

Auxiliar 9 - Algoritmos Probabilistas

CC4102/CC53A - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Gonzalo Navarro Auxiliar: Miguel Romero

30 de Octubre del 2014

1. Un *conjunto independiente* de un grafo $G = (V, E)$, con $|V| = n$ y $|E| = m$ es un subconjunto V' de V sin aristas de E entre elementos de V' . El problema de encontrar un conjunto independiente de cierto tamaño es NP-completo.

Considere que V' , de tamaño r , se escoge al azar de V . Sea X la cantidad de aristas de E que conectan nodos de V' (X es una variable aleatoria).

- (a) Considere una arista de E en particular. Calcule la probabilidad de que esta arista conecte dos nodos de V' . Calcule la esperanza de X , $E(X)$.
 - (b) Diseñe un algoritmo tipo Monte Carlo que encuentre un conjunto independiente de tamaño $en/\sqrt{m}$ con probabilidad $1 - \epsilon^2$, para cualquier $0 < \epsilon < 1$. Para ello use la desigualdad de Markov: Para cualquier $a > 0$, $Pr(X \geq a) \leq E(X)/a$.
 - (c) Diseñe un algoritmo tipo Las Vegas que encuentre un conjunto independiente de tamaño $en/\sqrt{m}$ y analícelo.
2. Se tienen m conjuntos $S_1, \dots, S_m$ de t elementos cada uno. Los conjuntos no son disjuntos, y el total de elementos distintos es $n \leq mt$. Se desea colorear los elementos de rojo o azul, de modo que ningún S_i quede monocromático (todos los puntos rojos o todos azules).
 - (a) Suponiendo que $m \leq 2^{t-2}$, diseñe un algoritmo de tipo MonteCarlo que obtenga un coloreo válido con probabilidad $1/2$, en tiempo $O(n)$.
 - (b) Convierta el algoritmo en uno de tipo las Vegas y analice su costo esperado y de peor caso.
 3. Dadas matrices A, B, C de $n \times n$, queremos verificar acaso $A \cdot B = C$ eficientemente. Considere el siguiente algoritmo probabilista: Construimos un vector $\bar{r} \in \{0, 1\}^n$, donde cada coordenada es un bit escogido al azar y de manera uniforme. Si $A \cdot (B \cdot \bar{r}) = C \cdot \bar{r}$, retornamos SI; en caso contrario, retornamos NO. Analice el costo del algoritmo y demuestre que la probabilidad de error es a lo más $1/2$. Discuta como obtener una probabilidad de error $1/2^k$, para $k \geq 1$.