MA4006-1. Combinatoria 2014.
Profesor: José Soto.

Advertencia: Este apunte es un borrador de las clases de MA4006 Combinatoria realizadas el año 2014. Puede contener errores involuntarios, por favor informar de cualquier error de texto y/o formato al correo `jsoto@dim.uchile.cl`

III. funciones generatrices.

El concepto de función generatriz es una de las invenciones más útiles y sorprendentes en Matemáticas Discretas. De una manera informal, las funciones generatrices nos permiten aplicar herramientas analíticas (funcionales) sobre problemas de sucesiones $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
Por ejemplo a, b, c son las **sucesiones** o **secuencias** asociadas a la cardinalidad de $[n]$, al número de permutaciones de $[n]$ y al número de subconjuntos de tamaño n de un conjunto fijo de tamaño 3:

$$\begin{aligned} a &= (0,1,2,3,\dots,n,\dots) & a_n &= n,\\ b &= (1,1,2,6,\dots,n!,\dots) & b_n &= n!,\\ c &= (1,3,3,1,0,\dots) & c_n &= \binom{k}{n}. \end{aligned}$$

En el caso que la secuencia tenga sólo un número finito de valores no nulos, es costumbre cortar la sucesión.
Ej: $c = (1,3,3,1)$.

Llamamos $S = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$ al conjunto de todas las sucesiones.

[Def]**función generatriz ordinaria**. Dada una variable x, y una sucesión $a \in S$, llamamos **función generatriz ordinaria** (FGO) asociada a a a la serie formal

$$F_a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

El nombre de "función" viene de su posible mas no recomendada interpretación como funciones en x (más de esto luego) y la parte "generatriz" viene del hecho que las secuencias que usaremos típicamente cuentan algún tipo de objetos asociados a un índice $i \in \mathbb{N}$.

Obs: Normalmente NO veremos las series formales como funciones sino como elementos de un anillo especial $\mathbb{C}[[x]]$ que se obtiene al agregar a $\mathbb{C}$ una indeterminada x. El anillo de series formales, $\mathbb{C}[[x]]$ se puede ver como un espacio vectorial infinito sobre $\mathbb{C}$ cuya base canónica es $(x^0, x^1, x^2, \dots)$. En rigor, las series formales no son más que otra forma de escribir secuencias en S. Más adelante también trabajaremos en series formales a multiples variables, es decir, elementos de $\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_k]]$.

[Def] Dada una serie formal $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, denotamos por $[x^k]F(x)$ al coeficiente asociado a x^k. Dos elementos $F, G \in \mathbb{C}[[x]]$ son iguales si y solo si $[x^k]F(x) = [x^k]G[x]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

¿Por qué usamos series formales, si ya tenemos sucesiones? La gracia es que $\mathbb{C}[[x]]$ es más versatil a la hora de entender operaciones.

1. Introducción a series formales. Recurrencias

Las siguientes operaciones unarias y binarias se definen en S y en $\mathbb{C}[[x]]$. Sean a y b en S, y sus FGO asociadas F_a y F_b. Sea además $\lambda \in \mathbb{C}$.

Operacion	En secuencias	En FGO
Suma	$(a+b)_n = a_n + b_n$	$(F_a + F_b)(x) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n.$
Ponderación	$(\lambda a)_n = \lambda a_n$	$\lambda F_a(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n x^n$
Convolución/Producto	$(a \cdot b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$(F_a F_b)(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$
Escalamiento	$--$	$F_a(\lambda x) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda^n x^n.$

Dado lo anterior, tiene sentido definir ciertas secuencias especiales.
[Def] Para $\lambda \in \mathbb{C}$, llamamos

$$\underline{\lambda} = (1, \lambda, \lambda^2, \dots),$$

a la secuencia con $(\underline{\lambda})_n = \lambda^n$.
[Def] Llamamos $\Delta = (0,1)$ a la sucesión asociada a la función $F(x) = x$. Llamamos 0 a la secuencia (0) y también a su FGO asociada. Llamamos 1 a la secuencia (1) y también a su FGO asociada.

Importante La multiplicación está definida de modo que las reglas habituales de álgebra de polinomios se cumplan, por ejemplo $x^i x^j = x^{i+j}$. De hecho, cuando hay convergencia en el sentido de funciones complejas, podemos "considerar" las series formales como funciones en x.

Otras propiedades que se tienen son: Conmutatividad y asociatividad de la suma y producto. Distributividad del producto sobre la suma. Cancelación (es decir, si $F(x)G(x) = F(x)H(x)$ entonces $G(x) = H(x)$). El elemento neutro para la suma es el 0. El elemento neutro para el producto es el 1. A pesar que no evaluaremos simbólicamente $F(x)$, denotamos por conveniencia $F(0) = [x^0]F(x)$.

Proposición 1. *$F(x)^{-1}$ existe si y solo si $F(0) \neq 0$.*

Demostración. Sean $F = F_a$, $G = F_b$ para $a, b \in S$, tales que $F(x)G(x) = 1$. Entonces, $a_0 b_0 = 1$, y para todo $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$. De aquí se tiene que $b_0 = 1/a_0$ y que $b_n = \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$. □

Cuando $F(x)^{-1}$ existe, la escribimos como $1/F(x)$ sin problemas. También lo hacemos para la sucesión asociada.
Recuerdo: La cancelación vale incluso si el elemento a cancelar es no invertible.
Por ejemplo, si $x^2 F(x) = x^2 G(x)$, entonces $F(x) = G(x)$.

Antes de ver más propiedades de las FGO. Veamos mediante algunos ejemplos que sucede al multiplicar una sucesión por una sucesión finita. Sea $a \in S$.

$$(a \cdot (1,-1))_n = a_n - a_{n-1}$$
$$(a \cdot (1,-1,-1))_n = a_n - a_{n-1} - a_{n-2}.$$
$$(a \cdot (1,-2,1))_n = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Donde hemos supuesto que $a_n = 0$, para $n < 0$. De aquí se ve que si el último término no nulo de b es b_k, entonces el término n-ésimo de $(a \cdot b)$ es combinación lineal de los términos $a_n, \dots, a_{n-k}$. Lo interesante de lo anterior es que nos permite escribir de manera compacta **recurrencias** como ecuaciones.

Ejemplos:

$$\left.\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 0 \\ a_0 &= k. \end{aligned}\right\} \quad (a \cdot (1,-1)) = (k). \tag{R1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} &= 0 \\ a_0 &= k \\ a_1 &= \ell \end{aligned}\right\} \quad (a \cdot (1,-2,1)) = (k, \ell - 2k). \tag{R2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n - a_{n-1} - a_{n-2} &= m \\ a_0 &= k \\ a_1 &= \ell \end{aligned}\right\} \quad (a \cdot (1,-1,-1)) = (k, \ell - k, m, m, \dots) = (k - m, \ell - k - m) + m(\underline{1}). \tag{R3}$$

Proposición 2. *Toda recurrencia lineal para a se puede escribir como una ecuación en secuencias $ab = c$. Luego, su solución es $a = cb^{-1}$.*

Calcular el inverso de una secuencia puede llevar a resolver una nueva recurrencia. Sin embargo en ocasiones resulta ser simple.

Proposición 3. $(\underline{\lambda})^{-1} = (1, -\lambda)$. *O equivalentemente* $\frac{1}{1-\lambda x} = \sum_{n\geq 0} \lambda^n x^n$.

Demostración.

$$((1,-\lambda)\cdot(\underline{\lambda}))_n = (\underline{\lambda})_n - \lambda(\underline{\lambda})_{n-1} = \begin{cases} \lambda^n - \lambda^n = 0, & \text{para } n \geq 1, \\ \lambda^0 = 1, & \text{para } n = 0. \end{cases} \qquad \square$$

De aquí tenemos la solución a nuestra la recurrencia trivial (R1): $a = (k)\cdot(1,-1)^{-1} = (k)\cdot(\underline{1}) = k(\underline{1})$. También pudimos haberla resuelto usando FGO's como sigue: $F_a(x)\cdot(1-x) = k$ implica que $F_a(x) = k\sum_{n\geq 0} n^k$. Por lo cual $a_n = [x^n]F_a(x) = k$.

Veamos como resolver (R2). Es fácil ver que $(1,-2,1) = (1,-1)^2$. Y que $((1,-1)^{-2})_n = ((\underline{1})^2)_n = n+1$. Luego la segunda recurrencia tiene por solución $a = (k, \ell - 2k)\cdot(1,-1)^{-2} = (k, \ell-2k)\cdot(\underline{1}^2)$. Es decir $a_n = k(\underline{1}^2)_n + (\ell - 2k)(\underline{1}^2)_{n-1} = k(n+1) + (\ell-2k)n = k + n\ell - kn$.

Resolveremos (R3) mediante FGO. Sabemos que

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \frac{1}{(1-x-x^2)}\left(k - m + (\ell - k - m)x + m\sum_{n\geq 0} x^n\right) \\ &= \frac{1}{1-x-x^2}\left(k - m + (\ell-k-m)x + m/(1-x)\right) \\ &= \frac{A + Bx + Cx^2}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-x)}, \end{aligned}$$

donde A, B, C son constantes en $\mathbb{C}$ y $(1-\alpha x)(1-\beta x) = (1 - x - x^2)$. Es decir, α, β son las raices de $x^2 - x - 1$. ($\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Usando fracciones parciales, $F_a(x)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \frac{A'}{(1-\alpha x)} + \frac{B'}{(1-\beta x)} + \frac{C'}{1-x} \\ &= \sum_{n\geq 0}(A'\alpha^n + B'\beta^n + C')x^n. \end{aligned}$$

Con A', B', C' constantes a determinar de las condiciones iniciales.
Por ejemplo, para la sucesión de Fibonacci, $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. La FGO nos da

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}x^n.$$

De aquí uno deduce la fórmula de Binet:

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Cabe notar que la deducción de la función generatriz asociada a una recurrencia lineal no requiere mucho trabajo. No es necesario deducir la convolución como lo hicimos antes sino que podemos manipular la ecuación formalmente.
Por ejemplo, para la recurrencia $a_n = Ca_{n-1} + Da_{n-2} + E$, podemos escribir la FGO de a como sigue

$$
\begin{aligned}
F_a(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2}(Ca_{n-1} + Da_{n-2} + E)x^n \\
&= a_0 + a_1 x + Cx\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} + Dx^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2} + E\sum_{n\geq 2} x^n \\
&= a_0 + a_1 x + Cx(F_a(x) - a_0) + Dx^2 F_a(x) + \frac{E}{1-x}.
\end{aligned}
$$

Despejando, se tiene

$$
F_a(x) = \frac{a_0 + x(a_1 - Ca_0) + E/(1-x)}{1 - Cx - Dx^2}.
$$

Usando la técnica anterior podemos resolver cualquier recurrencia lineal, en la medida que sepamos invertir polinomios (es decir, series formales con finitos términos).
Sea $a = (a_0, \dots, a_k)$ con $a_0 \neq 0$ y $F_a(x)$ su FGO (polinomio) asociado. Como $F_a(x) \in \mathbb{C}[x] \subseteq \mathbb{C}[[x]]$ (es decir es un polinomio complejo), se puede factorizar completamente en términos lineales. De hecho es más conveniente factorizarlo de la siguiente manera.

$$
F_a(x) = C(1-\lambda_1 x)^{m_1}(1-\lambda_2 x)^{m_2}\cdots(1-\lambda_s x)^{m_s},
$$

De aquí,

$$
F_a(x)^{-1} = \frac{1}{C}\prod_{j=1}^{s}(x-\lambda_j)^{-m_j} = \frac{1}{C}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{n\geq 0}\lambda_j^n x^n\right)^{m_j} = \frac{1}{C}\prod_{j=1}^{s} F_{(\underline{\lambda_j})}(x)^{m_j} = \frac{1}{C}\prod_{j=1}^{s} F_{(\underline{1})}(\lambda x)^{m_j}
$$

Es útil entonces estudiar las potencias de $F_{\underline{1}}(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$.

$$
\begin{aligned}
[x^j]\big(\sum_{n\geq 0} x^n\big)^m &= [x^j] \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{N}^m, \sum_{i=1}^m \alpha_i = j} x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_m} \\
&= |\operatorname{CD}(j,m)| = \left(\!\!\binom{m}{j}\!\!\right).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\big(\sum_{n\geq 0} x^n\big)^m = \sum_{j\geq 0}\left(\!\!\binom{m}{j}\!\!\right) x^j.
$$

En otras palabras, para $m \geq 1$,

$$
(1-x)^{-m} = \sum_{n\geq 0}\left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+m-1}{n} x^n.
$$

O bien, escalando x por -1 y usando que $\left(\!\binom{m}{n}\!\right) = \binom{-m}{n}(-1)^n$, concluimos que

$$
(1+x)^{-m} = \sum_{n\geq 0}\left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right)(-x)^n = \sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n} x^n.
$$

Esta es una generalización del teorema del binomio para exponentes negativos.

Proposición 4. *Para todo $m \in \mathbb{Z}$:*

$$(1+x)^m = \sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} x^n.$$

Sigamos nuestra discusión de FGO con un problema de caminos.
Problema. Encuentre el número de caminos en el reticulado $\mathbb{Z}^2$ con n pasos, que partan en $(0,0)$, cuyos pasos sean del tipo $N=(0,1)$, $E=(1,0)$, u $O(-1,0)$ y que no se autointersecten.

Demostración. Codifiquemos los caminos pedidos como palabras sobre $\{N,E,O\}$. Como en la dirección vertical el camino es monótono, la condición que no se autointersecte es equivalente a que la palabra no posea a EO ni a OE como factor. Sea a_n el número pedido. Sea b_n el número de palabras válidas de largo n que no empiezan por E (= a las que no empiezan por O). Condicionando en el primer símbolo, hay a_{n-1} palabras válidas de largo n que empiezan por N, hay b_{n-1} que empiezan por E y b_{n-1} que empiezan por O. Luego, para $n \geq 1$,

$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}.$$

Además, por un razonamiento análogo, para $n \geq 1$,

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}.$$

Luego, $a_{n-1} = b_n - b_{n-1}$. De la primera ecuación iterada dos veces tenemos que para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= (a_{n-1} + 2b_{n-1}) - (a_{n-2} + 2b_{n-2}) \\ &= a_{n-1} - a_{n-2} + 2(b_{n-1} - b_{n-2}) \\ &= a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-2} = a_{n-1} + a_{n-2}. \end{aligned}$$

Luego, a satisface la recurrencia, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$. O bien, $a(1,-2,-1) = (1,1)$. Resolviendo tenemos que

$$F_a(x) = \frac{1+x}{1-2x-x^2} = \frac{1+x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}, \text{ donde } \alpha = 1-\sqrt{2},\ \beta = 1+\sqrt{2}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \left(\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \beta^n x^n\right)(1+x) \\ &= (1+x)\sum_{n\geq 0} x^n \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \beta^{n-i} = (1+x)\sum_{n\geq 0}(x\beta)^n \sum_{i=0}^{n}(\alpha/\beta)^i \\ &= (1+x)\sum_{n\geq 0} x^n \beta^n \frac{1-(\alpha/\beta)^{n+1}}{1-\alpha/\beta} \\ &= (1+x)\sum_{n\geq 0} x^n \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} + \frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha} = \frac{\beta^n(1+\beta)+\alpha^n(1+\alpha)}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\beta^n(\sqrt{2}\beta)+\alpha^n(\sqrt{2}\alpha)}{2\sqrt{2}} = \frac{\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

□

2. Formalizando un poco más las series formales.

Como ya hemos dicho, es bastante útil trabajar con funciones generatrices debido a nuestra experiencia con series de potencias (A posteriori, sería más adecuado didácticamente primero aprender a usar series y polinomios formales y luego trabajar con funciones seriales o funciones polinomiales). Por ejemplo, podemos definir la serie formal

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Y deducir que exp satisface que $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. En efecto en $\mathbb{C}[[x]]$,

$$[x^n]\exp(x)\exp(-x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} = \frac{(1-1)^n}{n!} = \delta_{0,n}$$

que se prueba ¡mediante el teorema del binomio!
Así uno está "tentado" a usar todo lo que sabe de series de potencias convergentes y aplicarlo aquí. Sin embargo, hay que ser cuidadoso como lo muestra el siguiente ejemplo.
Ejemplo: La identidad

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)^n}{n!} = e\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

que uno reconoce como $e^{x+1} = e^x \cdot e$, no tiene sentido en $\mathbb{C}[[x]]$, pues $\sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)^n}{n!} \notin \mathbb{C}[[x]]$.

Para ver esto, notar que el término constante de la suma anterior es $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, cuya interpretación como número complejo requiere **conceptos de convergencia en** $\mathbb{C}$ que nosotros no usaremos (propiedades de variable compleja pueden ser útiles en algunos casos, pero para nuestros propósitos, trataremos de evitarlos).

A pesar que no usaremos convergencia en $\mathbb{C}$, necesitaremos en el futuro hablar de ciertos procesos infinitos en $\mathbb{C}[[x]]$, el más importante es que queremos **componer** series. Para esto vamos a tener que introducir un concepto muy estricto de convergencia en $\mathbb{C}[[x]]$.

[Def] La sucesión $F_i(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ **converge**[1] a $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ si para cada k, la sucesión $[x^k]F_i(x)$ es, a medida que i se va a infinito, eventualmente constante e igual a $[x^k]F(x)$. Es decir, para todo k, existe $m(k)$ tal que para todo $i \geq m(k)$, $[x^k]F_i(x) = [x^k]F(x)$. Nuestra definición de convergencia es muy estricta. Por ejemplo, $(1 + x/j)^j$ no converge a $\exp(x)$, pues para $n \geq 2$, $[x^n](1 + x/j)^j = \binom{j}{n}/j^n$ no se estabiliza (no es eventualmente constante) cuando $j \to \infty$.

Ahora que sabemos escribir sucesiones convergentes de FGO, podemos definir sumas infinitas de elementos de $\mathbb{C}[[x]]$.

[Def] Decimos que $\sum_{j\geq 0} F_j(x)$ **vale** $F(x)$, si la secuencia $\sum_{j=0}^{i} F_j(x)$ converge a $F(x)$ en $\mathbb{C}[[x]]$ cuando $i \to \infty$.
Dicho de otra forma, la suma $\sum_{j\geq 0} F_j(x)$ tiene sentido solo cuando para cada k, el coeficiente $[x^k]\sum_{j=0}^{i} F_j(x)$ es eventualmente constante a medida que i se va a infinito. Es decir, $[x^k]\sum_{j\geq 0} F_j(x) = \sum_{j\geq 0}[x^k]F_j(x)$ es en realidad una suma con un número finito de terminos no nulos.

Ejercicio 1. [Def] El orden de $F(x)$ (denotado $\mathrm{ord}(F(x))$) es el índice k más pequeño tal que $[x^k]F(x) \neq 0$. Ejemplo, $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ tiene orden 2. Notar que $\mathrm{ord}(F(x)G(x)) = \mathrm{ord}(F(x)) + \mathrm{ord}(G(x))$.

- Pruebe que $(F_i(x))_i$ converge a $F(x)$ en $\mathbb{C}[[x]]$ ssi

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{ord}(F(x) - F_i(x)) = \infty.$$

[1] Para los más topológicos o analistas: dotamos a $\mathbb{C}[[x]]$ con la topología producto de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{C}[[x]]$ donde en cada factor usamos la topología discreta de $\mathbb{C}$.

- Pruebe que $(F_i(x))_i$ converge en $\mathbb{C}[[x]]$ ssi
$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{ord}(F_{i+1}) - \operatorname{ord}(F_i) = \infty.$$
- Pruebe que $\sum_{j\geq 0} F_j(x)$ converge ssi $\lim_{j\to\infty} \operatorname{ord}(F_j(x)) = \infty$.

Ahora estamos listos para definir correctamente la composición de series como sigue.
Sean $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, y $G(0) = 0$. Definimos la composición $(F\circ G)(x) = F(G(x))$ como la suma infinita
$$\sum_{n\geq 0} a_n G(x)^n.$$
Esto es lo que uno espera. Notar que como $\operatorname{ord}(G(x)^n) = n\operatorname{ord}(G(x)) \geq n$, tenemos, por el ejercicio que $F(G(x))$ está bien definido como serie formal y por lo tanto, cada coeficiente de $F(G(x))$ se calcula mediante una suma finita.
Por ejemplo, como la serie "$G(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}$" no tiene término constante, podemos escribir
$$\exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\sum_{m\geq 1} x^m\right)^n$$
Comprobemos que los coeficientes se expresan como sumas finitas en $\mathbb{C}$:
$$[x^i]\exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{[x^i]}{n!}\left(\sum_{m\geq 1} x^m\right)^n =$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}|\operatorname{COM}(i,n)| = \sum_{n=0}^{i}\frac{\binom{i-1}{i-n}}{n!}.$$
La restricción que $G(0) = 0$ es importante para que la composición esté bien definida. Por ejemplo, ya vimos que la expresión $\exp(x+1)$ no tiene sentido pues su suma no estabiliza ni siquiera para el coeficiente asociado a $n = 0$.
Ahora que tenemos la composición. Podemos usar nuestros teoremas del binomio anteriores para decir que para todo $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $F(0) = 0$, y todo $m \in \mathbb{Z}$
$$(1 + F(x))^m = \sum_{n\geq 0}\binom{m}{n} F(x)^n,$$
Lo último que nos falta en nuestra caja de herramientas es una operación natural que tienen las series de potencias y que nosotros podemos definir en $\mathbb{C}[[x]]$ que es la **derivada formal**.
Si $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ entonces $F'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$.
Es fácil ver que tenemos las reglas habitual de derivación:
$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x).$$
$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x).$$
$$F(G(x))' = F'(G(x))G'(x).$$
Y de hecho, tenemos que cada serie formal es igual a su **serie de Taylor** en el origen, es decir
$$F(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$
Aprovechemos este momento para definir la **potencia compleja**. Vimos que para todo $m \in \mathbb{Z}$,
$$(1+x)^m = \sum_{n\geq 0}\binom{m}{n}x^n.$$

Demos un paso más y **definamos** para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(1+x)^{\lambda} = \sum_{n\geq 0} \binom{\lambda}{n} x^n. \tag{1}$$

Usando composición, esta definición se extiende a

$$(1+F(x))^{\lambda} = \sum_{n\geq 0} \binom{\lambda}{n} F(x)^n.$$

en la medida que $F(0)=0$. Notemos que,

$$((1+x)^{\lambda})' = \sum_{n\geq 1} \binom{\lambda}{n} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(\lambda)_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \lambda \sum_{n\geq 1} \frac{(\lambda-1)_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$$

y en general, la n-ésima derivada de $(1+x)^{\lambda}$ es $\binom{\lambda}{n} n!(1+x)^{\lambda-n}$.

Este es el único momento de nuestra discusión sobre $\mathbb{C}[[x]]$ en que usaremos "evaluación". Damos la siguiente propiedad cuya demostración omitimos.
Propiedad: Si $F(x)$, $G(x)$ son dos series formales en $\mathbb{C}[[x]]$ tales que, vistas como funciones satisfacen $F(x)=G(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$ en un abierto (en la topología habitual de $\mathbb{C}$) alrededor del cero. Entonces $F(x)=G(x)$ como series formales.

Ojo que la recíproca no es cierta pues existen series formales $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ que vistas como funciones **sólo convergen** para $x=0$. Un ejemplo es $\sum_{n\geq 0} n! x^n$. De la propiedad anterior se desprende que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\lambda+\mu} &= (1+x)^{\lambda}(1+x)^{\mu} \\ ((1+x)^{\lambda})^{\mu} &= (1+((1+x)^{\lambda}-1))^{\mu} = (1+x)^{\lambda\mu}\end{aligned}$$

pues ambas expresiones son válidas para $x \in \mathbb{C}$, con $|x| \leq 1$, interpretando ambos lados como sus series de Taylor.
Como corolario, tenemos que las mismas propiedades valen si reemplazamos x por cualquier serie $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $F(0)=0$ (aquí estamos usando composición).
La discusión anterior nos permite interpretar cualquier función que tenga serie de Taylor convergente en un abierto alrededor del origen como una serie formal que satisface sus mismas propiedades (en la medida que todas las expresiones involucradas estén en $\mathbb{C}[[x]]$). Así podemos definir, por ejemplo

$$\begin{aligned}L(x) := \ln(1+x) &= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = -\sum_{n\geq 1}\frac{(-x)^n}{n} \\ \operatorname{sen}(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cos(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\end{aligned}$$

y tenemos que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\ln(\exp(x)) = 1$, y $\exp(\ln(1+x)) = 1$, pero curiosamente, no podemos escribir $\ln(x)$ pues esto no está en $\mathbb{C}[[x]]$.

Usando potencias complejas podemos dar una demostración alternativa de la identidad de Chu-Vandermonde siguiente:

Proposición 5. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{n-i} = \binom{a+b}{n}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{n-i} &= [x^n]\left((\sum_{m\geq 0}\binom{\alpha}{m}x^m)(\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}x^m)\right)\\ &= [x^n]((1+x)^\alpha(1+x)^\beta)\\ &= [x^n](1+x)^{\alpha+\beta}\\ &= \binom{\alpha+\beta}{n}.\end{aligned}$$

□

2.1. Binomiales

En ocasiones es útil considerar series formales en más de una variable (es decir, trabajar en el anillo $\mathbb{C}[[x,y]]$ o en $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_k]]$, etc.)
Ya sabemos que la FGO de la secuencia $a_k = \binom{n}{k}$ es $(1+x)^k$. ¿Cuál es la FGO de $a_n = \binom{n}{k}$?
Para esto es mejor definir $b_{k,n} = \binom{n}{k}$ y trabajar con

$$\begin{aligned}A(x,y) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} b_{k,n}x^k y^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k y^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(1+x)^n y^n\\ &= \sum_{n\geq 0}((1+x)y)^n\\ &= \frac{1}{1-(1+x)y} = \frac{1}{1-y-xy}.\end{aligned}$$

Veamos que se deduce de aquí.

1. $$[x^k]A(x,y) = \sum_{n\geq 0} y^n [x^k y^n]A(x,y) = \sum_{n\geq 0} y^n\binom{n}{k}.$$

   Luego $[x^k]A(x,y)$ es la FGO que buscamos. Desarrollemos tratando de aislar x^k.

   $$\begin{aligned}A(x,y) &= \frac{1}{(1-y)-xy} = \frac{1/(1-y)}{1-xy/(1-y)}\\ &= \frac{1}{1-y}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{xy}{1-y}\right)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{1-y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^k x^k.\end{aligned}$$

   Es decir, la FGO de $a = (\binom{0}{k}, \binom{1}{k}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots)$ es

   $$[x^k]A(x,y) = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.$$

   (Notar que los términos a_n son 0 para $n < k$).

2. Un corolario interesante se obtiene evaluando $A(x,y)$ en $x = y$:

   $$\frac{1}{1-x-x^2} = A(x,x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^{n+k} = \sum_{m\geq 0} x^m \sum_{i\geq 0}\binom{m-i}{i}$$

Recordando que $\frac{x}{1-x-x^2}$ es la FGO de los números de Fibonacci tenemos que:

$$f_{m+1} = [x^m]A(x,x) = \sum_{i\geq 0} \binom{m-i}{i}.$$

2.2. Números de Catalán.

Problema:
Encontrar la única sucesión $a \in S$ que satisface $a_0 = 1$, y

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1.$$

Demostración. El lado izquierdo de la expresión anterior es igual a $(a^2)_n$. En otras palabras, la ecuación anterior es igual a $(a^2) = (\underline{1})$ o equivalentemente,

$$(F_a(x))^2 = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Luego, hay dos opciones para $F_a(x)$,

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \pm(1-x)^{-1/2} \\ &= \pm \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^n. \end{aligned}$$

Como $F_a(0) = 1$ tenemos que el signo correcto es el positivo. Es decir,

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \binom{-1/2}{n} \\ &= (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \ldots (-\frac{2n-1}{2}}{n!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} \\ &= \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)) 2^n n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}} = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}. \end{aligned}$$

□

Problema: Determine el número C_n de formas de triangular un polígono regular de $(n+2)$ lados usando $(n+1)$ diagonales que no se intersecten. Por conveniencia, defina además $C_0 = C_1 = 1$.
Lo primero que debemos hacer es encontrar una recurrencia para C_n. Sea $n \geq 1$, sea P el polígono de $n+2$ lados y sea ℓ un lado cualquiera. Cualquier triangulación deja a ℓ en un triángulo T_ℓ fijo. Al remover ℓ obtenemos dos poligonos triangulados, el "superior" de i lados y el "inferior" de j lados, con $i + j = n + 3$, es decir, $(i-2) + (j-2) = n - 1$. De aquí se tiene que

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{k\geq 0} C_k C_{n-1-k} = (C \cdot C)_{n-1}.$$

Es decir, si llamamos $F(x)$ a la FGO de C, tenemos que

$$xF(x)^2 = x \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{k\geq 0} C_k C_{n-k} = \sum_{n\geq 0} x^{n+1} C_{n+1} = -C_0 + \sum_{n\geq 0} x^n C_n = -1 + F(x).$$

Es decir, $xF^2 = F - 1$. O bien, $xF^2 - F + 1 = 0$. De aquí se tiene que

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Como $F(0) = C_0 = 1$, el signo correcto es el menos. (La expresión no es del todo corecta, pues estamos dividiendo por x. Sin embargo, al elegir el signo menos todo sale bien pues el numerador tiene orden 1. Es decir, no tiene termino constante) De aquí tenemos por el Teorema del Binomio que

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} &= \frac{-1}{2x}\sum_{n\geq 1}\binom{1/2}{n}(-4x)^n = \frac{-1}{2x}\sum_{n\geq 1}\frac{(1/2)}{n}\binom{-1/2}{n-1}(-4x)^n \\
&= \frac{-1}{4x}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{-1/2}{n}(-4x)^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n.
\end{aligned}$$

Es decir, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Los números de Catalan aparecen en todas partes. Por ejemplo cuentan las palabras sobre $\{(,)\}$ que están "bien parentizadas".

2.3. Contar con FGO. Método Simbólico

Partiremos describiendo informalmente algo que llamamos método simbólico mediante ejemplos. Más adelante daremos una descripción más detallada. En adelante, suponga que $\mathcal{T}$ representa alguna familia de estructuras (ejemplo, poligonos), que $w\colon \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ cuenta algo en las estructuras (por ejemplo, número de triangulaciones), y que $G_{\mathcal{T}}$ es la función generatriz asociada.

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} x^{w(T)} = \sum_{n\geq 0} g_n x^n = G_{\mathcal{T}}(x).$$

Regla de la suma: Si $\mathcal{T}$ puede particionarse en $\mathcal{T}_1 \cup \ldots \mathcal{T}_k$ (o bien una unión infinita), entonces

$$G_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{k} G_{\mathcal{T}_\rangle}.$$

Regla del producto: Sea w una función que cuenta algo en estructuras. Suponga que cada $T \in \mathcal{T}$ se construye de una secuencia $\mathcal{T}_1 \ldots \mathcal{T}_k$ (o bien infinita) de estructuras tal que

1. Las posibles estructuras T_i correspondientes a la i-esima selección pueden depender de elecciones pasadas pero su función generatriz no depende de las anteriores.
2. Cada estructura de $\mathcal{T}$ aparece una vez en el proceso.
3. Si T viene de la secuencia $(T_1, \ldots, T_k)$ entonces

$$w(T) = \sum_{i=1}^{k} w(T_i).$$

Entonces,

$$G_{\mathcal{T}} = \sum_{T\in\mathcal{T}} x^{w(T)} = G_1(x)\cdots G_k(x),$$

donde $G_i(x)$ es la FGO de $\mathcal{T}_i$.
Sea w una función que cuenta algo en estructuras. Suponga que cada $T \in \mathcal{T}$ se construye de una secuencia $\mathcal{T}_1 \ldots \mathcal{T}_k$ (o bien infinita) de estructuras tal que

1. Las posibles estructuras T_i correspondientes a la i-esima selección pueden depender de elecciones pasadas pero su función generatriz no depende de las anteriores.
2. Cada estructura de $\mathcal{T}$ aparece una vez en el proceso.
3. Si T viene de la secuencia $(T_1, \ldots, T_k)$ entonces

$$w(T) = \sum_{i=1}^{k} w(T_i).$$

Entonces,

$$G_{\mathcal{T}} = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{w(T)} = G_1(x) \cdots G_k(x),$$

donde $G_i(x)$ es la FGO de $\mathcal{T}_i$.
Demostremos la regla del producto por inducción en k (el caso infinito es un proceso de limite que no probaremos, pero que usaremos de todos modos). El paso inductivo es trivial (agrupe las primeras $k-1$ elecciones como 1 y aplique el teorema a las 2 restantes). Asi que solo nos resta el caso base $k = 2$. Pero esto se tiene pues

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} x^{w(T)} = \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_1} \sum_{T_2 \in \mathcal{T}_2} x^{w(T_1)+w(T_2)} = \sum_{T_1} x^{w(T_1)} \sum_{T_2} x^{w(T_2)},$$

como la suma interna es igual a G_2 aun cuando pueda depender de T_1 por hipotesis, tenemos que lo anterior es igual a $G_1(x)G_2(x)$.

El uso de estas (y otras reglas) se conoce como el método simbólico. Apliquemos el método simbólico a algo que conozcamos. Por ejemplo usemos como estructuras los subconjuntos de $[k]$, donde contamos cardinal, i.e., $\mathcal{T} = \mathcal{P}[k]$ y $w(S) = |S|$. (Es decir, queremos encontrar la FGO de $\binom{k}{\cdot}$).
Para elegir un conjunto de $\mathcal{T}$ debemos mirar los elementos de $[k]$ uno a uno y tomar una secuencia de elecciones. Así la elección i-esima es decidir entre $\emptyset$ o $\{i\}$. La unión de nuestras elecciones es nuestra estructura S final y claramente $w(S)$ sera la suma de los w de las elecciones, donde $G_i(x) = 1 + x$. Asi tenemos que la FGO para subconjuntos de $[n]$ por cardinalidad es

$$\prod_{i \in [n]} (1 + x) = (1 + x)^n.$$

Veamos algo un poco más interesante:

Árboles planos: Un árbol plano (no etiquetado) es una colección de vértices o puntos en el plano. Cada uno de ellos tiene una lista ordenada de vértices asociados llamados hijos (que puede ser vacia). Exactamente uno de ellos se llama raiz. Para ser llamado árbol plano, se debe construir de la siguiente forma:

1. Un vértice solo sin hijos es un árbol plano. Dicho vértice es su raiz.
2. Si $T_1, \ldots, T_k$ son una lista ordenada de árboles planos disjuntos con raices $r_1, \ldots, r_k$. Entonces podemos combinarlos, tomando un vértice nuevo r como raiz y dejar que su i-esimo hijo sea r_i.

Un árbol plano se llama **binario** si todos los vértices tienen 0 o 2 hijos. Un terminal es un vértice sin hijos.
¿Cuantos árboles planos binarios existen con exactamente n terminales?
¿Cuantos árboles planos existen con exactamente n vértices?

Si bien es cierto ambas preguntas se pueden resolver usando recurrencias, usemos el método simbólico:

Para la primera pregunta: Sea $B(x)$ la FGO de árboles planos binarios que cuenta el número de terminales.
Notemos que un árbol plano binario es, o bien un vértice solo (que es un terminal), o bien un vértice con dos hijos que son raices de árboles binarios. Es decir,

$$B(x) = x + B(x)^2.$$

Despejando tenemos que $B(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = xC(x)$ (el signo menos viene del hecho que $[x]B(0) = 1$). Luego, $b_n = c_{n-1}$.
Veamos la segunda pregunta: Sea $T(x)$ la función generatriz para árboles planos que cuenta el número de vértices.
Notemos que un árbol es o bien un vértice, o bien (un vértice y un árbol colgando,) o bien (un vértices y 2 árboles colgando), etc. Como estamos contando vértices, tenemos que

$$T(x) = x + xT(x) + xT(x)^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} x(T(x))^n = \frac{x}{1-T(x)}.$$

Es decir, $T(x) - T(x)^2 = x$, que es la misma ecuación para $B(x)$.
En otras palabras hay tantos árboles binarios con n terminales que árboles planos con n vértices: Exactamente C_{n-1}.
¿Puede encontrar una demostración combinatorial de este último hecho?

3. Usando el método simbólico

Una **clase combinatorial** es un conjunto finito o numerable $\mathcal{A}$, junto a una función de tamaño $w\colon \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ que satisface que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_i = \{x \in \mathcal{A}\colon w(x) = i\}$$

es finito.

La **secuencia de conteo** de $\mathcal{A}$ es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a(i) = |\mathcal{A}_i|$. La FGO

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{x\in\mathcal{A}} x^{w(a)},$$

se conoce como la FGO de la clase $\mathcal{A}$.
Dos clases especiales que usamos son la clase combinatorial neutra (tiene un solo elemento llamado ε, de peso 0), y la clase combinatorial atómica que tiene un único elemento, llamado $\bullet$, de peso 1.
El procucto de dos clases combinatoriales $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ con FGO's $A(x)$ y $B(x)$ es la clase

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{ab\colon a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\},$$

la cual tiene FGO $A(x)B(x)$ (principio del producto).
La suma de clases combinatoriales $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ (se suponen disjuntas, sino trabajamos con $\mathcal{A} \times \varepsilon_1$ y $\mathcal{A} \times \varepsilon_2$) es la clase

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B},$$

la cual tiene FGO igual a $A(x) + B(x)$. De igual modo se definen las sumas y productos infinitos (en la medida que el resultado sea una clase combinatorial).
La **secuencia** de una clase combinatorial $\mathcal{A}$ se define como

$$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) = \varepsilon + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \mathcal{A}^n.$$

Es fácil ver que $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$ es una clase combinatorial y que su FGO es $(1 - A(x))^{-1}$.

3.1. Ejemplos

Palabras de largo 1 **sobre el alfabeto** Σ**, (tamaño = largo):** Clase combinatorial Σ, con FGO, $|\Sigma|x$.

Palabras finitas sobre el alfabeto $[k]$**:** Clase combinatorial

$$\Sigma^* = \varepsilon + \Sigma + \Sigma^2 + \cdots = S(\Sigma), \text{con FGO } (1 - |\Sigma|x)^{-1}.$$

Ejemplo rebuscado: si $\Sigma = [k]$, entonces, el número de palabras de largo n sobre Σ es $[x^n](1 - kx)^{-1} = k^n$.

Problema: ¿Cuántas palabras de largo n sobre el alfabeto $[k]$ no tienen dos k consecutivos.
Sea L_k el conjunto de palabras sobre $[k]$ sin dos k consecutivos, y sea $F_k(x)$ su FGO. Partamos con el caso $k = 2$. Sea x una palabra de L_2. Si x empieza con 1 entonces $x = 1y$ con $y \in L_2$. Si x empieza con 2 (y $x \neq 2$), entonces su siguiente simbolo debe ser 1, es decir $x = 21y$ con $y \in L_2$. De aquí deducimos que

$$L_2 = \varepsilon + \{2\} + \{1\} \times L_2 + \{21\} \times L_2$$

Y luego

$$F_2(x) = 1 + x + xF_2(x) + x^2F_2(X),$$

o bien

$$F_2(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}.$$

Recordando que $\frac{1}{1-x-x^2}$ es la FGO de Fibonacci, se deduce que $[x^n]L_2(x) = [x^n](1+x)F_f(x) = f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$.
Para k general, no es un mucho más dificil. Tenemos que

$$L_k = \varepsilon + \{k\} + [k-1] \times L_k + \{k\} \times [k-1] \times L_k$$

O sea,

$$F_k(x) = 1 + x + (k-1)xF_k(x) + (k-1)x^2F_k(x),$$

o bien

$$F_k(x) = \frac{1+x}{1-(k-1)x-(k-1)x^2}$$

y la respuesta que buscamos es

$$[x^n]F_k(x) = [x^n]\frac{1+x}{1-(k-1)x-(k-1)x^2},$$

cuyo valor preciso se puede encontrar mediante fracciones parciales.

Ecuaciones en $\mathbb{N}^k$: ¿De cuántas formas se puede resolver la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

donde $x_i \in \mathcal{A}_i$?

Las soluciones pertenecen a la clase combinatorial $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \cdot \cdots \cdot \mathcal{A}_k$, luego la respuesta es simplemente $[x^n]\prod_{i=1}^k A_i(x)$, donde $A_i(x)$ es la FGO de $\mathcal{A}_i$ usando $w(x_i) = x_i$.
Ejemplos: ¿De cuantas maneras podemos resolver

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

donde x_i es par ssi i es par?
Notar que si i es par, $A_i(x) = x^0 + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$, y si i es impar entonces, $A_i(x) = x^1 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x^2}$. De aquí se tiene que

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x^{\lfloor k/2 \rfloor}}{(1-x^2)^k} = x^{\lfloor k/2 \rfloor}(1-x^2)^{-k} = x^{\lfloor k/2 \rfloor}\sum_{m\geq 0}\binom{-k}{m}(-1)^m x^{2m} \\ &= \sum_{m\geq 0}\left(\!\binom{k}{m}\!\right)x^{2m+\lfloor k/2 \rfloor}. \end{aligned}$$

Luego,

$$[x^n]A(x) = \begin{cases} \left(\!\binom{k}{\frac{n-\lfloor k/2 \rfloor}{2}}\!\right), & \text{si } \dfrac{n-\lfloor k/2 \rfloor}{2} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Ejemplo: ¿De cuantas formas podemos llenar una bolsa con n frutas si debe haber un número par de manzanas, un número múltiplo de 5 de plátanos, a lo más 4 naranjas, a lo más una frutilla, al menos tres limones y sólo estas frutas se permiten?
Resolver este problema sin FGO, (por ejemplo por inclusión-exclusión) sería muy complejo. Naturalmente, creamos una FGO para cada tipo de frutas, de modo que la FGO del problema entero sea su producto.

$$\begin{aligned}
F_m(x) &= x^0 + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \\
F_p(x) &= x^0 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1-x^5} \\
F_n(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x} \\
F_f(x) &= 1 + x \\
F_l(x) &= x^3 + x^4 + \cdots = \frac{x^3}{1-x}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x)\frac{x^3}{1-x} = \frac{x^3}{(1-x)^3} \\
&= x^3 \sum_{m\geq 0} \binom{-3}{m}(-x)^m = \sum_{m\geq 0} \left(\!\!\binom{3}{m}\!\!\right) x^{m+3}
\end{aligned}$$

Bolas no etiquetadas en cajas etiquetadas - Composiciones
¿De cuantas formas podemos repartir n bolas no etiquetadas en k cajas:?
Igual a resolver la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ con x_i libre. La fn. generatriz de la respuesta es

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum_{n\geq 0} \binom{-k}{n}(-x)^n = \sum_{n\geq 0} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) x^n.$$

¿Y si queremos sobreyectividad (sin cajas vacías)? Cada término es ahora $x + x^2 + \cdots = \frac{x}{1-x}$. Por lo que la respuesta es

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \sum_{n\geq 0} x^k \binom{-k}{n}(-x)^n = \sum_{n\geq 0} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) x^{n+k} = \sum_{n\geq k} \left(\!\!\binom{k}{n-k}\!\!\right) x^n.$$

Particiones
¿Cuántas particiones tiene el entero n? Recordemos que una partición es una solución de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$$

donde k es variable.
Otra forma de pensar en particiones es contar "cuantas veces se usa una parte con tamaño i". Es decir, si llamamos y_i al número de partes de tamaño i. Una partición es una solución de

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \cdots = n$$

con los $y_i \in \mathbb{N}$.
Notar que la FG de ky_k es $1 + x^k + x^{2k} + \cdots = \frac{1}{1-x^k}$. Con lo que tenemos que la FG. de las particiones es

$$P(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1-x^k}.$$

Ejemplo. Probar, usando FGO, que el número de particiones de n en partes impares es igual al número de particiones de n con partes distintas.

$$P_d(x) = \prod_{k\in\mathbb{N}}(1+x^k)$$

$$P_i(x) = \prod_{k \text{ impar}} \frac{1}{1-x^k} = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\dots}{(1-x)(1-x)^2(1-x)^3\dots}$$
$$= \prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1-x^{2i}}{1-x^i} = \prod_{k\in\mathbb{N}}(1+x^i) = P_d(x).$$

Usando el mismo método que antes no es difícil concluir que el número de soluciones de la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = n,$$

con $a_i \in \mathbb{N}$ números naturales dados y $x_i \in \mathbb{N}$ variables naturales es $[x^n]F(x)$, donde

$$F(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^{a_i}}.$$

4. Grafos, digrafos y estructuras etiquetadas

[Def] Sea $a \in S$ una secuencia. La función generatriz exponencial (FGE) de a es $\hat{F}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ dada por

$$\hat{F}(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!}.$$

[Def] $[x^n/n!]F(x)$ recupera $f(n)$. Esto es lo mismo que $n![x^n]F(x)$.
Por ejemplo, la FGE de $(\underline{1})$ es $\exp(x)$. La FGE de (λ) es $\exp(\lambda x)$.
Las FGE nos servirán para atacar problemas donde cada objeto a ser contado tiene cierta estructura de conjunto etiquetado. Por ejemplo

1. Contar las particiones de $[n]$.
2. Contar las permutaciones de $[n]$.
3. Contar los árboles planares cuyos vértices reciben etiquetas distintas de $[n]$

La diferencia con los problemas anteriores radica en que ahora los objetos a contar están "etiquetados" por el conjunto $[n]$. En otras palabras recibimos un conjunto de n elementos (spg, $[n]$) y le damos alguna "estructura interna" (los ordenamos, partimos, asignamos a las hojas de un árbol, etc.)
En esta sección un "objeto" de tamaño n, será una estructura arbitraria (para fijar ideas, piensen en un "digrafo", es decir, un conjunto (V,E) donde $E \subseteq V \times V$) que tiene n vértices donde se pueden poner etiquetas.
Un objeto de tamaño n está **debilmente etiquetado** si todos sus vértices reciben etiquetas distintas de $\mathbb{N}$. El objeto está **bien etiquetado** si el conjunto de etiquetas usadas es exactamente $[n]$.
Una **clase etiquetada** es una clase combinatorial que consiste de objetos bien etiquetados. Dos objetos cuyas etiquetas son distintas, también son distintos.

Hablemos un poco de grafos y su notación.

Un **digrafo** (simple) es un par $G = (V,E)$ donde $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de **arcos** y V es el conjunto de **nodos**. Todo digrafo se puede ver como una "relación binaria" sobre V donde $(v,w) \in E$ se representa como $v \to_E w$. Normalmente dibujamos un grafo como un conjunto de puntos (vértices) donde hay una flecha de v a w para todo $(v,w) \in E$.

Un **grafo** (simple) es un par $G = (V,E)$ donde $E \subseteq \binom{V}{2}$ es el conjunto de **aristas** y V es el conjunto de **vértices**. Todo grafo simple se puede ver como una "relación binaria simétrica irreflexiva" donde $\{v,w\} \in E$ se representa como $v \sim w$.

Por comodidad, escribimos $vw \in E$ (pero recordando que $vw = wv$ en este caso). Normalmente dibujamos un grafo como un conjunto de puntos (vértices) donde dos puntos v y w se unen mediante una linea si $vw \in E$.
Un paseo en un grafo (resp. digrafo) es una secuencia de vertices (resp. nodos) $v_0v_1 \dots v_k$ donde cada $v_iv_{i+1} \in E$, k es el largo del paseo. Un camino es un paseo que no repite vertices/nodos. Un ciclo es un paseo donde todos los vertices /nodos son distintos excepto v_0 y v_k que son iguales. A cada paseo asociamos el grafo/digrafo natural cuyos vertices/nodos son los que visita el paseo y sus aristas/arcos son las usadas por el paseo.

¿Cuántos grafos/digrafos (etiquetados) con $V = [n]$ existen?
Cualquier subconjunto de $\binom{[n]}{2}$ (o de V^2) nos da un grafo (digrafo), así que la respuesta es $2^{\binom{n}{2}}$ (2^{n^2}).
El problema es, en este caso más interesante sin etiguetas. Por ejemplo, si $n = 3$, hay $2^3 = 8$ grafos etiquetados diferentes. De estos 8 casos hay algunos que se "ven" igual pero están "reetiquetados". Si ignoramos las etiquetas hay solo 4 grafos no etiquetados distintos.

Si $\mathcal{A}$ es una clase etiquetada y a_n representa la cantidad de objetos (bien etiquetados) de tamaño n, entonces su FGE es

$$\hat{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n/n!.$$

En general todas (o casi todas) las clases combinatoriales etiquetadas que encontremos se pueden representar con (secuencias o conjuntos de) grafos, digrafos etiquetados con alguna propiedad. De hecho podemos "simular" grafos con digrafos poniendo arcos antiparalelos donde van las aristas asi que casi siempre es más fácil usar digrafos.

Advertencia: Los objetos sin etiquetas (o sea, de peso 0) a veces son considerados y a veces no (por ejemplo, normalmente se supone la existencia de la permutación vacía, pero no del ciclo vacío).

4.1. Algunas clases etiquetadas

1. Clase neutra: $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}$ donde $w(\varepsilon) = 0$. Su FGE es $\hat{E}(x) = x^0 = 1$.
2. Clase atómica: $Z = \{\bullet\}$ donde $w(\bullet) = 1$. Su FGE es $\hat{Z}(x) = x$.
3. Clase de permutaciones: Cada permutación se puede representar como un digrafo $\pi(1) \to \pi(2) \to \pi(3) \to \cdots \to \pi(n)$. Su FGE es $\hat{P}(x) = \sum_{n\geq 0} n!x^n/n! = \frac{1}{1-x}$.
4. Clase de urnas / conjuntos: Una urna es un conjunto donde las etiquetas son distintas pero no hay relación entre ellas. Podemos pensarlo como los grafos (o digrafos) sin aristas. Su FGE es $\hat{S}(x) = \sum_{n\geq 0} 1x^n/n! = \exp(x)$.
5. Clase de ciclos dirigidos o no dirigidos. La FGE para ciclos dirigidos es $\hat{C}(x) = \sum_{n\geq 1}(n-1)!x^n/n! = \sum_{n\geq 1} x^n/n = -\ln(1-x)$.. Si son no dirigidos es $\hat{C}_N(x) = x + x^2 + \sum_{n\geq 1}(n-1)!/2 \cdot x^n/n!$ (esto es tomando un vértice como un ciclo de largo 0).

4.2. Principios de la suma y el producto

El principio de la suma es igual que en el caso no etiquetado (es la unión disjunta). Sin embargo para el producto tenemos algunos problemas con las etiquetas. Por ejemplo si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases combinatoriales etiquetadas, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ y tratamos de "pegarlos" para obtener un par ordenado (α, β) (como lo haría el producto cartesiano), la etiqueta 1 aparecería en 2 vértices. Así que tenemos que permitir **re-etiquetar** para hacer que todo funcione.

En el caso no etiquetado, cuando tomábamos $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$, el par (α, β) era un objeto único de tamaño $w(\alpha) + w(\beta)$. (Es poner el digrafo de α al lado del digrafo de β, como unión disjunta, reconociendo en la unión quien es α y quien es β). En el caso etiquetado su "producto" generará un conjunto de objetos. Esencialmente el producto funciona como sigue: mantenemos la estructura (un par ordenado de digrafos) y generamos nuevas etiquetas que preserven el orden de las etiquetas en cada parte. Para explicarlo formalmente usamos la siguiente operacion:

Reducir etiquetas: Si γ es una estructura débilmente etiquetada con etiquetas $(e_1, e_2, \dots, e_k)$, la reducción de γ es la misma estructura pero cuyas etiquetas son cambiadas al intervalo $[n]$, manteniendo el orden relativo de las etiquetas originales. Por ejemplo, si las etiquetas son $(7, 5, 1, 4)$, al reducirlas estas se cambian a $(4, 3, 1, 2)$. Denotemos esta operacion como $\rho(\gamma)$.

Dados dos objetos bien etiquetados α y β. Su producto etiquetado $\alpha \star \beta$ es el conjunto.

$$\alpha \star \beta = \{(\alpha', \beta')\colon (\alpha', \beta') \text{ bien etiquetado y } \rho(\alpha') = \alpha, \rho(\beta') = \beta\}.$$

Ejemplo: Si α es el camino $1 \mapsto 2$ y β es el triángulo $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Entonces $\alpha \star \beta$ es un conjunto de digrafos con 5 vertices: $1 \to 2, 3 \to 4 \to 5 \to 3$; $1 \to 3, 2 \to 4 \to 5 \to 2$, etc.
¿Cuántos elementos tiene $\alpha \star \beta$? Hay $\binom{w(\alpha)+w(\beta)}{w(\alpha), w(\beta)}$. Pues de las $n = w(\alpha) + w(\beta)$ hay que elegir cuales van al objeto α (y son asignadas de manera única a sus vértices) y el resto son asignadas a β.

Producto etiquetado de clases

$$\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} (\alpha \star \beta).$$

Si a, b, c son las secuencias de conteo de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A} \star \mathcal{B}$, y $\hat{A}(x), \hat{B}(x), \hat{C}(x)$ son sus FGE, entonces:

$$c_n = \sum_{(n_1,n_2):n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1, n_2} a_{n_1} b_{n_2} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i},$$

y además

$$\hat{C}(x) = \hat{A}(x) \cdot \hat{B}(x).$$

Demostremos la ultima parte:

$$\begin{aligned}
\hat{A}(x) \cdot \hat{B}(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} x^n (\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!} \frac{b_{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{n \geq 0} x^n \binom{n}{i} \frac{a_i b_{n-i}}{n!}.
\end{aligned}$$

Nota: Si a y b son secuencias, la secuencia c con $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$ se conoce como su **convolución binomial**.

Ejemplos: Permutaciones: Una permutación de $[n]$ se puede ver como el producto de n átomos.
En otras palabras, la clase $\mathcal{P}$ de permutaciones es $1 + Z + Z \star Z + Z \star Z \star Z + \dots$, donde Z es la clase atomica. Su FGE es $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

En otras palabas, el numero de permutaciones es $[x^n/n!](1-x)^{-1} = n![x^n](1-x)^{-1} = n!$.

En general, si $\mathcal{A}$ es una clase etiquetada cualquiera con FGE $\hat{A}(x)$, la clase de sus secuencias se denota por

$$\text{Seq}(\mathcal{A}) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{A}^{\star n}.$$

Y tenemos que la FGE de $\text{Seq}(\mathcal{A})$ es $\frac{1}{1-\hat{A}(x)}$.

Para hacer cosas mas interesantes necesitamos el concepto de “construccion de conjuntos no ordenados”.
La expresión $\mathcal{A}^{\star k}$ representa el producto etiquetado de A con si mismo n veces. Cada copia de $\mathcal{A}$ es una “componente”, y sabemos quien es la primera componente, quien es la segunda, etc. Para contar secuencias de objetos donde el orden no importe necesitamos considerar la clase combinatorial

$$\text{Set}_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\star k}/R$$

donde cuocientamos por la relacion de equivalencia que identifica dos objetos si las etiquetas de uno se pueden obtener del otro “permutando componentes”.

Si $\hat{A}(x)$ es la FGE de $\mathcal{A}$, entonces la FGE de $\mathcal{A}^{\star k}$ es $\hat{A}(x)^k$ y la FGE de $\mathrm{Set}_k(\mathcal{A})$ es $\hat{A}(x)^k/k!$.
Finalmente podemos definir $\mathrm{Set}(\mathcal{A})$ como la suma de las clases $\mathrm{Set}_k(\mathcal{A})$ con $k \in \mathbb{N}$. Luego, la FGE de $\mathrm{Set}(\mathcal{A})$ es

$$\sum_{k\geq 0} \frac{A(x)^k}{k!} = \exp(A(x)).$$

(para no tener problemas formales, esto solo se puede hacer si $A(0) = 0$).

Nota: Las construcciones de conjuntos también se pueden hacer para clases no etiquetadas, de la manera obvia.

En lo que sigue, si llamamos a una clase etiquetada con una letra caligráfica, llamaremos a su secuencia de conteo con la misma letra pero en minúscula y a su FGE con la letra mayúscula correspondiente.

Ejemplos:

1. Un **emparejamiento dirigido** es la unión disjunta de caminos de largo 1 (es decir, cada nodo es o bien cabeza o bien cola de un arco). ¿Cuántos emparejamientos dirigidos etiquetados con n vertices existen?

   Sea $\mathcal{A}$ la clase combinatorial de los emparejamientos dirigidos etiquetados. Y sea $\mathcal{B}$ la clase combinatorial de un camino de largo 1. Entonces $\mathcal{A} = \mathrm{Set}(\mathcal{B})$. La FGE de $\mathcal{B}$ es $\sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{w(\beta)}/w(\beta)! = 2x^2/2! = x^2$. Luego

   $$\hat{A}(x) = \exp(\hat{B}(x)) = \exp(x^2) = \sum_{n\geq 0} x^{2n}/n! = \sum_{n\geq 0,\text{par}} x^n/(n/2)!.$$

   De aquí, el numero de emparejamientos dirigidos etiquetados es $n![x^n]\exp(x^2) = n!/(n/2)!$, donde n es par.

2. ¿Cuántos **emparejamientos no dirigidos** etiquetados con n vertices existen?

   Ahota tenemos $\hat{B}(x) = x^2/2$. Con lo cual el numero de emparejamientos es 0 si n es impar, y

   $$n![x^n]\hat{A}(x) = n![x^n]\exp(\hat{B}) = n![x^n]\exp(x^2/2) = \frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}},$$

   para n par.

   O sea, si $n = 2m$, este numero es $(2m)!/(2^m m!) = (2m-1)(2m-3)\cdots 1$. Esto se conoce como $(2m-1)!!$.

3. Otra forma de ver **permutaciones** es como "conjuntos de ciclos dirigidos". Sea $C(x) = -\ln(1-x)$ la FGE de los ciclos dirigidos. Luego la FGE de las permutaciones es $\exp(C(x)) = 1/(1-x)$, que es lo mismo que antes.

4. **Involuciones**: Una involucion es una permutacion π tal que $\pi^2 = id$. En terminos de ciclos, todos los ciclos de π deben tener largo 1 o 2. Luego la clase de involuciones corresponde a la clase de conjuntos de ciclos de largo 1 o 2 (ojo que son dirigidos).

   Sea $\hat{C}_{1,2}(x)$ la FGE de los ciclos dirigidos de largo 1 o 2, es decir $\hat{C}_{1,2}(x) = x + x^2/2$. Con esto la FGE de las involuciones no es mas que $\hat{I}(x) = \exp(x + x^2/2)$, lo cual es igual a

   $$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}(1+x/2)^k &= \sum_{k\geq 0}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{x^{k+j}}{2^j k!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{j} \frac{x^n}{2^j (n-j)!}\end{aligned}$$

   Luego, el numero de involuciones de $[n]$ es

   $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{j} \frac{n!}{2^j (n-j)!} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{n!}{2^j j!(n-2j)!}$$

5. **Desarreglos**: Son las permutaciones tal que $\pi(i) \neq i$ para todo i. Es decir, aquellas que son uniones de ciclos de largo 2 o mas. Sea $\hat{C}_{\geq 2}(x)$ la FGE de los ciclos de largo 2 o mas. Tenemos que $\hat{C}_{\geq 2}(x) = \hat{C}(x) - x = -\ln(1-x) - x$. Por lo tanto la FGE de los desarreglos es

$$\begin{aligned} \exp(-\ln(1-x) - x) &= \frac{e^{-x}}{1-x} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \cdot \sum_{n \geq 0} x^n. \end{aligned}$$

O sea,

$$\hat{D}_n = n![x^n]\hat{C}_{\geq 2}(x) = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Ejercicio 2. Encuentre una fórmula para las particiones de $[n]$ en partes de tamaño al menos 3 y a lo más 5.