Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
6 de julio de 2014

Control 3 MA3801

Profesor: Άρης Δανιηλίδης.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. Sea $X = \mathcal{C}([0,1])$ y $N \subseteq [0,1]$ un conjunto numerable. Sea $\alpha\colon N \to (0,\infty)$ una función tal que $\sum_{n\in N} \alpha(n) < \infty$. Se define para cada $f \in X$

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sum_{n\in N} \alpha(n)|f(n)|.$$

(a) Muestre que $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ es una seminorma en X.

Solución. Es claro que $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ es positiva. Además, para $c \in \mathbb{R}$ y $f \in X$:

$$\|cf\|_{N,\alpha} = \sum_{n\in N} \alpha(n)|cf(n)| = \sum_{n\in N} \alpha(n)|c||f(n)| = |c| \sum_{n\in N} \alpha(n)|f(n)| = |c|\|f\|_{N,\alpha}.$$

Por último, para $f, g \in X$ y $n \in N$ se tiene que $|f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|$ lo que implica que

$$\alpha(n)|f(n) + g(n)| \leq \alpha(n)|f(n)| + \alpha(n)|g(n)|.$$

Sumando sobre $n \in N$ se concluye que $\|f + g\|_{N,\alpha} \leq \|f\|_{N,\alpha} + \|g\|_{N,\alpha}$.

(b) Muestre que $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ es una norma si y sólo si N es denso en $[0,1]$.

Solución. Supongamos que N no es denso en $[0,1]$. Luego, existen $0 \leq a < b \leq 1$ tales que $(a,b) \cap N = \varnothing$. Sean $a < c < d < b$. Tomemos $f \in X$ tal que $f(t) = 1$ para todo $t \in [c,d]$ y $f(t) = 0$ para todo $t \in [0,1] \setminus (a,b)$, que existe porque $[c,d]$ y $[0,1] \setminus (a,b)$ son cerrados disjuntos. Como $[c,d] \cap N \subseteq (a,b) \cap N = \varnothing$, tenemos que $\|f\|_{N,\alpha} = 0$, lo que muestra que $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ no es una norma.
Supongamos ahora que $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ no es una norma. Luego, existe $f \in X$ con $f \neq 0$ tal que $\|f\|_{N,\alpha} = 0$. Como $f \neq 0$, existe $t \in [0,1]$ tal que $f(t) \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f(t) > 0$ (si no, cambiamos f por $-f$). Por continuidad de f, debe existir una vecindad abierta U de t en $[0,1]$ tal que $f(s) > 0$ para todo $s \in U$. Esto implica que $N \cap U = \varnothing$, pues, si no, tendríamos que $\|f\|_{N,\alpha} > 0$. Así, existe un abierto en $[0,1]$ que no intersecta a N, por lo que N no es denso.

(c) Sea $t \in [0,1]$. Muestre que $T\colon X \to \mathbb{R}$ dada por $T(f) = f(t)$ es continua respecto a $\|\cdot\|_{N,\alpha}$ si y sólo si $t \in N$.

Solución. Primero, notemos que la continuidad de T es equivalente a la existencia de $c > 0$ tal que $|T(f)| \leq c\|f\|_{N,\alpha}$ para todo $f \in X$.
Supongamos que $t \in N$. Luego,

$$\alpha(t)|f(t)| = \alpha(t)|T(f)| \leq \sum_{n\in N} \alpha(n)|f(n)| = \|f\|_{N,\alpha}$$

por lo que la desigualdad es cierta para $c = \frac{1}{\alpha(t)} > 0$.

Supongamos ahora que $t \notin N$. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y positiva de funciones que valen 1 en $[t - 1/k, t + 1/k] \cap [0,1]$ y 0 en $([0, t - 2/k] \cup [t + 2/k, 1]) \cap [0,1]$ (existe una sucesión de funciones positivas no necesariamente decreciente por el lema de Urysohn y tomando mínimos con la función anterior se puede hacer decreciente). Vemos así que $T(f_k) = f_k(t) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos, por otro lado, que $\|f_k\|_{\alpha,N} \to 0$, lo que muestra que no puede existir $c > 0$ que verifique la desigualdad del principio.

En efecto, si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(t-2/k_0, t+2/k_0) \cap N$ es finito, para k_1 suficientemente grande se tendrá que $(t-2/k, t+2/k) \cap N = \{t\}$ para todo $k \geq k_1$, por lo que $\|f_k\|_{N,\alpha} = 0$ para todo $k \geq n_1$.

Por otro lado, si para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $(t-2/k, t+2/k) \cap N$ es infinito, elegimos $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de naturales tales que

$$(t-2/k_j, t+2/k_j) \cap N \subsetneq (t-2/k_{j+1}, t+2/k_{j+1}) \cap N$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Esta sucesión existe, pues siempre podemos elegir radios suficientemente pequeños de modo que se quite un elemento más de la intersección.

Sea $N_j \doteq (t-2/k_{j+1}, t+2/k_{j+1}) \cap N$. Sea $M > 0$ tal que $f_{k_j} \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (existe porque la sucesión es decreciente y las funciones son continuas en un compacto). Luego,

$$\|f_{k_j}\|_{N,\alpha} = \sum_{n\in N_j} \alpha(n) f_{k_j}(n) \leq M \sum_{n \in N_j} \alpha(n).$$

Como la última serie es convergente y al aumentar j se están sumando estrictamente menos términos, ésta converge a cero, pues reordenando los sumandos es igual a sumar la «cola» de una serie convergente. Concluimos así que $\|f_{k_j}\|_{N,\alpha} \to 0$ y, como la sucesión es decreciente, que $\|f_k\|_{N,\alpha} \to 0$, lo que muestra lo pedido.

P2. Sean X, Y espacios de Banach.

(a) Sea $(T_n \colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales continuos. Pruebe que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para todo $x \in X$ si y sólo si para cada compacto $K \subseteq X$ se tiene que $(T_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Indicación. Justifique que basta considerar el caso en el $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Solución. Supongamos que $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $x \in X$. Luego, para cada $x \in X$ se tiene que la sucesión real $(\|T_n(x)\|_X)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, lo que muestra que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\|_X < \infty$. Del teorema de Banach-Steinhaus, $M \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Sea $K \subseteq X$ compacto y $\varepsilon > 0$. Como K es totalmente acotado, existen $x_1, \ldots, x_k \in K$ tales que $\text{mín}_{1\leq i\leq k} \|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{2M}$ para todo $x \in K$. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n(x_i)\|_X < \varepsilon/2$ para todo $1 \leq i \leq k$. Así,

$$\|T_n(x)\|_X \leq \|T_n(x) - T_n(x_i) + T_n(x_i)\|_X \leq \|T_n(xi)\|_X + M\|x - x_i\|_X \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq N$ y $x \in K$, lo que muestra la convergencia uniforme en K.

La otra implicancia es directa del hecho que $\{x\}$ es compacto para todo $x \in X$.

En el caso general en que el límite es T, consideramos la sucesión $(T_n - T)_{n\in\mathbb{N}}$ y aplicamos el resultado anterior.

(b) Sea $T \colon X \to Y$ una aplicación lineal.

I) Muestre que si T es continua de $(X, \sigma(X, X^*))$ en $(Y, \sigma(Y, Y^*))$, entonces su grafo es cerrado en norma.

Solución. Sea $(x_n, T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el grafo de T convergente en norma a (x, y). Basta probar que $y = T(x)$.

Como $x_n \to X$, se tiene que $x_n \xrightarrow{w} x$. Sea $x^* \in X^*$ y notemos que $x^* \circ T$ es $\sigma(X, X^*)$ continua. Luego, $x^*(T(x_n)) \to x^*(T(x))$. Por otro lado, como $T(x_n) \to y$ se tiene que $T(x_n) \xrightarrow{w} y$ y así $x^*(T(x_n)) \to x^*(y)$.

Concluimos entonces que $x^*(T(x)) = x^*(y)$ para todo $x^* \in X^*$. Como la topología débil es Hausdorff, esto implica que $T(x) = y$, que es lo que se quería probar.

II) Concluya que para una aplicación lineal la continuidad de $(X,\sigma(X,X^*))$ en $(Y,\sigma(Y,Y^*))$ y la continuidad de $(X,\|\cdot\|_X)$ en $(Y,\|\cdot\|_Y)$ son equivalentes.
Solución. Sea $T\colon X\to Y$ lineal. Si T es continua de $(X,\sigma(X,X^*))$ en $(Y,\sigma(Y,Y^*))$, su grafo es cerrado en norma por la parte **(b)**. Por el teorema del grafo cerrado, esto implica que T es continua de $(X,\|\cdot\|_X)$ en $(Y,\|\cdot\|_Y)$.
Por otro lado, supongamos que T es continua de $(X,\|\cdot\|_X)$ en $(Y,\|\cdot\|_Y)$. Sea $(x_\alpha)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $x_\lambda \xrightarrow{w} x\in X$ y sea $y^*\in Y^*$. Como $y^*\circ T\colon X\to\mathbb{R}$ es lineal y continuo (en norma), se tiene que $y^*\circ T(x_\lambda)\to y^*\circ T(x)$, lo que muestra que $T(x_\lambda)\xrightarrow{w} T(x)$.

P3. Sea $X\doteq\mathcal{C}([0,1])$. Sea Y un sub espacio vectorial de X que contiene a una función f_0 estrictamente positiva y sea $P\doteq\{f\in X \mid f\geq 0\}$. Consideremos un funcional lineal $T\colon Y\to\mathbb{R}$ tal que $T(f)\geq 0$ para toda $f\in\operatorname{dom}(T)\cap P$. Un funcional con esta propiedad se dice **positivo**.

(a) Muestre que si $f,g\in Y$ verifican $f\geq g$, entonces $T(f)\geq T(g)$ y concluya que T es continuo.
Solución. Sean $f,g\in Y$ con $f\geq g$. Luego, $f-g\geq 0$ por lo que $T(f-g)\geq 0$, lo que muestra que $T(f)\geq T(g)$.
Notemos ahora que como f_0 es continua en un compacto debe alcanzar su mínimo, por lo que existe $c>0$ tal que $f_0(t)>0$ para todo $t\in[0,1]$. Sea ahora $f\in Y$ con $\|f\|_\infty\leq 1$. Luego, $f(t)\leq 1\leq\frac{1}{c}f_0(t)$ para todo $t\in[0,1]$. Vemos que $\frac{1}{c}f_0-f\geq 0$, por lo que $T(f)\leq\frac{1}{c}T(f_0)$ para toda $f\in Y$ con $\|f\|_\infty\leq 1$. Concluimos que

$$\sup_{\substack{f\in Y\\ \|f\|_\infty\leq 1}} T(f)\leq\frac{1}{c}T(f_0)<\infty$$

por lo que T es continuo.

(b) Considere la función $p\colon X\to\mathbb{R}$ dada por $p(f)\doteq\operatorname{ínf}\{T(g) \mid g\geq f, g\in Y\}$. Pruebe que p es una función sublineal y positivamente homogénea que domina a T y concluya que existe un funcional lineal $\tilde{T}\colon X\to\mathbb{R}$ dominado por p que extiende a T.
Solución. Sea $\alpha>0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
p(\alpha f) &= \operatorname{ínf}\{T(g) \mid g\geq\alpha f, g\in Y\}\\
&= \operatorname{ínf}\{T(g) \mid \frac{1}{\alpha}g\geq f, g\in Y\}\\
&= \operatorname{ínf}\{T(g) \mid \frac{1}{\alpha}g\geq f, \frac{1}{\alpha}g\in Y\}\\
&= \operatorname{ínf}\{T(\alpha g) \mid g\geq f, g\in Y\}\\
&= \operatorname{ínf}\{T(\alpha g) \mid g\geq f, g\in Y\}\\
&= \operatorname{ínf}\{\alpha T(g) \mid g\geq f, g\in Y\}\\
&= \alpha\operatorname{ínf}\{T(g) \mid g\geq f, g\in Y\}.
\end{aligned}$$

Sean ahora $f_1,f_2\in X$. Por definición,

$$p(f_1+f_2)=\operatorname{ínf}\{T(g) \mid g\geq f_1+f_2, g\in Y\}.$$

Sean ahora $g_1,g_2\in Y$ tales que $g_1\geq f_1$ y $g_2\geq f_2$. Luego, $g_1+g_2\geq f_1+f_2$ y $g_1+g_2\in Y$, por lo que $p(f_1+f_2)\leq T(g_1+g_2)=T(g_1)+T(g_2)$. Tomando ínfimo en g_1 y g_2 vemos que $p(f_1+f_2)\geq p(f_1)+p(f_2)$.
Veamos ahora que $T(f)\leq p(f)$ para toda $f\in Y$. En efecto, sea $g\in Y$ con $g\geq f$. Por la parte anterior, $T(f)\leq T(g)$ y tomando ínfimo se concluye lo deseado.
Por el teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{T}\colon X\to\mathbb{R}$ que extiende a T y que está dominado por p.

(c) Concluya que $\tilde{T}$ es una extensión positiva y continua de T.

Solución. Por la parte **(a)**, basta ver que $\tilde{T}$ es positivo. Sea $f \geq 0$. Luego, $p(-f) \leq T(0) = 0$, pues $0 \in Y$ y $0 \geq -f$. Concluimos entonces que

$$-\tilde{T}(f) = \tilde{T}(-f) \leq p(-f) \leq 0$$

lo que muestra que $\tilde{T}(f) \geq 0$.

P4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ e.v.n. tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ verifican $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta$ y $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces $\|x - y\| < \varepsilon$. Un e.v.n. que verifica esto se dice **uniformemente convexo**.

(a) Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X débilmente convergente a $x \in X$ con $\|x\| = \|x_\lambda\| = 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Muestre que x_λ converge a x en norma.

Solución. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ de la definición de convexidad uniforme.

Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ el funcional soporte de x, es decir, una función lineal continua con $f(x) = 1$ y $\|f\| = 1$. Como f es continua, $f(x_\lambda) \to f(x) = 1$ y por lo tanto $f\left(\frac{x+x_\lambda}{2}\right) \to 1$. Así, existe λ^* tal que para todo $\lambda \geq \lambda^*$ se tiene que $f\left(\frac{x+x_\lambda}{2}\right) > 1 - \delta$. Luego,

$$\left\|\frac{x + x_\lambda}{2}\right\| = \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|=1}} x^*\left(\frac{x + x_\lambda}{2}\right) \geq f\left(\frac{x + x_\lambda}{2}\right) > 1 - \delta$$

para todo $\lambda \geq \lambda^*$. Concluimos entonces que $\|x - x_\lambda\| < \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda^*$, lo que muestra que $x_\lambda \to x$.

(b) Concluya que una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a x en norma si y sólo $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ y $\|x_\lambda\| \to \|x\|$.

Solución. Como la convergencia en norma implica la convergencia débil y $\|\cdot\|$ es continua, tenemos que si $x_\lambda \to x$ se tienen las otras dos propiedades.

Supongamos ahora que $x_\lambda \xrightarrow{w} x$, $\|x_\lambda\| \to x$ y que $x_\lambda \not\to x$. Podemos suponer que $x \neq 0$, pues si $x = 0$ la convergencia de la norma implica la convergencia en norma. Luego, se tiene que $\frac{x_\lambda}{\|x\|} \xrightarrow{w} \frac{x}{\|x\|}$ y que $\|x_\lambda\| \to 1$. Como $x \neq 0$, $\|x_\lambda\| \not\to 0$ y podemos suponer que $\|x_\lambda\| > 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Así, por la continuidad de la ponderación por escalar en la topología débil se tiene que

$$\frac{x_\lambda}{\|x_\lambda\|} = \frac{1}{\left\|\frac{x_\lambda}{\|x\|}\right\|} \frac{x_\lambda}{\|x\|} \xrightarrow{w} \frac{x}{\|x\|}.$$

Por la parte anterior, tenemos que $\frac{x_\lambda}{\|x_\lambda\|} \to \frac{x}{\|x\|}$. Luego, $\frac{\|x\|}{\|x_\lambda\|} x_\lambda \to x$. Como $\frac{\|x\|}{\|x_\lambda\|} \to 1$, esto implica que $x_\lambda \to x$.

(c) Muestre con un contraejemplo que la propiedad de convergencia en **(b)** no implica la convexidad uniforme de un e.v.n..

Solución. Consideremos el e.v.n. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$. Como la topología débil y la topología fuerte coinciden en dimensión finita, se tiene trivialmente la equivalencia de las convergencias en este espacio. Por otro lado, no se tiene la convexidad uniforme, pues tomando $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$ se tiene que

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1, \quad \left\|\frac{x + y}{2}\right\| = 1.$$