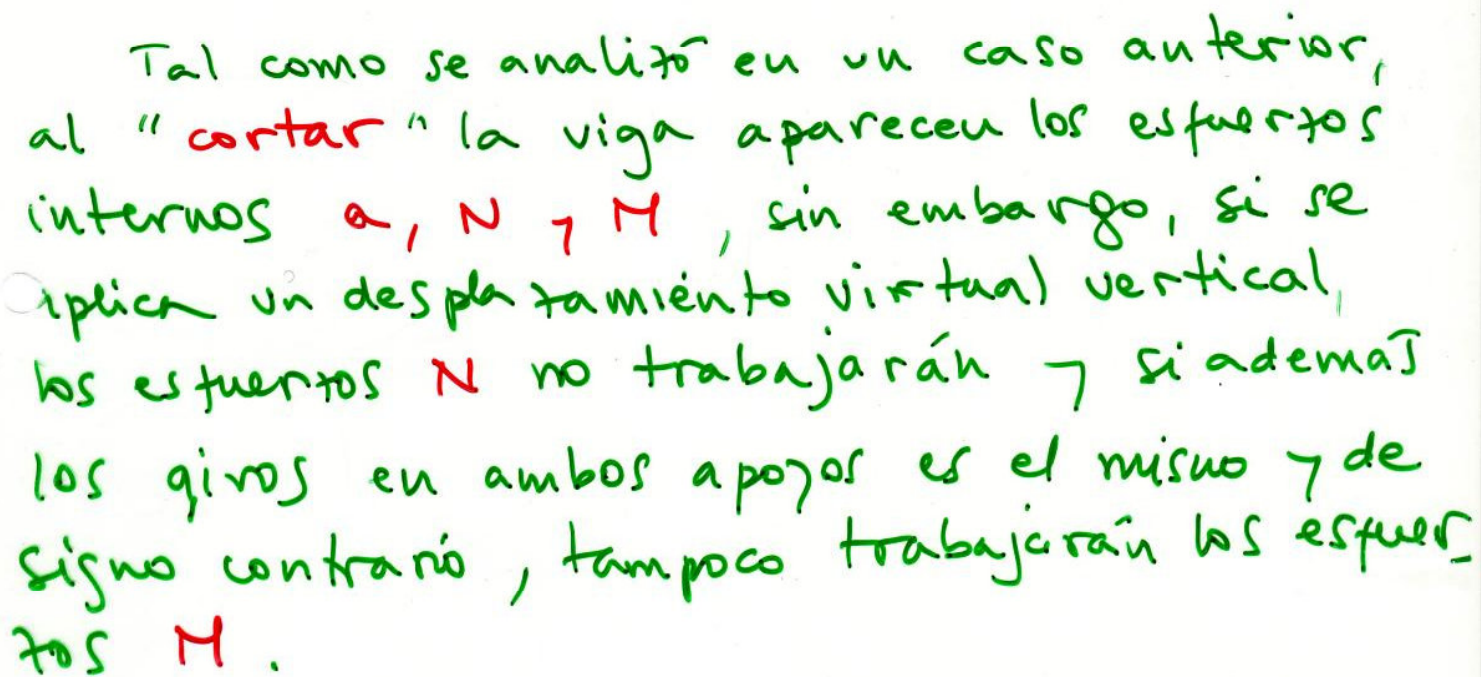
$P = 1 \Rightarrow$  acción unitaria

$$\Rightarrow -R_a \cdot \delta_s + P \cdot Y = 0$$

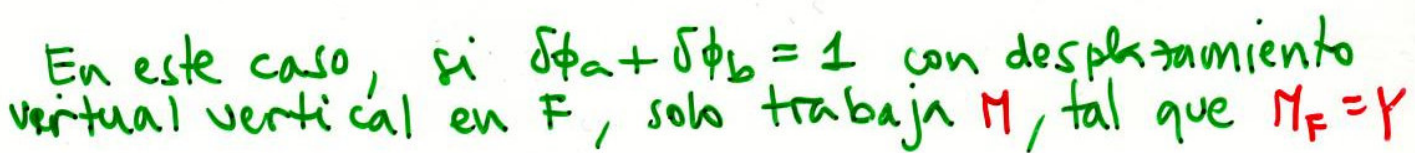
$$\Rightarrow R_a = Y$$

$\therefore$  el desplazamiento virtual de la estructura equivale al diagrama de influencia de  $R_a$ .




$$Q_E \cdot \delta_S - P_T = 0 \Rightarrow Q_E = Y$$

(c)  $M_F$

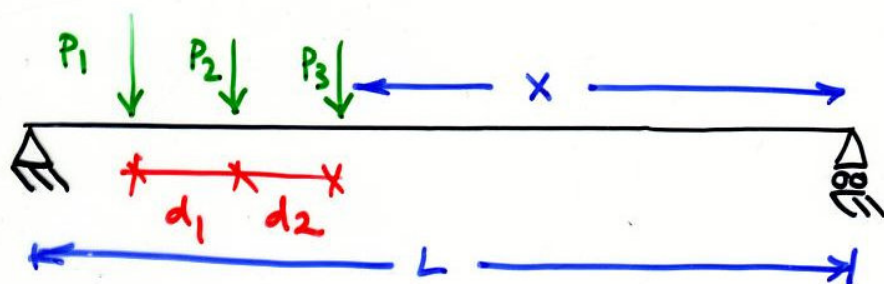




## • Máximo efecto de cargas móviles.

Cuando se desea conocer la ubicación de un sistema de cargas tal que produzca el máximo efecto, el analizar las líneas de influencia puede ser de gran utilidad, sin embargo, y dependiendo de las magnitudes de las acciones se deberán chequear las diferentes posibilidades de ubicaciones de carga para conocer la posición más desfavorable.

Ej: Consideremos un "tren de carga" y analicemos cómo influye su ubicación a la reacción  $R_a$ .



En este caso la separación de ruedas es constante.

La línea de influencia de  $R_a$  es la siguiente:



Puesto que es válido el principio de superposición la resultante total sobre  $R_a$  equivale a una composición de las acciones de cada carga.