Auxiliar 10: Variable Compleja y Funciones Especiales

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: Felipe Subiabre
26 de junio de 2014

P1. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de números complejos tales que $a_0 = a_1 = 1$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

b) Muestre que el radio de convergencia R de la serie de potencias $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es al menos 1.

c) Suponga que $R = \infty$. Muestre que el producto infinito

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) f(z/n)$$

converge en $\mathbb{C}$, y se anula sólo en los puntos $z = 2, 3, \ldots$ y $n \cdot z_i$, donde z_i son los ceros de f.

P2. El objetivo de este problema es mostrar que

$$\cosh(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$$

Para ello:

a) Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$z^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z^2 - 2z\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1),$$

y concluya que

$$2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + 1) = 1.$$

b) Muestre que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\left(1 + \frac{z}{2n}\right)^{2n} + \left(1 - \frac{z}{2n}\right)^{2n} = 2\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2} \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}\right).$$

c) Concluya el resultado.

P3. *a*) Sea $k \in \mathbb{C}$ con $|k| > 1$. Muestre que el producto infinito

$$P(z) = \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k^l}\right)$$

converge en $\mathbb{C}$ a un valor complejo no nulo para todo $z \neq -k^l$, con $l \in \mathbb{N}$. Pruebe que la convergencia es uniforme en cada disco $D(0, r)$, con $r > 0$.

b) Muestre que P satisface la ecuación funcional

$$P(kz) = (1 + z)P(z).$$

c) Defina $S(z) = P(z)P(1/z)(1+z)$. Muestre que $S(kz) = kzS(z)$.

d) Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ puntos distintos en $\mathbb{C}$ tales que

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$$

y sea

$$M(z) = \frac{S(a_1 z) \cdot \ldots \cdot S(a_n z)}{S(b_1 z) \cdot \ldots \cdot S(b_n z)}.$$

Muestre que $M(kz) = M(z)$.

e) ¿Qué se puede decir de la función $G(z) = M(e^z)$?