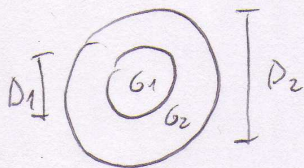


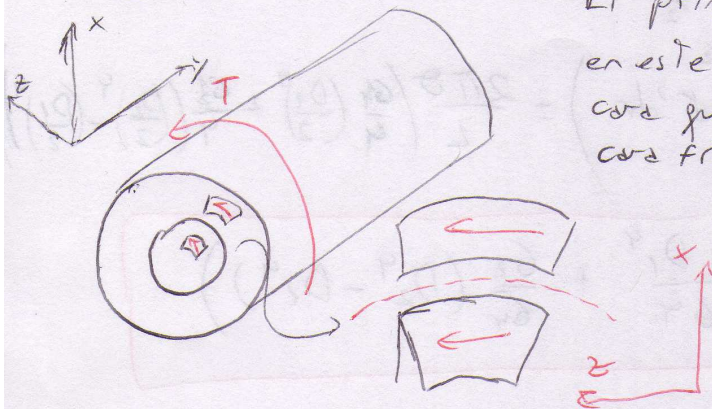
Apéndice Auxiliar N° 3

ME 3202

A.1) Deducción de ecuación de torsión para ejes cilíndricos compuestos concéntricos



$$T = \frac{2\pi\theta}{L} \left(G_1 \frac{D_1^4}{64} + \frac{G_2}{64} (D_2^4 - D_1^4) \right)$$



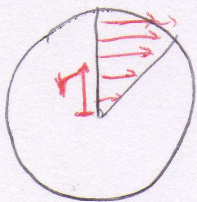
El principal problema para obtener el torque en este caso es la interfase. Sin embargo, la cara que recibe el esfuerzo de cizalle es la cara frontal y no la cara interfaseal. Por lo tanto, la ecuación para el esfuerzo de corte por torsión sigue siendo la misma:

$$\tau = \frac{G\theta}{L} r$$

• Dado que existen dos materiales, ahora $G = G(r)$, por lo que:

$$\tau = \frac{G(r)\theta}{L} r \quad ; \quad G(r) = \begin{cases} G_1 & 0 \leq r < \frac{D_1}{2} \\ G_2 & \frac{D_1}{2} \leq r < \frac{D_2}{2} \end{cases}$$

• A continuación, dado que existe equilibrio, el torque T aplicado debe ser igual al torque producido por el esfuerzo de corte τ . Ahora, el esf. de corte depende del radio, luego:



$\tau \cdot dA \Rightarrow$ Fuerza de corte por τ

$\hookrightarrow r \tau \cdot dA \Rightarrow$ Torque producido por la fuerza de corte $\tau \cdot dA$

$\therefore$ Luego, por lo dicho anteriormente (equilibrio de torques):

$\hookrightarrow$

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} r \tau dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} r^2 \frac{G(r)\theta}{L} r d\phi dr$$

ϕ es ángulo de barrido,
No tiene nada que ver con θ !

• Separamos la integral en dos tramos:

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^{D_1/2} r^3 \frac{G_1\theta}{L} d\phi dr + \int_0^{2\pi} \int_{D_1/2}^{D_2/2} r^3 \frac{G_2\theta}{L} d\phi dr$$

$$= \frac{2\pi\theta}{L} \left(\int_0^{D_1/2} G_1 r^3 dr + \int_{D_1/2}^{D_2/2} G_2 r^3 dr \right) = \frac{2\pi\theta}{L} \left(\frac{G_1}{4} \left(\frac{D_1}{2} \right)^4 + \frac{G_2}{4} \left(\frac{D_2}{2} \right)^4 - \left(\frac{D_1}{2} \right)^4 \right)$$

$$\therefore T = \frac{2\pi\theta}{L} \left(\frac{G_1 D_1^4}{64} + \frac{G_2}{64} (D_2^4 - D_1^4) \right)$$

