

Si para una posición definida del tren de carga los valores de las líneas de influencia de  $R_a$  son  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$ , entonces la acción total será:

$$R_a = P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + P_3 \cdot Y_3$$

recordar que las líneas de influencia son para  $P=1$

El resultado anterior es genérico y puede aplicarse para cualquier línea de influencia.

Por ejemplo, si consideramos una efecto total  $E$  (cualquiera), producto de acciones  $P_1, P_2, \dots, P_n$  asociadas a valores de las líneas de influencia de  $E$  de valores  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , respectivamente, este será:

$$E = \sum_{i=1}^n P_i \cdot Y_i$$

.... volviendo al ejemplo anterior....

Los valores  $Y_1, Y_2$  e  $Y_3$  están relacionados:

$$\frac{1}{L} = \frac{Y_3}{x} = \frac{Y_2}{x+d_2} = \frac{Y_1}{x+d_1+d_2}, \text{ para } x \leq L-d_1-d_2$$

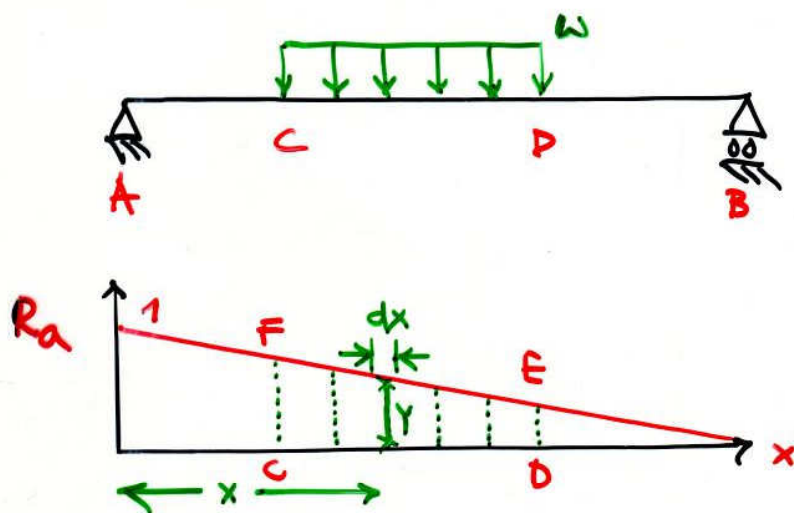
$$\therefore Y_1 > Y_2 > Y_3$$

La ubicación más desfavorable del sistema de carga dependerá de los valores de  $P_1, P_2$  y  $P_3$

Si  $P_1 > P_2 > P_3$  la sollicitación mayor se producirá cuando  $x = L - d_1 - d_2$

Si la relación anterior no se cumple el caso más desfavorable debe analizarse en forma particular, puesto puede ocurrir, por ejemplo que  $P_1 \ll P_2$  de tal forma que convenga que  $P_1$  quede fuera de la viga.

Consideremos ahora la acción de una carga distribuida  $w$ .



En este caso, para aplicar la línea de influencia de  $R_a$  determinada para una carga puntual, debemos "transformar" la carga distribuida en una serie de cargas puntuales y superponer su efecto, es decir,

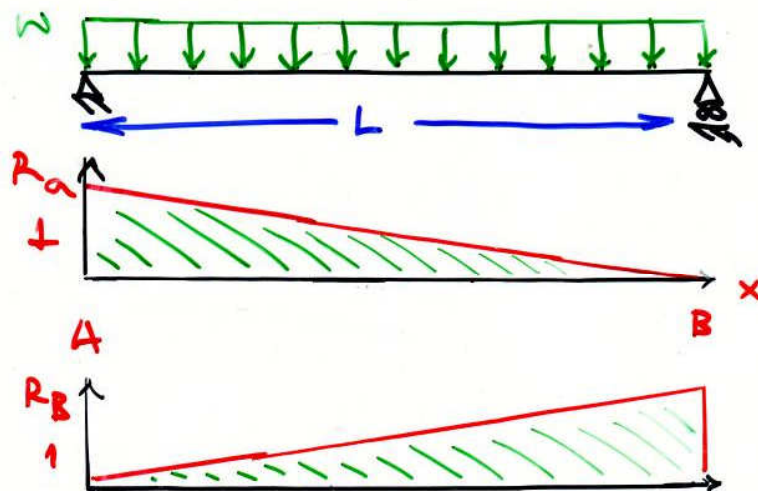
$$R_{a_T} = \sum P_i Y_i \quad \text{donde} \quad P_i = w dx$$

$$\Rightarrow R_{a_T} = \int_C^D Y \cdot w \cdot dx$$

$$\text{Si } w = \text{cte} \Rightarrow R_{a_T} = w \cdot \int_C^D Y dx = w \cdot A_{E_D}^E$$

El resultado anterior es genérico para cualquier efecto  $E$  causado por una carga móvil distribuida  $w$ .

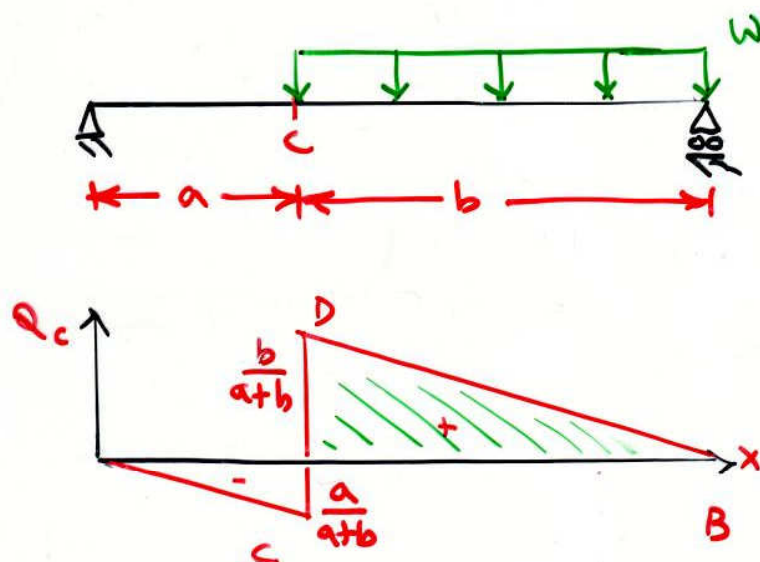
Para el caso de la reacción  $R_a$  y  $R_b$  la mayor sollicitación se produce cuando la carga está aplicada en toda la viga.



$$R_{aT} = w \cdot A_{\triangle_{AB}^C} = w \cdot \frac{L}{2}$$

$$R_{bT} = w \cdot A_{\triangle_{AB}^C} = w \cdot \frac{L}{2}$$

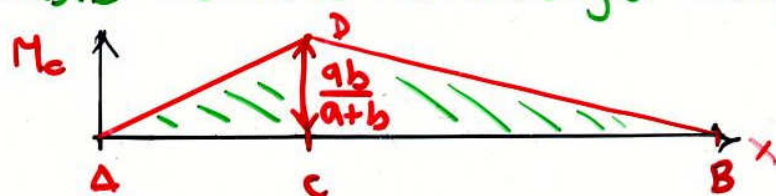
Para el caso del esfuerzo de corte en un punto  $C$ ,  $Q_c$ , este es más desfavorable cuando se carga a un solo lado de  $C$ .



$$a < b$$

$$Q_{cT} = w \cdot A_{\triangle_{CB}^D} = w \cdot \frac{b^2}{2(a+b)}$$

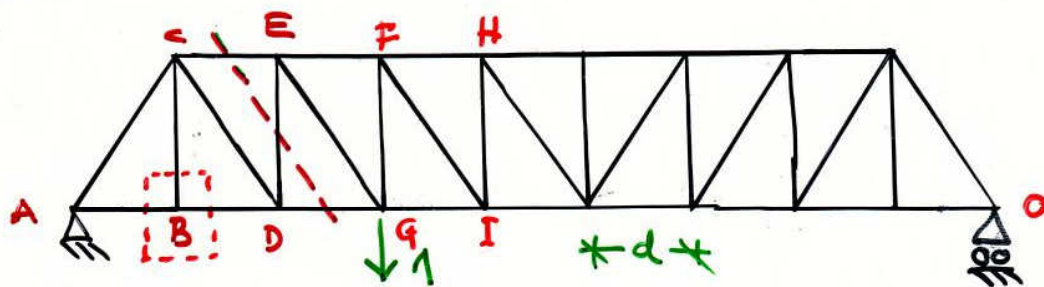
Para el esfuerzo de flexión en  $C$ ,  $M_c$ , es más desfavorable ocurre con carga completa.



$$M_{cT} = w \cdot A_{\triangle_{AB}^D} = w \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

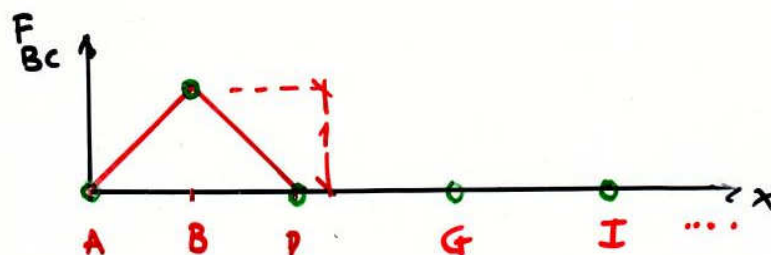
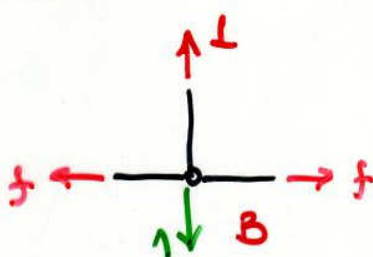
## • Líneas de influencia en enrejados

Consideremos una carga puntual vertical móvil unitaria sobre la plataforma de un enrejado.

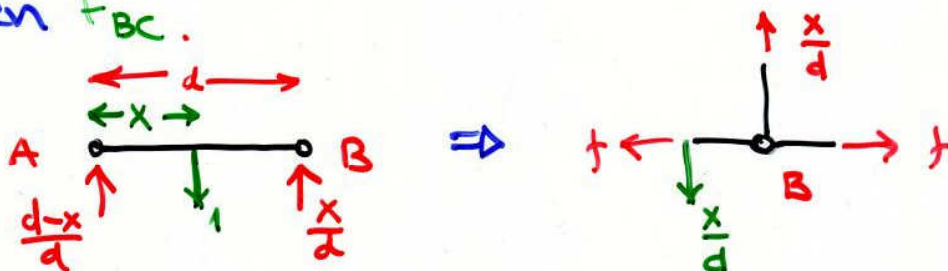


La carga se puede mover en los diferentes nodos inferiores de la estructura.

Por ejemplo, la línea de influencia de la barra **BE** será:

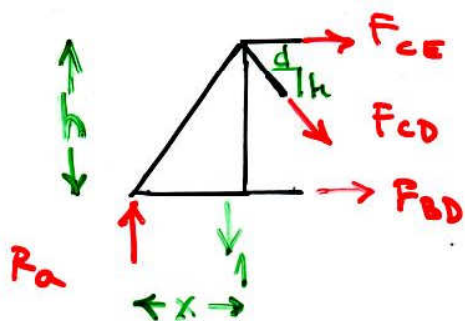


Notar que si la carga se aplica justo en B, el esfuerzo en  $F_{Bc}$  será igual a 1 y si se aplica en los otros nodos este esfuerzo valdrá 0, sin embargo, si la carga se aplica sobre la biela y no sobre el nodo se inducirá un esfuerzo de corte que influirá en  $F_{Bc}$ .



análogo para el caso de la barra **BD**

105  
Para la barra  $CD$  la línea de influencia del esfuerzo axial:



(a)  $x < d$

Determinar  $R_A$  de un diagrama de cuerpo libre de la estructura completa.

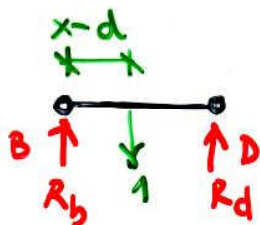
$$\sum M_O : -R_A \cdot 9d + 1 \cdot (9d - x) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{9d - x}{9d} = 1 - \frac{x}{9d}$$

Para el diagrama anterior:

Definimos  $\Delta = \sqrt{d^2 + h^2}$

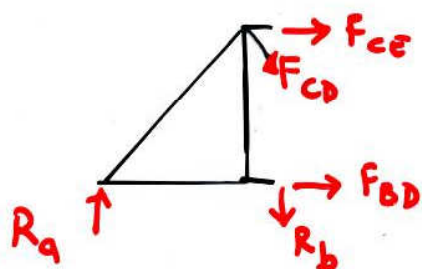
$$\Rightarrow F_{CD} \cdot \frac{h}{\Delta} + 1 - R_A = 0 \Rightarrow F_{CD} = -\frac{x}{9d} \frac{\Delta}{h}$$

(b)  $d < x < 2d$



$$\sum M_D : R_B \cdot d - 1 \cdot (d - (x - d)) = 0$$

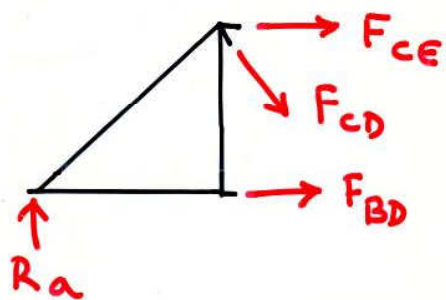
$$R_B = \frac{2d - x}{d}$$



$$\therefore F_{CD} \cdot \frac{h}{\Delta} + R_B - R_A = 0$$

$$\Rightarrow F_{CD} = \frac{\Delta}{h} \left[ \frac{9d - x}{9d} - \frac{2d - x}{d} \right] = \frac{\Delta}{h} \left[ \frac{8x}{9d} - 1 \right]$$

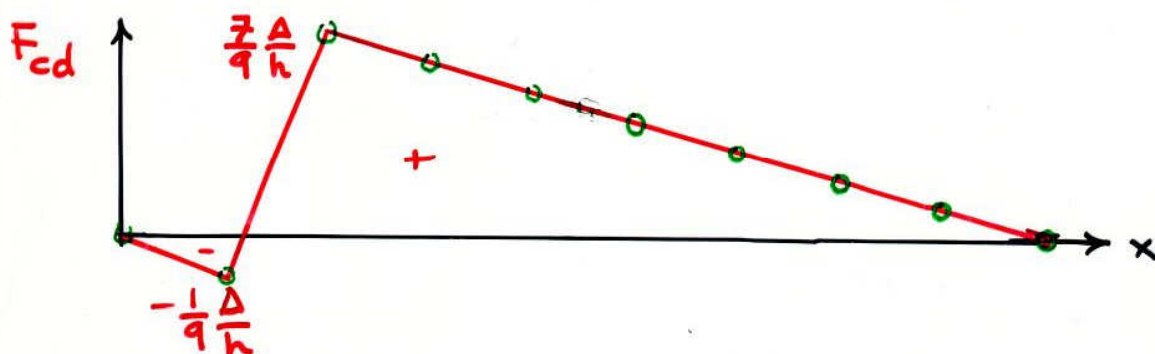
(c)  $2d < x < 9d$



En este caso la carga móvil no induce corte en las bielas del diagrama, pero si lo hace sobre la biela que esté actuando (siempre que no este sobre un nodo).

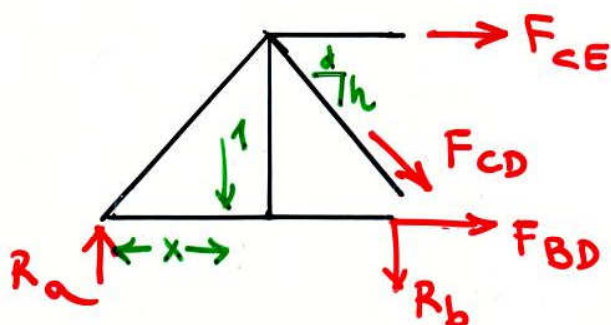
$$\therefore F_{cd} \cdot \frac{h}{\Delta} - R_a = 0 \Rightarrow F_{cd} = \frac{\Delta}{h} \left[ 1 - \frac{x}{9d} \right]$$

$\therefore$  la línea de influencia de  $F_{cd}$  es ,



Para la barra CE el análisis es similar.

(a)  $x < 2d$

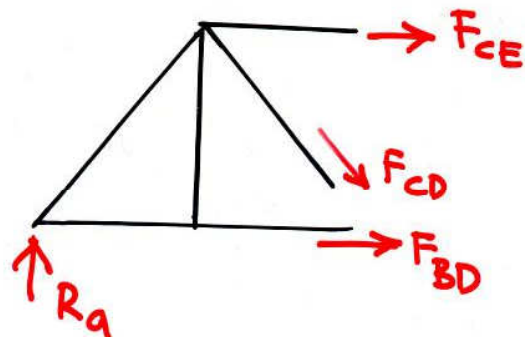


Notar que en este caso  $R_b$  puede ser cero ( $x < d$ ) o distinto de cero ( $d < x < 2d$ ), pero no interviene al cálculo de momento en D.

$$\sum M_D: F_{ce} \cdot h + R_a \cdot 2d - 1(2d-x) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CE} = \frac{1}{h} \cdot \left[ \cancel{2d} - x - \left(1 - \frac{x}{9d}\right) 2d \right] = -\frac{7}{9} \frac{x}{h}$$

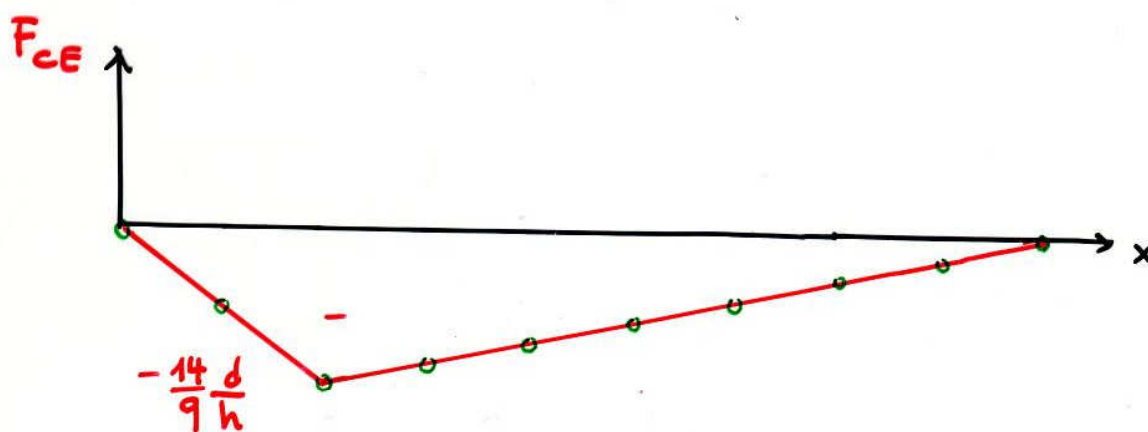
(b)  $2d < x < 9d$



$$\sum \mathcal{M}_D : F_{CE} \cdot h + R_a \cdot 2d = 0 \Rightarrow F_{CE} = -\frac{2d}{h} \left(1 - \frac{x}{9d}\right)$$

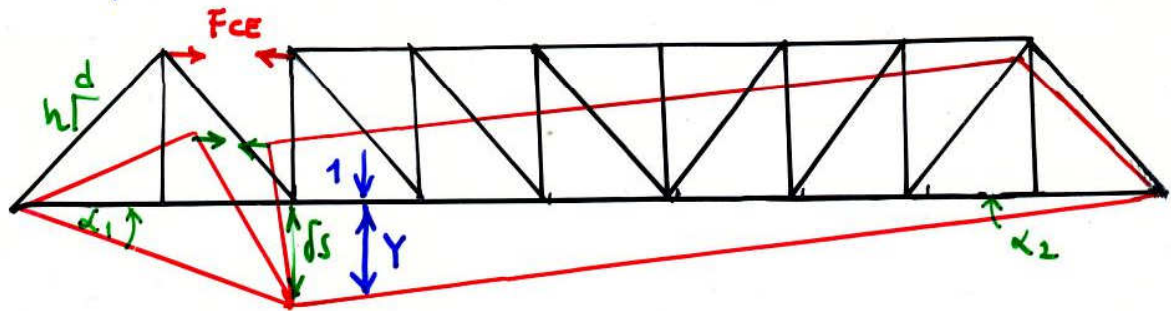
$$\therefore F_{CE} = \frac{2}{9h} (x - 9d)$$

gráficamente,



Es importante notar que en este caso la de terminación se realizó por medio de las ecuaciones de equilibrio de fuerza y momento, sin embargo, po dría aplicarse el principio de los trabajos virtuales eligiendo los desplazamientos virtuales que sean necesarios.

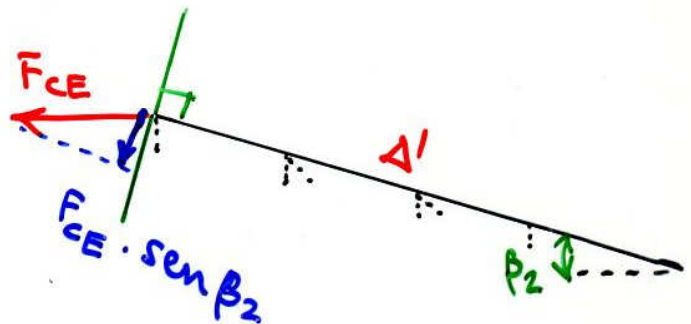
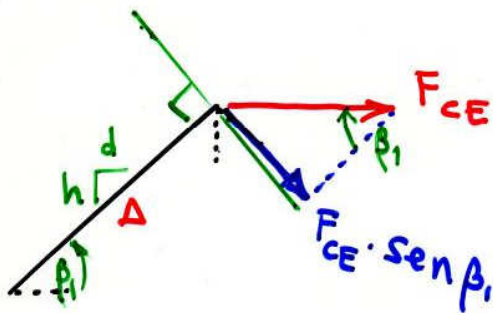
Por ejemplo, encontremos la línea de influencia de  $F_{CE}$  por medio de los trabajos virtuales.



Suponiendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pequeños,

$$\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \alpha_1 = \frac{\delta s}{2d}$$

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \alpha_2 = \frac{\delta s}{7d}$$



Además,  $\sin \beta_1 = \frac{h}{\Delta}$  y  $\sin \beta_2 = \frac{h}{\Delta'}$

$$\therefore \delta W = F_{CE} \cdot \sin \beta_1 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta + F_{CE} \cdot \sin \beta_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta' + 1 \cdot \delta s = 0$$

$$\Rightarrow F_{CE} \cdot \left[ \frac{h}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \frac{\delta s}{2d} + \frac{h}{\Delta'} \cdot \Delta' \cdot \frac{\delta s}{7d} \right] = -\delta s$$

$$\Rightarrow F_{CE} = -\delta s \cdot \frac{14d}{9h\delta s} \quad ; \quad s$$

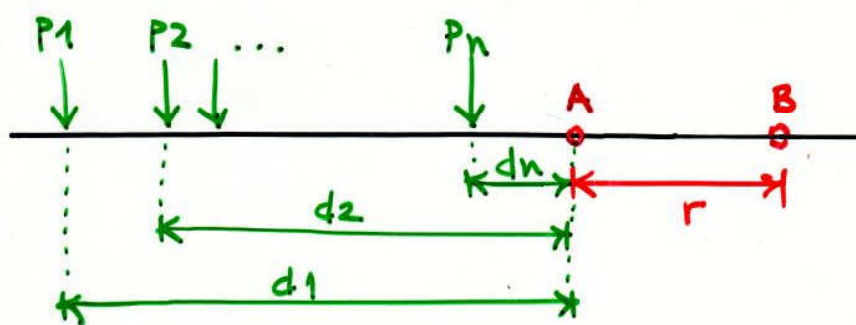
$$\text{Si } \delta s = -\frac{14d}{9h} \Rightarrow F_{CE} = Y$$

$\therefore$  El esquema del desplazamiento virtual es la línea de influencia

## Tablas de momento para cargas concentradas

En el análisis de las acciones que producen cargas móviles se ha considerado que para analizar los casos más desfavorables había que **tantear** las diferentes soluciones. Esto podrá ser útil o fácil de aplicar en ejemplos sencillos, con pocas cargas. En cambio, cuando existe gran número de cargas puntuales será de utilidad el construir tablas con los momentos que generen combinaciones de las cargas.

Consideremos el siguiente sistema de cargas.



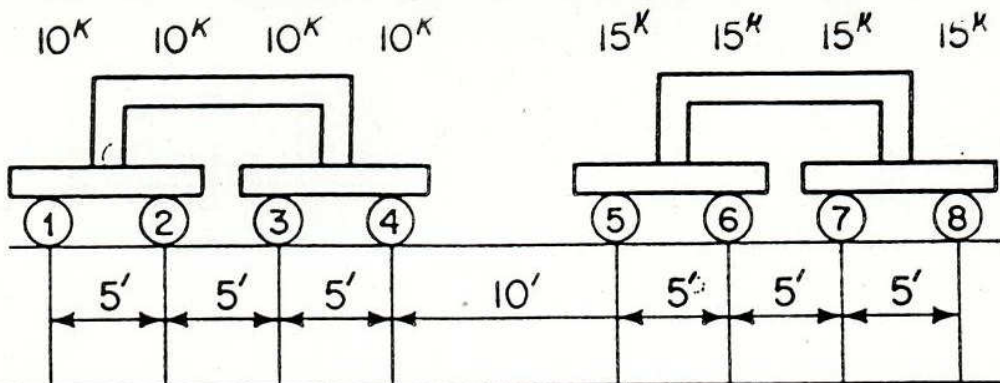
El momento total generado por las cargas en el punto A es:

$$M_A = P_1 \cdot d_1 + P_2 \cdot d_2 + \dots + P_n d_n = \sum_{i=1}^n P_i d_i$$

Por otra parte, el momento generado en B es:

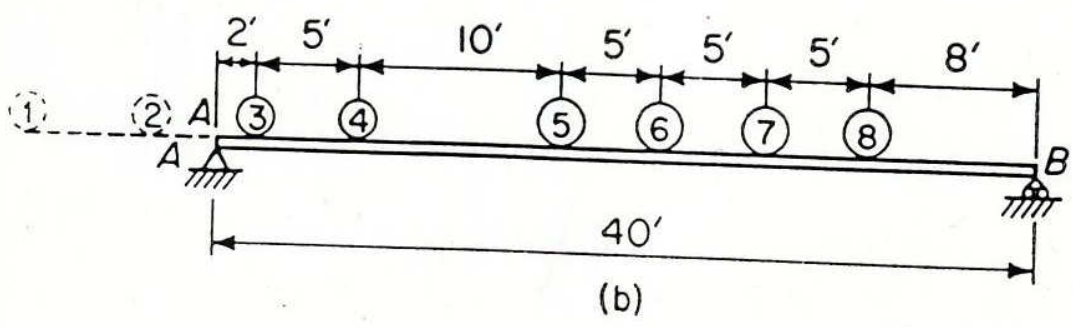
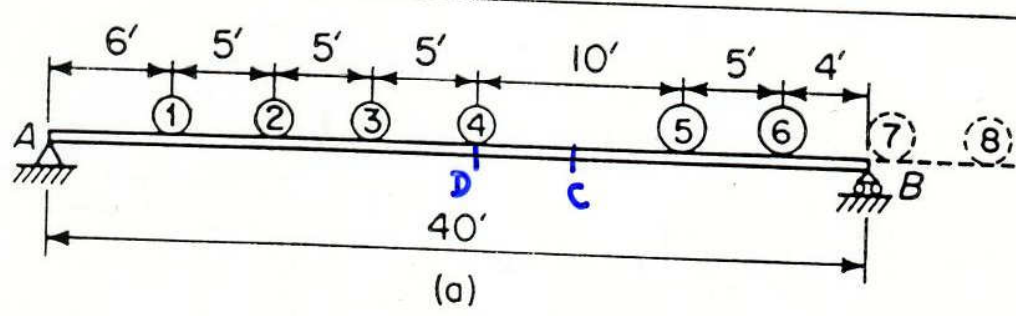
$$\begin{aligned} M_B &= P_1 (d_1 + r) + P_2 (d_2 + r) + \dots + P_n (d_n + r) \\ &= P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_n d_n + r \cdot (P_1 + P_2 + \dots + P_n) \\ &= M_A + \sum P_i \cdot r \end{aligned}$$

Es decir  $M_B$  equivale al momento  $M_A$  más la traslación de todas las cargas una magnitud  $r$ .



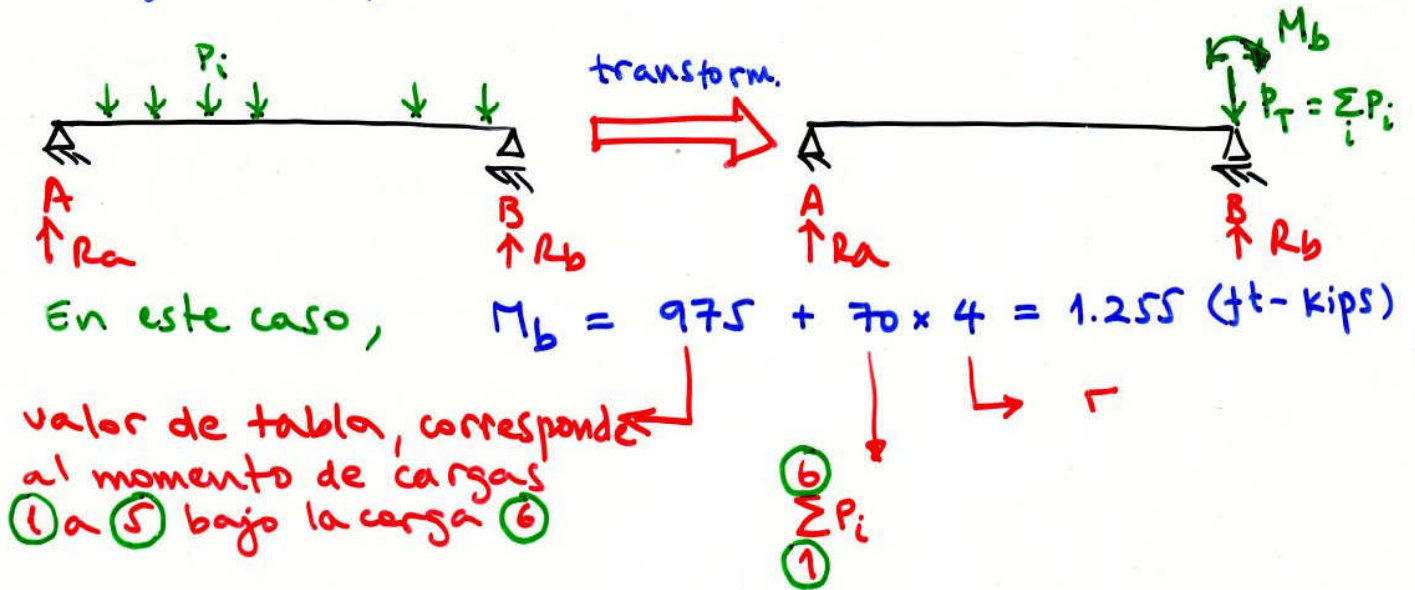
Spacings (ft)		0	5	10	15	25	30	35	40	<i>L to R</i>	
		40	35	30	25	15	10	5	0	<i>R to L</i>	
Loads (kips)		10	20	30	40	55	70	85	100	<i>L to R</i>	
		100	90	80	70	60	45	30	15	<i>R to L</i>	
Moments (ft - k) Due to loads 8 to	2	2250	50	100	150	250	300	350	400	1	Moments (ft - k) Due to loads 1 to
	3	2200	1800	150	250	450	550	650	750	2	
	4	2100	1750	1400	300	600	750	900	1050	3	
	5	1950	1650	1350	1050	700	900	1100	1300	4	
	6	1575	1350	1125	900	450	975	1250	1525	5	
	7	1125	975	825	675	375	225	1325	1675	6	
	8	600	525	450	375	225	150	75	1750	7	

Ej.: Utilitar la tabla de momentos anterior para determinar en la figura (a) :  $R_a$ ,  $Q_c$  y  $M_D$  ; y en la figura (b) :  $R_a$  y  $R_b$ .



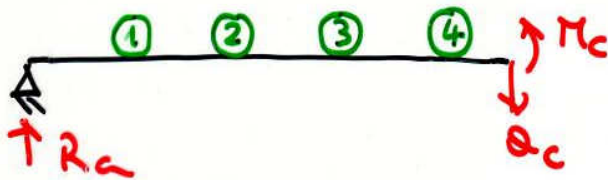
• Para la Figura (a):

Puesto que podemos reemplazar el sistema de la siguiente forma:



$$\therefore \sum M_b : R_a \cdot 40 - M_b = 0 \Rightarrow R_a = \frac{1.255}{40} = 31,8 \text{ (Kips)}$$

Para determinar el corte  $Q_c$  usamos el diagrama:



$$\Rightarrow Q_c - R_a + \sum_{(1)}^{(4)} P_i = 0 \Rightarrow Q_c = 31,8 - 40 = -8,2 \text{ k}$$

$\sum_{(1)}^{(4)} P_i$  (tabla)

Para determinar  $M_D$  usamos el diagrama:

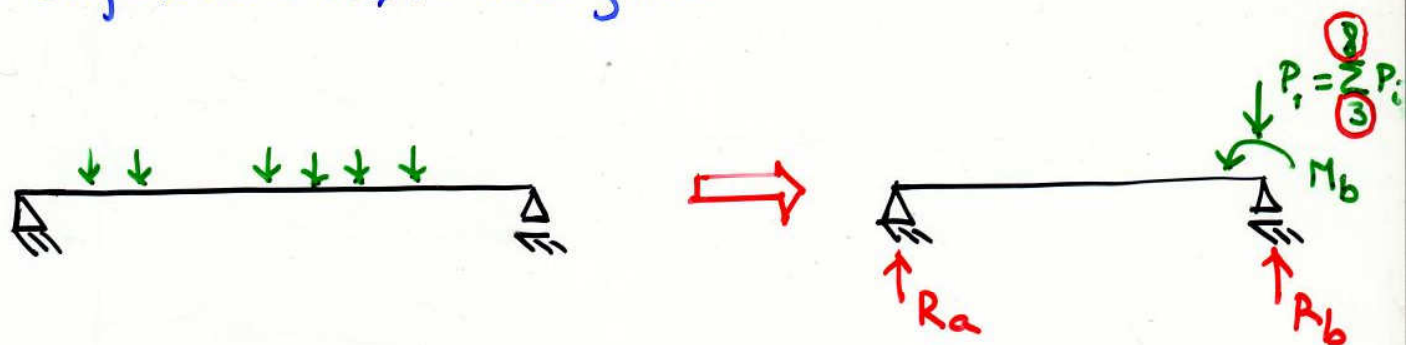


$$\Rightarrow M_D = R_a \cdot \overline{AD} - M = 31,8 \cdot (15 + 6) - 300 = 368 \text{ (ft-kips)}$$

momento de cargas (1) a (3) bajo (4) (tabla)

- Para la figura 1b)

Para determinar la reacción  $R_a$  se puede usar la siguiente metodología.



$$\Rightarrow M_b = (1.750 - 750) + (100 - 20) \cdot 8 = 1.640 \text{ (ft} \cdot \text{kips)}$$

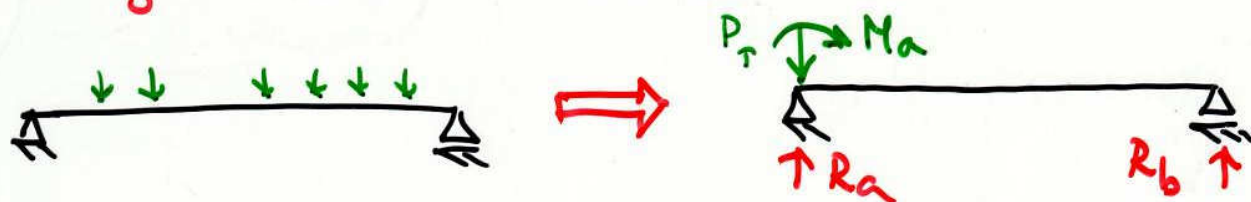
momento de  
cargas ① a ⑦  
sobre ⑧

momento de  
cargas de  
① a ② sobre  
⑧

carga de  
① a ⑧ menos  
carga de  
① a ②

$$\Sigma M_b : R_a \cdot \overline{AB} - M_b = 0 \Rightarrow R_a = \frac{1640}{40} = 41 \text{ (kips)}$$

$R_b$  se puede obtener del equilibrio del sistema, sin embargo, también se puede aplicar una metodología similar a la anterior.



$$\Rightarrow M_a = 1.400 + (100 - 20) \cdot 2 = 1.560 \text{ (ft} \cdot \text{kips)}$$

momento de cargas  
⑧ a ④ sobre ③

carga de  
① a ⑧ menos  
① a ②

$$\Sigma M_a : R_b \cdot \overline{AB} - M_a = 0 \Rightarrow R_b = \frac{1.560}{40} = 39 \text{ (kips)}$$