

Auxiliar Extra C3 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.

Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

P1. Sea X un espacio de Banach e Y un e.v.n.. Suponga que existe $T: X \rightarrow Y$ lineal, continua y abierta. Se desea probar que Y es un espacio de Banach.

- (a) Muestre que T es sobreyectiva y que $\tilde{T}: X/\text{Ker}(T) \rightarrow Y$ dada por $\tilde{T}([x]) = T(x)$ está bien definida.
- (b) Muestre que la proyección $\pi: X \rightarrow X/\text{Ker}(T)$ y $\tilde{T}$ son aplicaciones abiertas.
- (c) Concluya.

P2. Sea X un espacio vectorial y $T: X \rightarrow X$ una función lineal. Suponga que $p: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una seminorma en X invariante bajo T , es decir, tal que $p \circ T = p$.

Pruebe que si $Y \subseteq X$ es un sub espacio vectorial de X con $T(Y) \subseteq Y$ y $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal dominado por p tal que $f \circ T = f$, entonces existe una extensión $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ de f dominada por p y tal que $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$.

Indicación. Considere el conjunto

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ \sum_{j=0}^n \alpha_j T^j \mid \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \right\}$$

y defina la función $q(x) = \inf_{A \in \mathcal{A}} p(A(x))$.

P3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sean B la bola unitaria de X y S la frontera de B .

- (a) Muestre que si Y, Z son sub espacios vectoriales de X con $\text{codim}(Y) = n$ y $\text{codim}(Z) = m$, entonces $\text{codim}(Y \cap Z) \leq n + m$.
- (b) Muestre que cualquier vecindad débil de $x \in X$ contiene una línea que pasa por x .
- (c) Concluya que la adherencia de S en la topología débil es B .

P4. Determine el cubrimiento universal y el grupo fundamental de los siguientes espacios:

- (a) copias $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^1$ que se intersectan en un solo punto;
- (b) un toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y
- (c) un plano sin el origen.