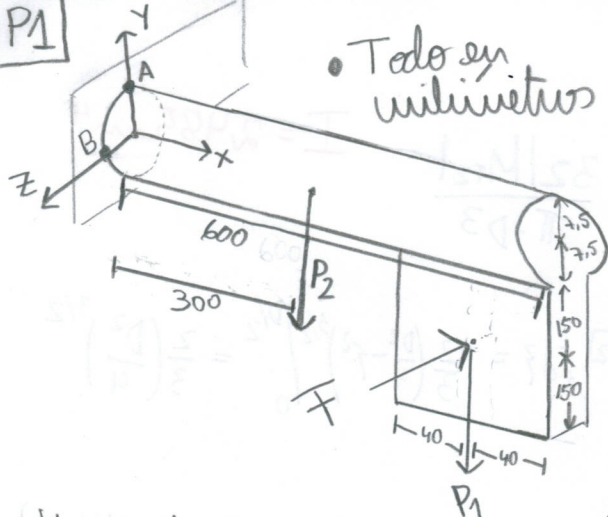


P1



• Todo en milímetros

• F, P_1 en el centro de masa.

• $P_1 = 90 \text{ Kgf}$

$P_2 = 832 \text{ Kgf}$

$F = 80 \text{ Kgf}$

Pauta P1
Control 2
2014-1
Fernando Boeza

Viendo las "reacciones" en la base del poste:

Trabajando en metros:

• Forma a: (Para reacción de momento por F).

$\vec{F} = 80 \cdot (-\hat{k}) \text{ [Kgf]}$

$\Rightarrow M_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = \underbrace{12.6 \hat{i}}_{M_{F1}} + \underbrace{44.8 \hat{j}}_{M_{F2}} \text{ [m Kgf]}$

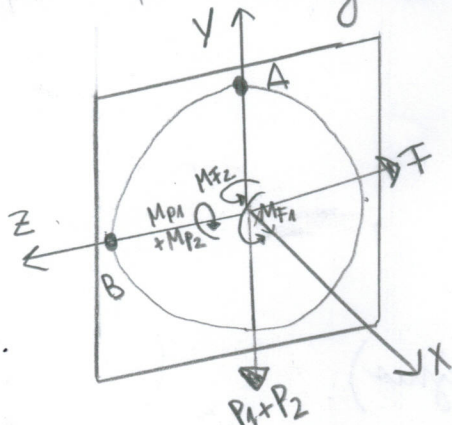
$\vec{r}_F = -0.1575 \hat{j} + 0.156 \hat{i}$

Forma b: Traslada fuerza con momentos puros.

• $M_{P2} = 0.13 \cdot P_2 \cdot (-\hat{k}) = 249.6(-\hat{k}) \text{ [m Kgf]}$

• $M_{P1} = 0.156 \cdot P_1 \cdot (-\hat{k}) = 50.4(-\hat{k})$

Por lo que, incluyendo las fuerzas, las reacciones totales en la base quedan:



Punto A:

- Torsión por M_{F1}
No hay esfuerzo de corte por $(P_2 + P_1)$
- Esfuerzo de corte por F
No hay flexión por M_{F2}
- Flexión por $M_{P1} + M_{P2}$

Punto B:

- Torsión por M_{F1}
No hay esfuerzo de corte por F
No hay flexión por $M_{P1} + M_{P2}$
- Esfuerzo de corte por $(P_1 + P_2)$
- Flexión por M_{F2}

Resolviendo para punto B:

• Torsión por M_{F1} :

$\tau = \frac{T \cdot r}{J}; J = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow \tau_{yx} = T \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{32}{\pi D^4} = \frac{T \cdot 16}{\pi D^3} \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{16 |M_{F1}|}{\pi \cdot D^3}$

• Tracción por flexión por M_{F2} :

$$\sigma = \frac{M}{I} d \Rightarrow \sigma_x = \frac{M_{F2}}{I} \frac{D}{2}; I = \frac{\pi D^4}{64} \Rightarrow \sigma_x = \frac{32 |M_{F2}|}{\pi \cdot D^3}$$

$$I = 2485 \text{ mm}^4$$

• Corte por $(P_1 + P_2)$:

$$\tau = \frac{V}{I_y \cdot t} \int_{\bar{z}}^c \bar{z} dA; \text{ para } \bar{z}=0; \bar{z} = \sqrt{\frac{D^2}{4} - r^2} \Rightarrow \int_0^{D/2} 2 \sqrt{\frac{D^2}{4} - r^2} \{dr\} = -\frac{2}{3} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)^{3/2} \Big|_0^{D/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{D^2}{4} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{|P_1 + P_2|}{I_y \cdot D} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{D^2}{4} \right)^{3/2} = \frac{16 |P_1 + P_2|}{3 \pi D^2} \checkmark$$

($t=D$)

• Resolviendo en punto A:

• Torsión por M_{F1} :

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}; J = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{|M_{F1}|}{D^4 \pi} \cdot \frac{D}{2} \cdot 32 = \frac{16 |M_{F1}|}{\pi D^3}$$

$$J = 4970.09 \text{ mm}^4$$

• Flexión por $M_{P1} + M_{P2}$:

$$\sigma = \frac{M}{I} d \Rightarrow \sigma_x = \frac{M_{P1} + M_{P2}}{I} \cdot \frac{D}{2}; I = \frac{\pi D^4}{64} \Rightarrow \sigma_x = \frac{(M_{P1} + M_{P2}) 32}{\pi D^3}$$

• Esfuerzo de corte por F:

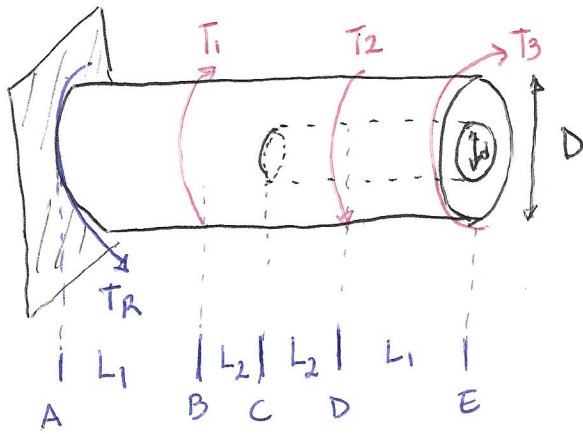
$$\tau = \frac{V}{I_y \cdot t} \int_{\bar{y}}^c \bar{y} dA; \text{ similarmente al punto B:}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{|F| \cdot 16}{3 \pi D^2}$$

• Las fuerzas entregan la dirección! (i.e. el signo).
(y momentos).



PAUTA-P2-C2



$$D = 5 \text{ cm} \quad L_1 = 25 \text{ cm} \quad G = 0,84 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$d = 2,5 \text{ cm} \quad L_2 = 15 \text{ cm}$$

$$T_1 = 210 \text{ kgf cm} \quad T_2 = 135 \text{ kgf cm}$$

$$T_3 = 375 \text{ kgf cm}$$

$$a) \quad T_R = T_1 - T_2 + T_3 \Rightarrow T_R = 450 \text{ kgf cm}$$

$$\tau_{max i} = \frac{T_i \cdot r_{max i}}{J_i}$$

$$J_1 = \frac{\pi}{32} \cdot D^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 5^4 [\text{cm}^4] = 61,36 \text{ cm}^4$$

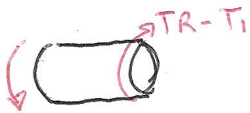
$$J_2 = \frac{\pi}{32} [D^4 - d^4] = \frac{\pi}{32} [5^4 - 2,5^4] = 57,52 \text{ cm}^4$$

Corte A-B



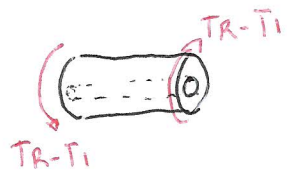
$$\tau_{max 1} = \frac{T_R \cdot D}{2 \cdot J_1} = \frac{450 \cdot 5}{2 \cdot 61,36} = 18,33 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Corte B-C



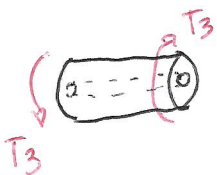
$$\tau_{max 2} = \frac{(T_R - T_1) D}{2 \cdot J_1} = \frac{240 \cdot 5}{2 \cdot 61,36} = 9,78 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Corte C-D



$$\tau_{max 3} = \frac{(T_R - T_1) D}{2 \cdot J_2} = \frac{240 \cdot 5}{2 \cdot 57,52} = 10,43 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Corte D-E



$$\tau_{max 4} = \frac{T_3 \cdot D}{2 \cdot J_2} = \frac{375 \cdot 5}{2 \cdot 57,52} = 16,30 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

El máximo esfuerzo de corte se da en la sección A-B
y vale $18,33 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

$$b) \Delta\theta_i = \frac{T_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i}$$

De la sección a) todas las secciones de la barra se torsionan en un mismo sentido, luego:

$$\Delta\theta_{AE} = \theta_E - \theta_A = \Delta\theta_{AB} + \Delta\theta_{BC} + \Delta\theta_{CD} + \Delta\theta_{DE}$$

Empotramiento

$$\Delta\theta_{AB} = \frac{T_R \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{450 \cdot 25}{10^6 \cdot 0,84 \cdot 61,36} = 2,183 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

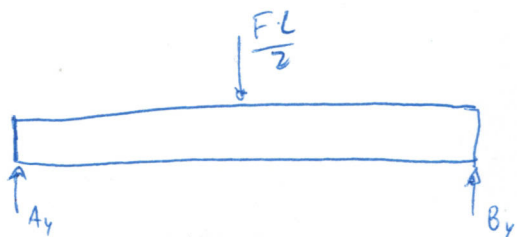
$$\Delta\theta_{BC} = \frac{(T_R - T_1) \cdot L_2}{0,84 \cdot 10^6 \cdot J_1} = \frac{240 \cdot 15}{0,84 \cdot 10^6 \cdot 61,36} = 6,985 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta_{CD} = \frac{(T_R - T_1) \cdot L_2}{G \cdot J_2} = \frac{240 \cdot 15}{0,84 \cdot 10^6 \cdot 57,52} = 7,451 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta_{DE} = \frac{T_3 \cdot L_1}{G \cdot J_2} = \frac{375 \cdot 25}{0,84 \cdot 10^6 \cdot 57,52} = 1,940 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta_{AE} = 5,567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \theta_E$$

P3



$$\sum F \Rightarrow F \cdot \frac{L}{2} = A_y + B_y$$

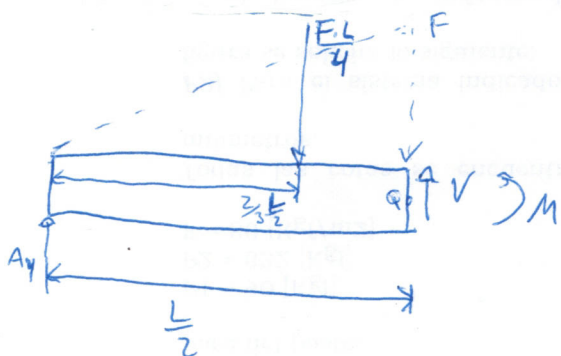
$$\sum M \Rightarrow F \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = B_y \cdot L$$

① CALCULO DE REACCIONES.

$$\Rightarrow B_y = \frac{F \cdot L}{4} \quad (1)$$

$$A_y = \frac{F \cdot L}{4}$$

② DETERMINACIÓN DE M y V:

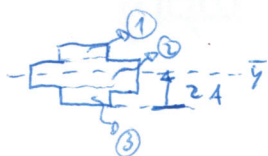


$$\sum F \Rightarrow V\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{FL}{4} + A_y = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum M \Rightarrow M\left(\frac{L}{2}\right) &= A_y \cdot \frac{L}{2} - \frac{FL}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \\ &= \frac{FL}{4} \cdot \frac{L}{2} - \frac{FL^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= \frac{FL^2}{8} - \frac{FL^2}{8 \cdot 3} = \frac{3FL^2 - FL^2}{8 \cdot 3} \end{aligned}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^2}{12} \quad (1)$$

③ EJE NEUTRO Y SEGUNDO MOMENTO DE AREA.



$$\bar{y} = 2A$$

$$I_{z1} = \frac{A^3 \cdot 2A}{12} = I_{z3}$$

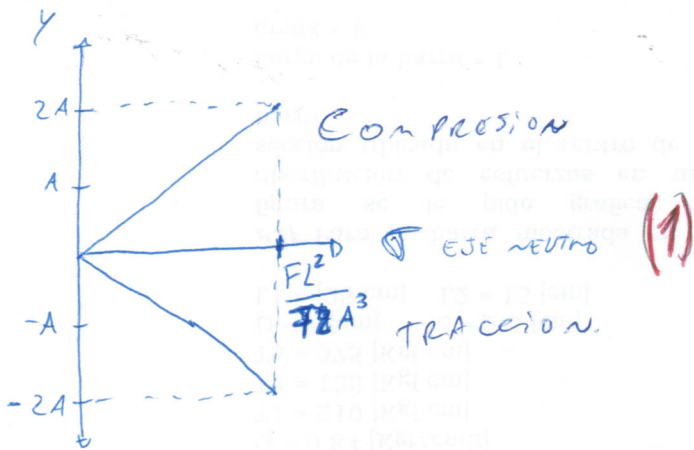
$$I_{z2} = \frac{(2A)^3 \cdot 4A}{12} = \frac{8}{3} A^4$$

$$\bar{I}_{z1} = \frac{A^4}{6} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2A^2 = \frac{A^4}{6} + \frac{9A^4}{2}$$

$$\bar{I}_{z3} = \frac{A^4}{6} + \frac{9A^4}{2}$$

$$\Rightarrow I_{z\text{TOT}} = \frac{8}{3} A^4 + \frac{A^4}{6} + \frac{A^4}{6} + 9A^4 = 12A^4 \quad (1)$$

$$\sigma\left(\frac{L}{2}\right) = - \frac{M\left(\frac{L}{2}\right)}{I_{\text{TOT}}} \cdot y = - \frac{\frac{FL^2}{12}}{12A^4} \cdot 2A = - \frac{FL^2}{72 \cdot A^3} \quad (1)$$



Control 3

ATU 49