Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
20 de junio de 2014

# Auxiliar 13 MA3801

Profesor: Aris Daniilidis.
Auxiliares: Rodolfo Gutiérrez, Camila Romero, Felipe Subiabre.

**P1.** Sea $X$ un espacio topológico contráctil. Muestre que $X$ es conexo por caminos.

**P2.** Sea $X$ un espacio topológico simplemente conexo. Muestre que si $\alpha\colon I \to X$ y $\beta\colon I \to X$ son curvas con extremos iguales, entonces existe una homotopía entre $\alpha$ y $\beta$ que fija sus extremos.

**P3.** El objetivo de este problema es mostrar que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa para todo $n > 1$. Para esto, se propone el siguiente esquema:

- **(a)** Muestre que si $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^n$ es una curva cerrada no sobreyectiva, entonces es homotópica (con extremos fijos) a una constante.
- **(b)** Muestre que si $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^n$ es una curva inyectiva, entonces su imagen es un cerrado de interior vacío en $\mathbb{S}^n$.
- **(c)** Sea ahora $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^n$ una curva cerrada arbitraria. Usando la continuidad uniforme de $\alpha$, muestre que $\alpha$ es homotópica (con extremos fijos) a una curva que no es sobreyectiva.
- **(d)** Concluya.

**P4.** Sea $X$ un espacio topológico. Para $n \in \mathbb{N}$, se define el ***n*-ésimo grupo de homotopía** de manera análoga al grupo fundamental, pero considerando funciones $\alpha\colon I^n \to X$ que valen $x_0$ fijo en $\partial I^n$. Llamamos a este grupo $\pi_n(X, x_0)$.

Defina formalmente el grupo $\pi_n(X, x_0)$ como se hizo para el caso $n = 1$. Además, muestre que $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano para todo $n > 1$.