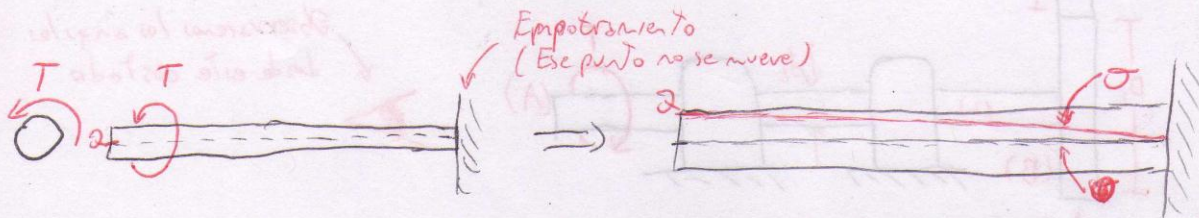


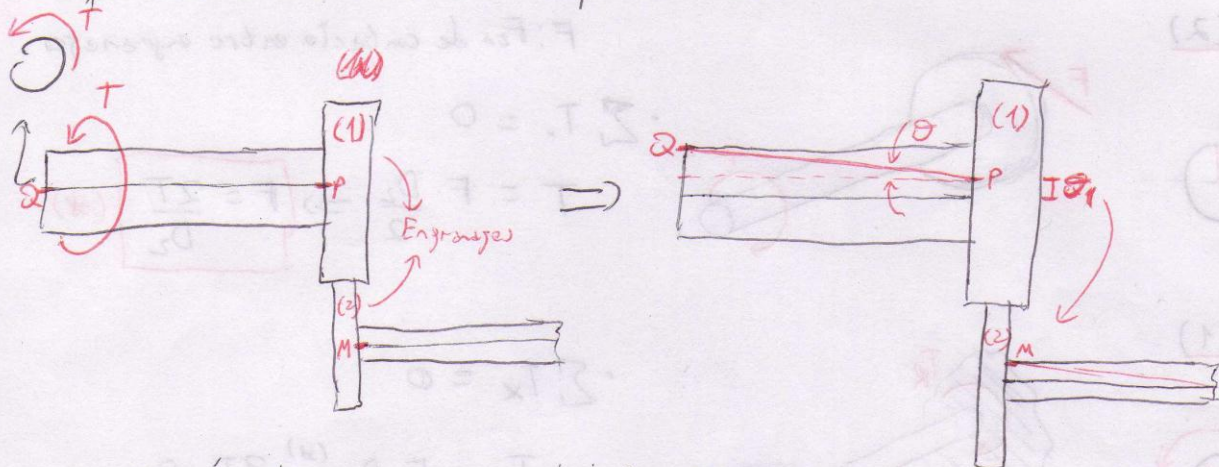
Pauta Aux. N°3 ME3202

2014*

• ¿Cómo observar los cambios de ángulo en un eje?



• ¿Y qué sucede si el otro extremo puede moverse?



θ : Ángulo que se mueve el punto Q con respecto a P

(Pero P también se mueve!)

θ_1 : Ángulo que se mueve P (Eje del engranaje (1))

$\therefore$ El ángulo Total que se mueve Q respecto al sistema, es:

$$\boxed{\theta_T = \theta + \theta_1}$$

Relacionado con el engranaje (2), que a su vez está relacionado al eje inferior

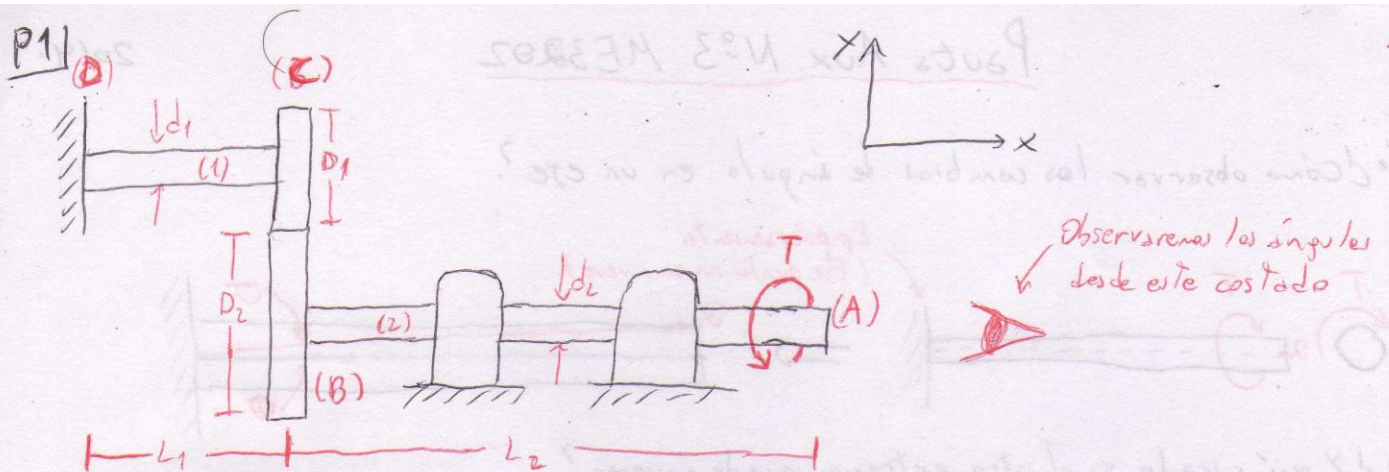
$$T = \frac{G\theta}{L} \quad ; \quad J = \frac{\pi D^4}{32} \quad ; \quad \theta = \frac{Tr}{J} \quad (\text{Sec. circular})$$

$$J = K_2 ab^3 \quad ; \quad J = \frac{T}{K_1 ab^2} \quad (b \leq a) \quad (\text{Sec. cuadrada})$$

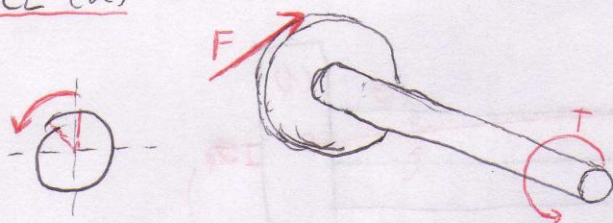
J: Momento polar de inercia [m⁴]

θ : Ángulo de torsión (lo que se mueve exclusivamente producto de la deformación)





• DCL (2)

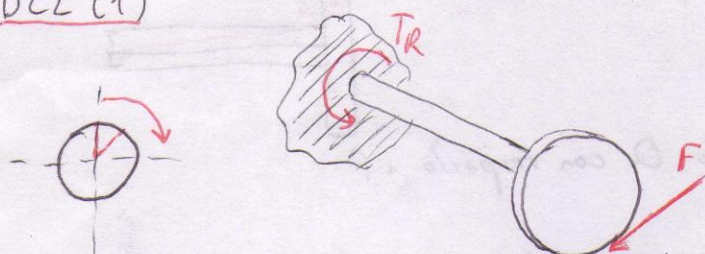


F: Fz de contacto entre engranes

$$\sum T_x = 0$$

$$T = F \cdot \frac{D_2}{2} \Rightarrow F = \frac{2T}{D_2} \quad (*)$$

• DCL (1)

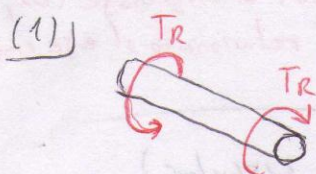


$$\sum T_x = 0$$

$$T_R = F \cdot \frac{D_1}{2} \stackrel{(*)}{=} \frac{2T}{D_2} \cdot \frac{D_1}{2}$$

$$\therefore T_R = \frac{D_1}{D_2} T = 1500 \text{ Nm}$$

* Calculamos los ángulos de torsión y totales desde (1) hacia (2)

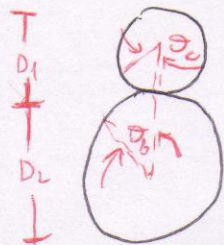


$$T_R = \frac{\theta_c G_c J_1}{L_1} \Rightarrow \theta_c = \frac{T_R \cdot L_1}{G_c J_1}$$

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 6,136 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4]$$

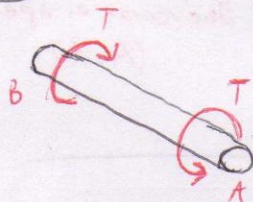
$$\Rightarrow \theta_c = \frac{1500 \text{ [Nm]} \cdot 1 \text{ [m]}}{27,6 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \cdot 6,136 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4]} = 0,0886 \text{ [rad]}$$

Relación entre engranajes $\Rightarrow$ Arcos iguales



$$D_1 \cdot \theta_C = D_2 \cdot \theta_B \Rightarrow \theta_B = \frac{D_1}{D_2} \theta_C = 0,06645 \text{ [rad]}$$

(2)



θ_{BA} : Ángulo de torsión de barra BA

$$\theta_{BA} = \frac{T \cdot L_2}{G_2 J_2} \quad \text{y} \quad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32} = 4,0212 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$\therefore \theta_{BA} = \frac{2000 \text{ [N}\cdot\text{m}] \cdot 2 \text{ [m]}}{83 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 4,0212 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}} = 0,0119 \text{ [rad]}$$

$\Rightarrow$ Ángulo total de torsión en A

$\Rightarrow$ Ángulo total de giro en A = Ángulo de torsión θ_{BA} + Ángulo que gira la barra completa (Ángulo de giro del engranaje B) θ_B

$$\therefore \theta_A = \theta_{BA} + \theta_B = 0,06645 + 0,0119$$

$$\theta_A = 0,07835 \text{ [rad]}$$

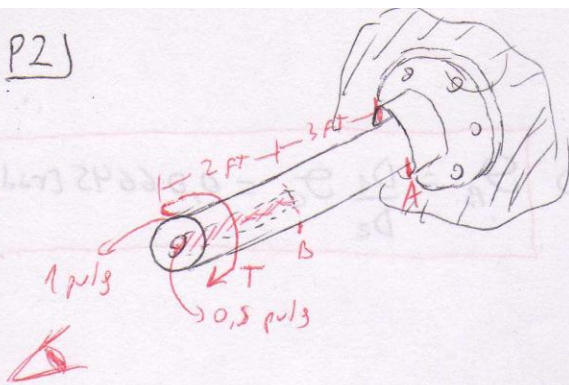
• Esfuerzo de corte máximo en cilindros: $\tau \Rightarrow \frac{\sigma}{2}$

$$\tau_{\max 1} = \frac{T \cdot \frac{d_1}{2}}{J_1} = \frac{1500 \text{ N}\cdot\text{m} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}}{6,136 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}} \Rightarrow \tau_{\max 1} = 483,844 \text{ [MPa]} = 61,115 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{T \cdot \frac{d_2}{2}}{J_2} = \frac{2000 \text{ [N}\cdot\text{m}] \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}}{4,0212 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}} \Rightarrow \tau_{\max 2} = 19,895 \text{ [MPa]}$$

P2)

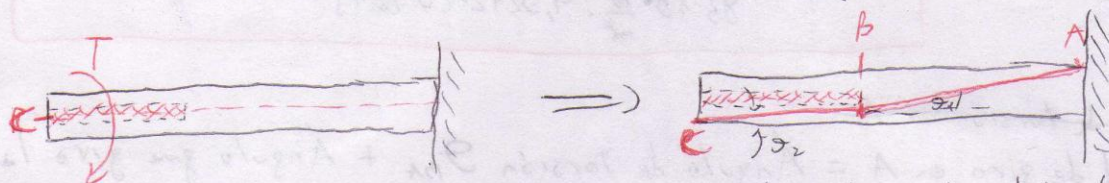
$$T = 50 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$



* Fórmula para calcular Torsión de ejes compuestos cilíndricos concéntricos

$$T = \frac{2\pi\theta}{L} \left(G_1 \cdot \frac{D_1^4}{64} + \frac{G_2}{64} (D_2^4 - D_1^4) \right) \quad \left(\text{Deducción en apéndice (A.1)} \right)$$

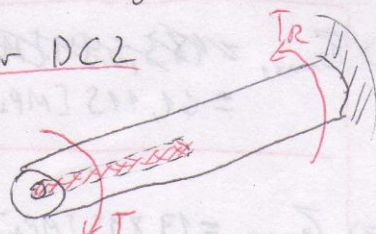
• Si observamos los dos dibujos:



* Las diferentes partes del cilindro se torcerán de forma diferente debido a la diferencia en las rigideces

∴ Calculamos el ángulo de torsión en B, luego hay que sumarlo al ángulo de torsión del segmento PB (Si necesitáramos el ángulo de torsión máximo del acero). Para el caso del latón, sólo requeriríamos el ángulo de torsión del segmento PB

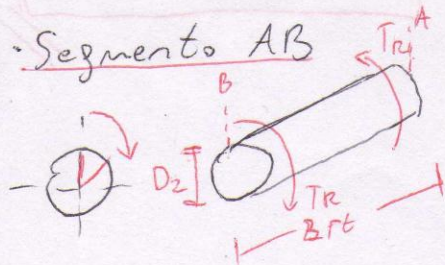
• Por DC2



$$\sum T_x = 0$$

$$T = T_r$$

• Segmento AB



$$\Rightarrow T = \frac{\theta_B G_c J_c}{L_2} \Rightarrow \theta_B = \frac{T L_2}{G_c J_c}$$

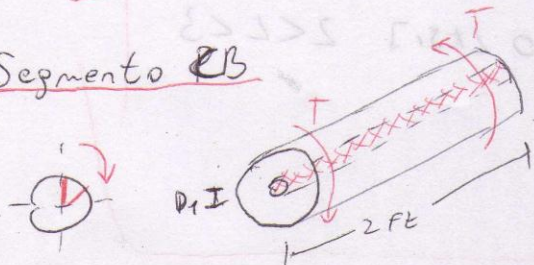
$$J_c = \frac{\pi D_2^4}{32} = \frac{\pi (1 \text{ pulg} \cdot \frac{0.0833 \text{ pie}}{1 \text{ pulg}})^4}{32}$$

→

$$\therefore J_z = 5,942 \cdot 10^{-5} [\text{ft}^4]$$

$$\therefore \theta_B = \frac{50 [\text{lb} \cdot \text{ft}] \cdot 3 [\text{ft}]}{11500 \cdot 10^3 [\text{psi}] \cdot 5,942 \cdot 10^{-5} [\text{ft}^4]} = 9,2587 [\text{rad}]$$

Segmento CB



$$T = \frac{2\pi \theta_{CB}}{L_1} \beta$$

$$1/\beta = G_1 \frac{D_1^4}{64} + \frac{G_2}{64} (D_2^4 - D_1^4)$$

$$\Rightarrow \theta_{CB} = \frac{T L_1}{2\pi \beta}$$

$$\rightarrow \beta = \frac{5600 \cdot 10^3 [\text{psi}] \cdot \left(0,51 [\text{pulg}] \cdot 0,0833 \frac{\text{ft}}{\text{pulg}}\right)^4}{64} + \frac{11500 \cdot 10^3 [\text{psi}]}{64} \left((0,0833)^4 - (0,5 \cdot 0,0833)^4\right) [\text{ft}^4]$$

$$\therefore \beta = 8,3742 [\text{lb} \cdot \text{ft}^2]$$

$$\therefore \theta_{CB} = \frac{50 [\text{lb} \cdot \text{ft}] \cdot 2 [\text{ft}]}{2\pi \cdot 8,3742 [\text{lb} \cdot \text{ft}^2]}$$

$$\Rightarrow \theta_{CB} = 1,9 [\text{rad}]$$

$$\therefore \theta_A = \theta_{CB} + \theta_B \Rightarrow \theta_A = 2,1592 [\text{rad}]$$

El esfuerzo máximo cortante para cada sección depende de su diámetro:

$$\tau_{\text{máx acero}} = \frac{T \cdot \frac{D_2}{2}}{J_{\text{ac}}}$$

$$\wedge \tau_{\text{máx latón}} = \frac{T \cdot \frac{D_2}{2}}{J_{\text{lat}}}$$

→ Para el acero tenemos las secciones, una como tubo hueco y otra como eje sólido. Para el latón sólo tenemos sección sólida. Luego:

$$\tau_{\text{máx ac}} = \frac{T \cdot \frac{D_2}{2}}{J_{\text{ac}}}$$

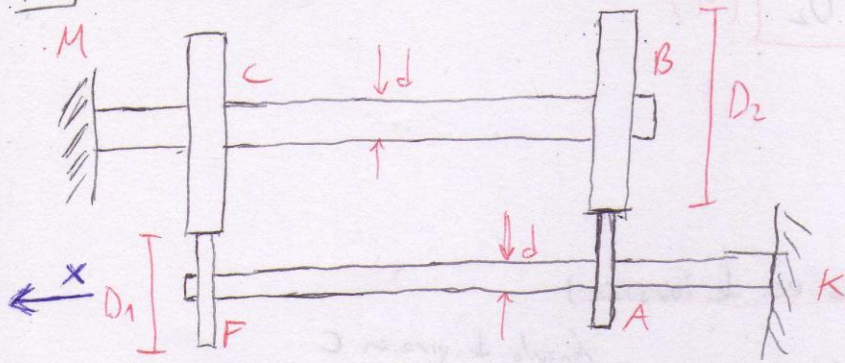
→

$$\tau_{\max \text{ acero}} \rightarrow \frac{T \cdot \frac{D_2}{2}}{J_{\text{ac}}} , \text{ donde } J_{\text{ac}} = \begin{cases} \frac{\pi}{32} (D_2^4 - D_1^4) & 0 < L < 2 \\ \frac{\pi D_2^4}{32} & 2 < L < 3 \end{cases}$$

$$\therefore \tau_{\max \text{ acero}} = \begin{cases} 469,931 \text{ [KSI]} & 0 < L < 2 \\ 440,560 \text{ [KSI]} & 2 < L < 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \tau_{\max \text{ alúmin}} = 3,524 \text{ [KSI]}$$

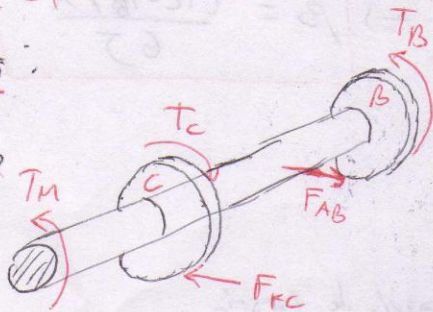
P3]



$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} \\ L &= 39 \text{ cm} \\ d &= 5 \text{ cm} \\ D_1 &= 15 \text{ cm} \\ D_2 &= 40 \text{ cm} \\ \theta &= 30^\circ \\ G &= 90 \text{ GPa} \end{aligned}$$

• DCL's:

~ MCB



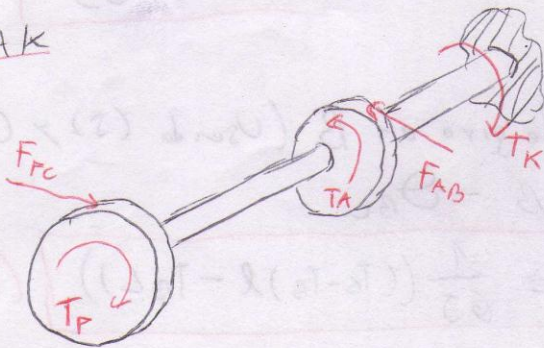
$$\sum T_x = 0$$

$$T_M = T_C - T_B$$

$$\text{donde } T_C = F_{FC} \cdot \frac{D_2}{2}$$

$$T_B = F_{AB} \cdot \frac{D_2}{2}$$

~ FAK



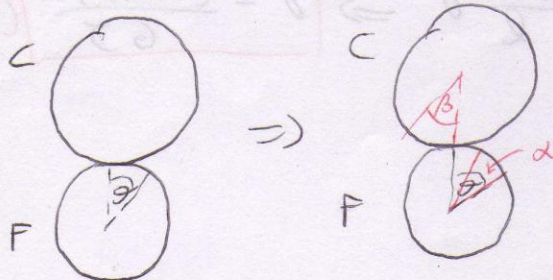
$$\sum T_x = 0$$

$$T_K = T_A - T_F$$

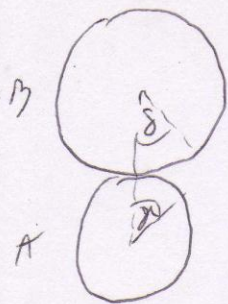
$$T_A = F_{AB} \cdot \frac{D_1}{2}$$

$$T_F = F_{FC} \cdot \frac{D_1}{2}$$

• Relaciones entre ángulos de engranajes:



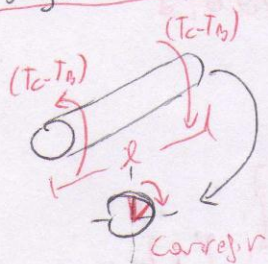
$$\alpha D_1 = \beta D_2 \quad (3)$$



$$\therefore \delta D_1 = \delta D_2 \quad (4)$$

• Cortes en los ejes (Utilizando ec. de torsión)

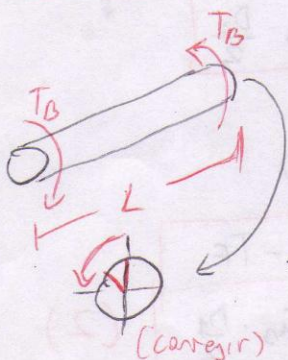
→ Segmento MC



$$(T_c - T_B) = \frac{GJ}{l} \beta \Rightarrow \beta = \frac{(T_c - T_B) l}{GJ} \quad (5)$$

↖ Ángulo de giro en C

→ Segmento CB



$$T_B = \frac{GJ}{L} \theta_{BC} \Rightarrow \theta_{BC} = \frac{T_B L}{GJ} \quad (*)$$

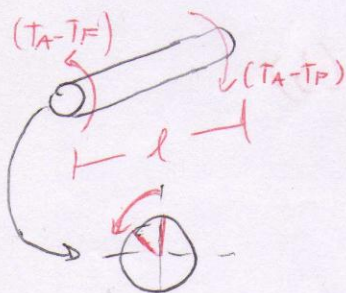
↖ Ángulo de torsión del segmento CB

∴ Ángulo total de giro en B (Usando (5) y (*))

$$\hookrightarrow \delta = \beta - \theta_{BC}$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{GJ} ((T_c - T_B) l - T_B L) \quad (6)$$

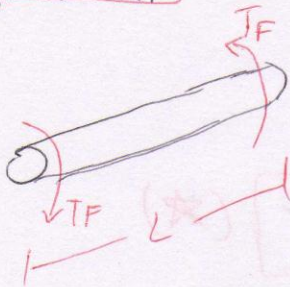
→ Segmento KA



$$(T_A - T_F) = \frac{GJ}{l} \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{(T_A - T_F) l}{GJ} \quad (7)$$

↖ Ángulo de giro en A

→ Segmento AF



$$T_F = \frac{GJ}{L} \theta_{AF}$$

↖ Ángulo de torsión del segmento AF

$$\Rightarrow \theta_{AF} = \frac{T_F L}{GJ} \quad (**)$$

∴ Ángulo total de giro en F = $\theta - \theta_{AF}$
(Usando (7) y (**))

• El ángulo total de giro en F es lo que giró antes (θ) menos lo que se restringió elásticamente (α)

$$\Rightarrow \theta - \alpha = \frac{1}{GJ} ((T_A - T_F)L - T_F L) \quad (8)$$

• Ahora iremos reemplazando ecuaciones hasta encontrar las fuerzas de contacto F_{FC} y F_{AB} .

* (7) en (4) $\Rightarrow \frac{(T_A - T_F)L}{GJ} D_1 = \delta D_2 \Rightarrow \delta = \frac{D_1}{D_2} \frac{(T_A - T_F)L}{GJ} \quad (9)$

* (9) en (6) $\Rightarrow \frac{D_1}{D_2} \frac{(T_A - T_F)L}{GJ} = \frac{1}{GJ} ((T_C - T_B)L - T_B L)$

$$\therefore (T_A - T_F)L \cdot \frac{D_1}{D_2} = (T_C L - (L+L)T_B) \quad (A)$$

* (5) en (3) $\Rightarrow \alpha D_1 = \frac{(T_C - T_B)L}{GJ} D_2 \Rightarrow \alpha = \frac{D_2}{D_1} \frac{(T_C - T_B)L}{GJ} \quad (10)$

* (10) en (8) $\Rightarrow \theta - \frac{D_2}{D_1} \frac{(T_C - T_B)L}{GJ} = \frac{1}{GJ} ((T_A - T_F)L - T_F L)$

~~$$(T_C - T_B)L \cdot \frac{D_2}{D_1} = \theta GJ - (T_A L - (L+L)T_F)$$~~

$$(T_C - T_B)L \cdot \frac{D_2}{D_1} = \theta GJ - (T_A L - (L+L)T_F) \quad (B)$$

• Reemplazando (1) y (2) en (A) y (B)

$$(A) \left(F_{AB} \cdot \frac{D_1}{2} - F_{FC} \cdot \frac{D_1}{2} \right) \frac{l D_1}{D_2} = F_{FC} \cdot \frac{D_2 l}{2} - F_{AB} \frac{D_2}{2} (l+L)$$

$$(F_{AB} - F_{FC}) l D_1^2 = (F_{FC} l - F_{AB} (l+L)) D_2^2 \quad (\star)$$

• De

$$(B) \left(F_{FC} \cdot \frac{D_2}{2} - F_{AB} \cdot \frac{D_2}{2} \right) \frac{l D_2}{D_1} = 2 G J - \left(F_{AB} \cdot \frac{D_1 l}{2} - F_{FC} \cdot \frac{D_1 (l+L)}{2} \right)$$

$$(F_{FC} - F_{AB}) l D_2^2 = 2 G J - (F_{AB} l - F_{FC} (l+L)) D_1^2 \quad (\star \star)$$

• Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones para $(\star)$ y $(\star \star)$
(Detalle de cálculo en apéndice A.2)

$$F_{FC} = \frac{2 D_1 G J [D_2^2 (l+L) - D_1^2 l] \theta}{L [l (D_2^4 - D_1^4) + D_1^2 D_2^2 (2l+L)]}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = 6,136 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$F_{AB} = \frac{2 D_1 G J (D_2^2 - D_1^2) l \theta}{L [l (D_2^4 - D_1^4) + D_1^2 D_2^2 (2l+L)]}$$

• Reemplazando valores: $F_{FC} = 26275,1 \text{ [N]}$ y $F_{AB} = 5385,58 \text{ [N]}$

• Los valores de las torsiones son: $T_A = 403,92 \text{ [N.m]}$; $T_B = 1077,12 \text{ [N.m]}$
 $T_C = 5255,02 \text{ [N.m]}$; $T_F = 1970,63 \text{ [N.m]}$

• Finalmente calculando los esf. máximos:

Eje MCB

Segmento MC: $\tau_{max} = \frac{(T_C - T_A) \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 170,22 \text{ [MPa]}$$

Segmento CB: $\tau_{max} = \frac{T_B \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 43,885 \text{ [MPa]}$$

Eje FAK

Segmento KA: $\tau_{max} = \frac{(T_A - T_F) \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 63,833 \text{ [MPa]}$$

Segmento AF: $\tau_{max} = \frac{T_F \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 80,287 \text{ [MPa]}$$